REPORT DOCUMENTATION PAGE		Form Approved OMB No. 0704-0188

1. REPORT DATE *(DD-MM-YYYY)*	**2. REPORT TYPE**	**3. DATES COVERED** *(From – To)*
14-05-2010	Conference Proceedings	4 June 2007 - 8 June 2007

4. TITLE AND SUBTITLE International Congress NONLINEAR DYNAMICAL ANALYSIS 2007 dedicated to the 150th anniversary of Academician A.M. Lyapunov	**5a. CONTRACT NUMBER** FA8655-07-1-5037
	5b. GRANT NUMBER
	5c. PROGRAM ELEMENT NUMBER
6. AUTHOR(S) Conference Committee	**5d. PROJECT NUMBER**
	5d. TASK NUMBER
	5e. WORK UNIT NUMBER
7. PERFORMING ORGANIZATION NAME(S) AND ADDRESS(ES) Saint Petersburg State University 28 Universitetskii prospect Saint Petersburg 198504 Russia	**8. PERFORMING ORGANIZATION REPORT NUMBER** N/A
9. SPONSORING/MONITORING AGENCY NAME(S) AND ADDRESS(ES) EOARD Unit 4515 BOX 14 APO AE 09421	**10. SPONSOR/MONITOR'S ACRONYM(S)**
	11. SPONSOR/MONITOR'S REPORT NUMBER(S) CSP 07-5037

12. DISTRIBUTION/AVAILABILITY STATEMENT

Approved for public release; distribution is unlimited. (approval given by local Public Affairs Office)

13. SUPPLEMENTARY NOTES

14. ABSTRACT

The Final Proceedings for International Congress NONLINEAR DYNAMICAL ANALYSIS 2007 dedicated to the 150th anniversary of Academician A.M. Lyapunov, 4 June 2007 - 8 June 2007

Conference program will include Plenary session, Oral sessions and Special sessions.

The scientific scope of the conference includes several advanced branches of modern mathematics and mechanics which are of paramount importance for both fundamental and applied research. Oral sessions will be organized on the following topics:
1. Stability theory and nonlinear oscillations
2. Nonlinear control
3. Classical mechanics
4. Celestial mechanics
5. Nonlinear differential equations and their applications
6. Mathematical modeling in natural, technical and humanitarian sciences
7. Chaos Theory
8. Games theory and its applications in management

The objectives of these sessions are: to present and discuss recent achievements in nonlinear dynamic analysis, to establish new scientific contacts between both theoretical and applied teams.

Special sessions will be devoted to
1. The Life and Scientific Activity of Academician A. M. Lyapunov". The goal of this session is to consider historical and methodological aspects:

2. “Scientific educational program of aerospace universities and institutes of RAS “Studies and Development of Student Micro-satellites”. Its objective is to discuss specific applied and educational problems
3. Intersectional round-table discussion “Nonlinear Dynamical Analysis in the World in the XXI Century.” This round table is important for the coordination of different scientific group activities. We hope to evoke a live discussion of new ideas, perspectives and priorities in nonlinear dynamical analysis

SCIENTIFIC COMMITTEE OF THE CONGRESS:

Chair: Academician Yu. S. Osipov (Moscow).

Vice-chairs:
Professor A. A. Fursenko (Moscow),
Academician V. G. Peshekhonov (St.-Petersburg),
Professor L. A. Verbitskaya (St.-Petersburg).

Members of the Scientific Committee:
Academician N. A. Anfimov (Moscow), Professor P. Borne (France), Academician V. V. Kozlov (Moscow), Academician N. N. Krasovsky (Yekaterinburg), Professor V. Lakshmikantham (USA), Professor G. A. Leonov (St.-Petersburg), Professor S. N. Mazurenko (Moscow), Academician V. M. Matrosov (Moscow), Professor H. Mijagi (Japan), Academician N. F. Morozov (St.-Petersburg), Professor P. Quéau (Moscow Bureau of UNESCO), Academician V. V. Rumyantsev (Moscow), Professor E. A. Tropp (St.-Petersburg), Academician V. Ye. Fortov (Moscow), Academician K. V. Frolov (Moscow).

INTERNATIONAL PROGRAM COMMITTEE (IPC):

Co-chairs: V. Lakshmikantham (USA), V. M. Matrosov (Russia);
Vice-chair: V. A. Pliss (St.-Petersburg);
Members: N. V. Azbelev (Russia), A. A. Ashimov (Kazakhstan), V. V. Beletsky (Russia), P. Borne (France), S. N. Vassiljev, V. G. Veretennikov (Russia), V. Vujicic (Yugoslavia), A. V. Karapetjan, D. M. Klimov, V. V. Kozlov, R. I. Kozlov, V. B. Kolmanovsky (Russia), V. I. Korobov, V. A. Kuntsevich (Ukraine), P. S. Krassilnikov, V. P. Legostayev, G. A. Leonov (Russia), S. Leela (USA), A. M. Lipanov, A. M. Matveenko, I. V. Matrosov (Russia), H. Mijagi (Japan), N. F. Morozov, Yu. S. Osipov (Russia), M. Pascal (France), V. V. Rumyantsev, I. A. Ryabinin (Russia), A. Ya. Savchenko (Ukraine), N. A. Sidorov, T. K. Sirazetdinov, S. P. Sokolova, S. Ya. Stepanov, A. A. Tolstonogov, V. A. Trenogin (Russia), M. Farkas (Hungary), A. L. Fradkov, K. V. Frolov (Russia), X. Fu (China), M. M. Khapayev, M. M. Khrustalev, A. G. Chentsov, F. L. Chernousko (Russia), D. F. Chevalier (France), D. Siljak (USA), T. M. Eneev, V. A. Jakubovich (Russia)

NATIONAL ORGANIZING COMMITTEE (NOC):

Chair: G. A. Leonov (St.-Petersburg),
Vice-chairs: V. V. Baranov (Moscow), G. I. Melnikov (St.-Petersburg)
Members: V. V. Grigoriev, V. M. Ivanov, M. B. Ignatiev, D. A. Indeytsev, K. V. Kholshevnikov, E. V. Kustova, K. V. Matrosova, V. O. Nikiforov, L. A. Petrosyan, P. Ye. Tovstik, V. N. Tkhai, A. V. Ushakov, I. A. Finogenko, M. P. Yushkov
Executive Secretary: B. V. Trifonenko (St.-Petersburg)

15. SUBJECT TERMS
EOARD, Dynamical Systems, Controls & Displays, Mathematical Modeling, Numerical Simulation

16. SECURITY CLASSIFICATION OF:			**17. LIMITATION OF ABSTRACT**	**18, NUMBER OF PAGES**	**19a. NAME OF RESPONSIBLE PERSON**
a. REPORT UNCLAS	**b. ABSTRACT** UNCLAS	**c. THIS PAGE** UNCLAS	UL	406	SURYA SURAMPUDI
					19b. TELEPHONE NUMBER *(Include area code)* +44 (0)1895 616021

Международный конгресс

НЕЛИНЕЙНЫЙ ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ - 2007

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

4–8 июня 2007
Санкт-Петербург, Россия

International Congress

NONLINEAR DYNAMICAL ANALYSIS - 2007

BOOK OF ABSTRACTS

June 4–8, 2007
Saint Petersburg, Russia

МЕЖДУНАРОДНЫЙ КОНГРЕСС

НЕЛИНЕЙНЫЙ ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ – 2007

Посвящается 150-летию со дня рождения академика А.М. Ляпунова

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

4–8 июня 2007 г.
Санкт-Петербург, Россия

INTERNATIONAL CONGRESS

NONLINEAR DYNAMICAL ANALYSIS – 2007

Dedicated to the 150th anniversary of academician A.M. Lyapunov

BOOK OF ABSTRACTS

June 4–8, 2007
Saint Petersburg, Russia

УДК 51+52+53

Нелинейный динамический анализ – 2007: Тезисы докладов международного конгресса, Санкт-Петербург, 4–8 июня 2007 г. — СПб.: Санкт-Петербургский государственный университет, 2007. — 402 с.
ISBN 978-5-900780-65-8

В сборник включены тезисы докладов, представленных на международном конгрессе "Нелинейный динамический анализ – 2007", посвященном 150-летию со дня рождения академика А.М. Ляпунова (1857–1918). Рассматриваются вопросы теории устойчивости, нелинейной теории управления, хаотической динамики, классической и небесной механики, нелинейных дифференциальных уравнений и их приложений. Обсуждаются проблемы математического моделирования в естественных, технических и гуманитарных науках, а также теории игр и ее приложений в менеджменте. Приведены аннотации тезисов на английском языке.

Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №07-01-06047-г) и ФГУП ГНЦ РФ ЦНИИ "Электроприбор".

ISBN 978-5-900780-65-8

ПРЕДИСЛОВИЕ

Сборник включает в себя тезисы докладов, представленных на Международном конгрессе "Нелинейный динамический анализ – 2007", посвящённом 150-летию со дня рождения академика А.М. Ляпунова (1857–1918). Конгресс проводится 4-8 июня 2007 года в Санкт-Петербурге на базе Санкт-Петербургского государственного университета.

В программу конгресса включены пленарные и секционные доклады по следующим направлениям:

1. Теория устойчивости и нелинейные колебания
2. Нелинейная теория управления
3. Классическая механика
4. Небесная механика
5. Нелинейные дифференциальные уравнения и их приложения
6. Математическое моделирование в естественных, технических и гуманитарных науках
7. Теория игр и ее приложения в менеджменте
8. Методы А.М. Ляпунова в хаотической динамике

ОРГАНИЗАТОРЫ КОНГРЕССА

- Министерство образования и науки РФ
- Российская академия наук
- Российский фонд фундаментальных исследований
- Санкт-Петербургский государственный университет
- НИИ математики и механики им. ак. В.И. Смирнова СПбГУ
- ФГУП ГНЦ РФ ЦНИИ "Электроприбор"
- Академия нелинейных наук
- European Office of Aerospace Research & Development (EOARD)

НАУЧНЫЙ КОМИТЕТ КОНГРЕССА

- Председатель: **Ю.С. Осипов (Москва)**
- Заместители председателя: **А.А. Фурсенко (Москва), В.Г. Пешехонов (Санкт-Петербург), Л.А. Вербицкая (Санкт-Петербург)**
- Члены Комитета

  Н.А. Анфимов (Москва), В.М. Матросов (Москва), П. Борн (Франция), Х. Мияги (Япония), В.В. Козлов (Москва), Н.Ф. Морозов (Санкт-Петербург), Н.Н. Красовский (Екатеринбург), В.В. Румянцев (Москва), В. Лакшмикантам (США), Э.А. Тропп (Санкт-Петербург), Г.А. Леонов (Санкт-Петербург), В.Е. Фортов (Москва), С.Н. Мазуренко (Москва), К.В. Фролов (Москва)

МЕЖДУНАРОДНЫЙ ПРОГРАММНЫЙ КОМИТЕТ

- Сопредседатели: **В. Лакшмикантам (США), В.М. Матросов (Россия)**
- Заместитель председателя: **В.А. Плисс (Санкт-Петербург)**
- Члены Комитета

  Н.В. Азбелев (Россия), А.А. Ашимов (Казахстан), В.В. Белецкий (Россия), П. Борн (Франция), С.Н. Васильев, В.Г. Веретенников (Россия), В. Вуйичич (Югославия), А.В. Карапетян, Д.М. Климов, В.В. Козлов, Р.И. Козлов, В.Б. Колмановский (Россия), В.И. Коробов, В.А. Кунцевич (Украина), П.С. Красильников, В.П. Легостаев, Г.А. Леонов (Россия), С. Лила (США), А.М. Липанов, А.М. Матвеенко, И.В. Матросов (Россия), Х. Мияги (Япония), Н.Ф. Морозов, Ю.С. Осипов (Россия), М. Паскаль (Франция), В.В. Румянцев, И.А. Рябинин (Россия), А.Я. Савченко (Украина), Н.А. Сидоров, Т.К. Сиразетдинов, С.П. Соколова, С.Я. Степанов, А.В. Тимофеев, А.А. Толстоногов, В.А. Треногин (Россия), М. Фаркаш (Венгрия), А.Л. Фрадков, К.В. Фролов (Россия), К. Фу (Китай), М.М. Хапаев, М.М. Хрусталев, А.Г. Ченцов, Ф.Л. Черноусько (Россия), Д.Ф. Шевалье (Франция), Д. Шильяк (США), Т.М. Энеев, Р.М. Юсупов, В.А. Якубович (Россия)

- Ученый секретарь МПК: Н. И. Матросова (Россия)
- Зам. ученого секретаря МПК: А. В. Масленникова (Россия)

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ОРГАНИЗАЦИОННЫЙ КОМИТЕТ

- Председатель: **Г.А. Леонов**
- Заместители председателя: **В.В. Баранов (Москва), Г.И. Мельников (Санкт-Петербург)**
- Члены Комитета

  В.В. Григорьев, В.М. Иванов, М.Б. Игнатьев, Д.А. Индейцев, Е.В. Кустова, К.В. Матросова, В.О. Никифоров, Л.А. Петросян, П.Е. Товстик, В.Н. Тхай, А.В. Ушаков, И.А. Финогенко, К.В. Холшевников, М.П. Юшков

- Ответственный секретарь НОК: Б. В. Трифоненко

ОРГАНИЗАЦИИ–СПОНСОРЫ КОНГРЕССА

Международный конгресс "Нелинейный динамический анализ – 2007" проводится при финансовой поддержке:

- Российской академии наук
- Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 07-01-06047-г)
- ФГУП ГНЦ РФ ЦНИИ "Электроприбор"
- Комитет по науке и высшей школе Администрации Санкт-Петербурга
- European Office of Aerospace Research & Development (EOARD) (grant FA8655-07-1-5037)

ОСНОВНЫЕ ДАТЫ ЖИЗНИ И ТВОРЧЕСТВА АЛЕКСАНДРА МИХАЙЛОВИЧА ЛЯПУНОВА

1857, 25 мая по старому стилю — В городе Ярославле родился Александр Ляпунов.
1864 — Семья Ляпуновых поселилась в своем имении — селе Болобонове Курмышского уезда Симбирской губернии.
1868 — Умер Михаил Васильевич — отец Александра Ляпунова.
1870 — Семья Ляпуновых переселилась в Нижний Новгород. Александр поступает в третий класс гимназии, которую оканчивает в 1876 г.
1876, август — Александр поступает в Петербургский университет на физико-математический факультет.
1880 — Присуждение Ляпунову золотой медали за студенческую работу по гидростатике (*февраль*).
В *мае* Ляпунов окончил Петербургский университет и был оставлен при кафедре механики. Первые научные работы под руководством Д. К. Бобылева.
1882 — Встречи в академиком П. Л. Чебышевым и получение от него темы диссертационной работы.
1885, 27 января — Защита диссертации "Об устойчивости эллипсоидальных форм равновесия вращающейся жидкости"на степень магистра прикладной математики.
1885 — Утверждение в звании приват-доцента и переезд в Харьков. Начал преподавательскую деятельность в Харьковском университете на кафедре механики.
1886, 17 января — Александр Ляпунов обвенчался в Петербурге с Натальей Рафаиловной Сеченовой
1888 — Публикация статьи "О постоянных винтовых движениях твердого тела в жидкости в которой впервые изложены основные идеи первого метода Ляпунова в теории устойчивости.
1889 — Публикация работы "Об устойчивости движения в одном частном случае задачи о трех телах".
1892, 30 сентября — Защита в Московском университете диссертации "Общая задача устойчивости движения".
1893 — Утверждение Ляпунова в звании ординарного профессора.
1894 — Публикация работы "Об одном свойстве дифференциальных уравнений задачи о движении тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку".
1896 — Публикация статьи "О рядах, предложенных Хиллом для представления движения Луны".
1898 — Публикация работы "О некоторых вопросах, относящихся к проблеме Дирихле".
1899, октябрь — Избрание А.М.Ляпунова председателем Харьковского математического общества.
1900 — Первая публикация, в которой Ляпунов дает доказательство центральной предельной теоремы.
В *декабре* А. М. Ляпунов избран членом-корреспондентом Академии наук.
1901, 6 октября — Избрание А. М. Ляпунова ординарным академиком по прикладной математике.
1902, май — Переезд Ляпуновых в Петербург и начало академического периода его жизни. Публикация работы "Об основном принципе метода Неймана в задаче Дирихле".
1903 — Публикация работы "Исследования в теории фигуры небесных тел в которой Ляпунов обратился к изучению фигур равновесия неоднородной жидкости.
1905 — Публикация статьи "Об одной задаче Чебышёва в которой Ляпунов приводит сводку полученных им результатов по решению этой задачи.
1906 — Выход в свет первой части большого труда Ляпунова "О фигурах равновесия, мало отличающихся от эллипсоидов, вращающейся однородной массы жидкости".
1907 — По инициативе А.М.Ляпунова проведено празднование 200-летия со дня рождения русского академика Леонарда Эйлера и издано полное собрание его сочинений.
Избрание Ляпунова членом Математического общества Палермо (*ноябрь*).
1908 — Участие Ляпунова в работе IV Международного математического конгресса в Риме (*март*). Избрание Ляпунова членом Академии наук dei Lincei (*сентябрь*).
1909 — Выход в свет второй части большого труда Ляпунова о фигурах равновесия однородной жидкости.
1911, май — Краткий отдых в Швейцарии.
1912, 1914 — Выход в свет третьей и четвертой частей труда Ляпунова о фигурах равновесия однородной жидкости.
1916, март — Избрание Ляпунова членом-корреспондентом Парижской академии наук.
1917, 30 июня — Приезд супругов Ляпуновых в Одессу.
1918, сентябрь — Чтение Ляпуновым лекций по курсу "О форме небесных тел" в Новороссийском университете.
1918, 31 октября нового стиля — Умерла жена Александра Михайловича — Наталья Рафаиловна Сеченова.
1918, 3 ноября нового стиля — Кончина Александра Михайловича Ляпунова.

PREFACE

The book includes the abstracts of papers presented at the International Congress "Nonlinear Dynamical Analysis – 2007" dedicated to the 150th anniversary of academician Alexander M. Lyapunov (1857–1918). The conference is held at Saint Petersburg State University, Saint Petersburg, June 4–8, 2007.

Conference program includes plenary lectures and oral presentations in the following scientific areas:

1. Stability theory and nonlinear oscillations
2. Nonlinear control
3. Classical mechanics
4. Celestial mechanics
5. Nonlinear differential equations and their applications
6. Mathematical modeling in natural, technical and humanitarian sciences
7. Games theory and its applications in management
8. Chaos theory

CONGRESS ORGANIZERS

- Ministry of Education and Science of Russian Federation
- Russian Academy of Science
- Russian Foundation for Basic Research
- Saint Petersburg State University
- Smirnov Scientific Research Institute of Mathematics and Mechanics, Saint Petersburg University
- FSUE SRC RF CSRI "Elektropribor"
- Academy of Nonlinear Sciences
- European Office of Aerospace Research & Development (EOARD)

SCIENTIFIC COMMITTEE OF THE CONGRESS

- Chair: **Yu.S. Osipov (Moscow)**
- Vice-chairs: **A.A. Fursenko (Moscow), V.G Peshekhonov (St.-Petersburg), L.A. Verbitskaya (St.-Petersburg)**
- Committee members:

  N.A. Anfimov (Moscow),V.M. Matrosov (Moscow), P. Borne (France),H. Mijagi (Japan),V.V. Kozlov (Moscow), N.F. Morozov (St.-Petersburg), N.N. Krasovsky (Yekaterinburg), V.V. Rumyantsev (Moscow), V. Lakshmikantham (USA), E.A. Tropp (St.-Petersburg), G.A. Leonov (St.-Petersburg), V.Ye. Fortov (Moscow), S.N. Mazurenko (Moscow), K.V. Frolov (Moscow).

INTERNATIONAL PROGRAM COMMITTEE

- Co-chairs: **V. Lakshmikantham (USA), V.M. Matrosov (Russia)**
- Vice-chair: **V.A. Pliss (Russia)**
- Committee members

  N.V. Azbelev (Russia), A.A. Ashimov (Kazakhstan), V.V. Beletsky (Russia), P. Borne (France), S.N. Vassiljev, V.G. Veretennikov (Russia), V. Vujicic (Yugoslavia), A.V. Karapetjan, D.M. Klimov, V.V. Kozlov, R.I. Kozlov, V.B. Kolmanovsky (Russia), V.I. Korobov, V.A. Kuntsevich (Ukraine), P.S. Krassilnikov, V.P. Legostayev, G.A. Leonov (Russia), S. Leela (USA), A.M. Lipanov, A.M. Matveenko, I.V. Matrosov (Russia), H. Mijagi (Japan), N.F. Morozov, Yu.S. Osipov (Russia), M. Pascal (France), V.V. Rumyantsev, I.A. Ryabinin (Russia), A.Ya. Savchenko (Ukraine), N.A. Sidorov, T.K. Sirazetdinov, S.P. Sokolova, S.Ya. Stepanov, A.V. Timofeev, A.A. Tolstonogov, V.A. Trenogin (Russia), M. Farkas (Hungary), A.L. Fradkov, K.V. Frolov (Russia), X. Fu (China), M.M. Khapayev, M.M. Khrustalev, A.G. Chentsov, F.L. Chernousko (Russia), D.F. Chevalier (France), D. Siljak (USA), T.M. Eneev, R.M. Yusupov, V.A. Jakubovich (Russia)

- Scientific Secretary: N.I. Matrosova (Russia)
- Deputy Scientific Secretary: A.V. Maslennikova (Russia)

NATIONAL ORGANIZING COMMITTEE

- Chair: **G.A. Leonov (St.-Petersburg)**
- Vice-chairs: **V. V. Baranov (Moscow), G. I. Melnikov (St.-Petersburg)**
- Committee Members

  V.V. Grigoriev, V.M. Ivanov, M.B. Ignatiev, D.A. Indeytsev, V.V. Kholshevnikov, E.V. Kustova, K.V. Matrosova, V.O. Nikiforov, L.A. Petrosian, P.Ye. Tovstik, V.N. Tkhai, A.V. Ushakov, I.A. Finogenko, M.P. Yushkov

- Executive Secretary: B.V. Trifonenko (St.-Petersburg)

SPONSORING ORGANIZATIONS

The International Congress "Nonlinear Dynamical Analysis – 2007" is held under financial support of:

- Russian Academy of Science
- Russian Foundation for Basic Research (project №07-01-06047-г)
- FSUE SRC RF CSRI "Elektropribor"
- Committee of Science and High School of Saint Petersburg Administration
- European Office of Aerospace Research & Development (EOARD) (grant FA8655-07-1-5037)

MAIN DATES OF LIFE AND CREATIVE WORK OF ALEXANDER M. LYAPUNOV

1857, May 25, Old Style — Alexander Lyapunov was born in Yaroslavl.
1864 — Lyaponov's family establishes in their estate in Bolobonovo village, Kurmysh district of Simbirsk gubernia.
1868 — Father of Alexander Lyapunov, Mikhail Vasilievich, dies.
1870 — Lyaponov's family moves to Nizhniy Novgorod; Alexander enters to the third form of the gymnasium, and graduates from it in 1876.
1876, August — Alexander enters to the Petersburg University, department of physics and mathematics.
1880 — Lyapunov is awarded with a gold medal for his student work on hydrostatics (*February*).
May — Lyapunov graduates from the Petersburg University and remains at the chair of mechanics. First scientific works under supervision of D.K. Bobylev.
1882 — Lyapunov meets academician P.L. Chebyshev and obtains from him the topic of his dissertation.
1885, January 27 — Defence of dissertation "On the stability of ellipsoidal forms of equilibrium of a rotating liquid". Master degree in applied mathematics.
1885 — Lyapunov obtains the privat-docent title and moves to Kharkov. Beginning of his teaching activity in the Kharkov University, chair of mechanics.
1886, January 17 — Alexander Lyapunov weds in Petersburg to Natalia Rafailovna Sechenova
1888 — Publication of the paper "On the constant screw motions of a rigid body in liquid". In this paper, the main ideas of the first Lyapunov method in the stability theory are stated for the first time.
1889 — Publication of the work "On the stability of motion in one particular case of the three-body problem".
1892, September 30 — Defence of dissertation "General problem of the motion stability" in Moscow University.
1893 — Lyapunov obtains the title of ordinary professor.
1894 — Publication of the work "On one property of differential equations for a problem of motion of a hard solid body with a fixed point".
1896 — Publication of the paper "On the series proposed by Hill for the Moon motion representation".
1898 — Publication of the work "On some questions related to the Dirichlet problem".
1899, October — A.M. Lyapunov is elected as a chair of Kharkov Mathematical Society.
1900 — First publication where Lyapunov proves the central limit theorem.
December — A. M. Lyapunov is elected as a correspondent member of the Academy of Science.
1901, October 6 — Election of A. M. Lyapunov as an ordinary academician in applied mathematics.
1902, May — Lyapunov moves to Petersburg and starts the academical period of his life. Publication of the work "On the main principle of the Neumann method in the Dirichlet problem".
1903 — Publication of the paper "Studies in the theory of celestial bodies figures", where Lyapunov starts investigations of equilibrium figures of nonhomogeneous liquids.
1905 — Publication of the paper "On one Chebyshev problem" where Lyapunod gives the summary of results obtained by him in the solution of this problem.
1906 — Appearance of the first part of the fundamental Lyapunov's work "On the equilibrium figures, close to ellipsoids, for homogeneous rotating liquids".
1907 — A.M. Lyapunov initiates celebration of the 200*th* anniversary of Russian academician Leonard Euler and publication of his complete works.
Lyapunov is elected as a member of Palermo Mathematical Society (*November*).
1908 — Lyapunov participates in the IV International Mathematical Congress in Rome (*March*). Lyapunov is elected as a member of Academy of Science dei Lincei (*September*).
1909 — Appearance of the second part of the fundamental work on the equilibrium figures of homogeneous liquids.
1911, May — Short rest in Switzerland.
1912, 1914 — Appearance of the third and fourth parts of the Lyapunov work on the equilibrium figures of homogeneous liquids.
1916, March — Lyapunov is elected as a correspondent member of Paris Academy of Science.
1917, 30 июня — Lyapunovs arrival to Odessa .
1918, September — Lecture course "On the shape of celestial bodies" in the Novorossiisk University.
1918, October 31, New Style — The wife of Alexander Lyapunov, Natalia Rafailovna Sechenova, dies.
1918, November 3, New Style — Death of Alexander Mikhailovich Lyapunov.

ПЛЕНАРНЫЕ ДОКЛАДЫ
PLENARY LECTURES

О ЖИЗНИ И ТВОРЧЕСТВЕ АЛЕКСАНДРА МИХАЙЛОВИЧА ЛЯПУНОВА

Плисс В.А.

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

Прослеживается биография и творческий путь русского ученого, академика Александра Михайловича Ляпунова. Особое внимание уделяется первому методу А. М. Ляпунова.

Литература

[1] *Плисс В.А.* О жизни и творчестве Александра Михайловича Ляпунова // Вестник С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 2007. Вып. 2.

On the Life and Creative Works of Alexander Mikhailovich Lyapunov

Pliss V.A.

Saint Petersburg State University, Russia

Biography and creative development of Russian scientist, academician Alexander Mikhailovich Lyapunov is discussed. Main attention is focused on the first Lyapunov method.

LYAPUNOV BUNDLES IN CYCLIC FEEDBACK SYSTEMS WITH DELAYS

George Roger Sell

University of Minnesota, USA

In this lecture we will examine the dynamics of the global solutions of a nonautonomous linear cyclic systems of differential equations with time delays and a feedback property. Among other things, we show that the longtime dynamics of such a system can be described in terms of a family of second-order ordinary differential equations. The methods of analysis rely heavily on a delicate interplay between the Lyapunov exponents of the global solutions of the delay equations and an associate discrete-valued Lyapunov function.

ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ И УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ГИБРИДНЫХ СИСТЕМ

Куржанский А.Б.

Московский государственный университет, Россия

Доклад посвящён новому классу систем, в которых непрерывная динамика сочетается с дискретной. А именно, в каждый момент времени движение системы осуществляется в силу одной из заранее заданных непрерывных систем, принадлежащих заданном классу. Переключение с одной системы на другую осуществляется в силу команд, подаваемых присоединённой системой с дискретными состояниями, по результатам измерения динамики непрерывного движения.

В докладе рассмотрены следующие вопросы:

- мотивации, примеры задач,
- математические модели,
- качественное поведение, устойчивость,
- управление,
- вычислительные аспекты.

Problems of Dynamics and Control for Hybrid Systems

Kurzhanskii A.B.

Moscow State University, Russia

The lecture is devoted to a new class of systems with combined continuous and discrete dynamics. The following topics are discussed:

- motivation, examples;
- mathematical models;
- qualitative behaviour, stability;
- control;
- numerical aspects.

ПЕРВЫЙ МЕТОД ЛЯПУНОВА ДЛЯ СИЛЬНО НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Козлов В.В.

Математический институт имени В.А. Стеклова РАН, Россия

Доклад посвящен проблеме построения решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений со степенной асимптотикой. Для этой цели разработана процедура построения решений в виде рядов по обратным степеням времени, коэффициенты которых — полиномы от логарифмов времени. Такие ряды могут всюду расходиться, однако существуют точные решения, для которых эти ряды являются их асимптотическими разложениями. Рассматривается сильно нелинейный случай, когда существование таких решений невозможно вывести, основываясь лишь на анализе системы первого приближения.

Обсуждается применение этой техники к задачам теории устойчивости. Будут рассмотрены два примера. Первый касается задачи о неустойчивости изолированного равновесия автономной системы с интегральным инвариантном в нечетномерной пространстве, а второй — проблемы обращения классической теоремы Лагранжа-Дирихле об устойчивости в аналитическом случае, поставленной А.М.Ляпуновым.

First Lyapunov Method for Strongly Nonlinear Differential Equation Systems

Kozlov V.V.

V.A. Steklov Mathematical Institute of RAS, Moscow, Russia

A new algorithm for the construction of solutions of ordinary differential equations with power asymptotics is developed. This technique is applied for the stability problems, two examples are discussed.

ON THE EXISTENCE AND LIPSCHITZIANITY OF SOLUTIONS TO VARIATIONAL PROBLEMS UNDER SLOW GROWTH ASSUMPTIONS

Arrigo Cellina

Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Universitá degli Studi di Milano-Bicocca, Italy

We consider the problems of minimizing the integral

$$\int_a^b L(x(s), x'(s))ds$$

for $x : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ absolutely continuous and satisfying $x(a) = A, x(b) = B$, or the integral

$$\int_\Omega L(\|\nabla u(x)\|)\, dx$$

under suitable boundary conditions. We discuss the existence and Lipschitzianity of solutions to the above problems, under *slow*, i.e, linear, growth assumptions. The growth assumption we consider is expressed in terms of the polar of the Lagrangean L with respect to ξ . For the case when the variable of integration is a vector, we discuss the role of the curvature of $\partial\Omega$. Our result contains the classical result for the non-parametric minimal surface problem as a special case.

References

[1]Cellina A., Treu G., Zagatti S. *On the minimum problem for a class of non-coercive functionals.* J. Differential Equations 127 (1996), no. 1, 225–262.

[2] Cellina A.*The classical problem of the calculus of variations in the autonomous case: relaxation and Lipschitzianity of solutions.* Trans. Amer. Math. Soc. 356 (2004), no. 1, 415–426

[3] Cellina A., Ferriero A.*Existence of Lipschitzian solutions to the classical problem of the calculus of variations in the autonomous case.* Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linaire 20 (2003), no. 6, 911–919.

[4] Cellina A., Vornicescu M. *On the existence of solutions to a Variational Problem* a preprint.

МЕТОДЫ УПРАВЛЕНИЯ И ОЦЕНИВАНИЯ ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПРИ НАЛИЧИИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ И ОГРАНИЧЕНИЙ

Черноусько Ф.Л., Ананьевский И.М., Овсеевич А.И.

Институт проблем механики Российской Академии Наук, Москва, Россия

Доклад посвящен методам оценивания фазового состояния динамических систем и построению законов управления на основе таких оценок. Рассматриваются управляемые динамические системы, подверженные возмущениям, в предположении, что на управляющие переменные наложены ограничения.

В первой части доклада развиваются методы эллипсоидальной аппроксимации областей достижимости динамических систем. Данный подход состоит в построении внутренних и внешних эллипсоидальных оценок, задаваемых дифференциальными неравенствами, что сближает его с методом функций Ляпунова. Подход позволяет находить оптимальные аппрокисирующие эллипсоиды, причем оптимальность может быть как локальная, так и глобальная, а оптимизируемые функционалы могут быть различного вида. Выведены дифференциальные уравнения, описывающие эволюцию оптимальных эллипсоидов, выписаны их решения в явном виде. Проводится количественное и качественное исследование эволюции оптимальных аппроксимирующих эллипсоидов. Изучается асимптотика различных типов, включая асимптотику по большому времени движения и по размерности фазового пространства системы. Показано, что во многих случаях асимптотическое поведение оптимальных эллипсоидов такое же, как у соответствующих областей достижимости.

Во второй части доклада рассматривается задача управления движением лагранжевых динамических систем, находящихся под действием неопределенных факторов. Построен кусочно-линейный закон управления, который позволяет, на основе эллипсоидальных оценок фазового состояния системы на каждом шаге, приводить систему в заданное состояние за конечное время. С использованием метода функций Ляпунова предложен непрерывный аналог такого закона управления.

Эффективность развиваемых методов продемонстрирована путем компьютерного моделирования динамики различных управляемых динамических систем.

Methods of Control and Evaluation for Dynamic Systems with Uncertainties and Constraints

Chernousko F.L., Ananievskiy I.M., Ovseevich A.I.

Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

This talk is devoted to the methods of dynamical systems phase state evaluation and building of control laws on the basis of these estimates. Controlled dynamical systems subject to perturbations are considered under uncertainties and constraints.

О ВАРИАЦИОННЫХ ПРИНЦИПАХ ДЛЯ СИСТЕМ С НЕУДЕРЖИВАЮЩИМИ СВЯЗЯМИ

Румянцев В.В.

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына Российской Академии наук, Москва, Россия

Даются выводы и формулировки вариационных принципов аналитической механики для систем с неудерживающими (освобождающими) идеальными гладкими связями, первоначально установленные для систем, стесненных удерживающими (неосвобождающими) связями. Излагаются: принцип виртуальных перемещений, неравенство Фурье, принцип Даламбера-Лагранжа, принцип наименьшего принуждения Гаусса и его видоизменение — принцип наибольшей работы Четаева, принцип Журдена, принцип Гамильтона-Остроградского, принцип наименьшего действия в формах Лагранжа и Якоби, принцип Суслова-Воронца.

On Variational Principles for the Systems with Unilateral Constraints

Rumyantsev V.V.

A.A. Dorodnitsyn Computational Center RAS, Moscow, Russia

Formulation and derivation of some analytical mechanics variational principles for systems with unilateral constraints are given. Principles of virtual displacements, Fourier inequality, D'Alamber-Lagrange principle and other principles are discussed.

LIAPUNOV'S DIRECT METHOD FOR INTEGRAL EQUATIONS

Burton T.A.

Northwest Research Institute, USA

Given a differentiable Liapunov function we readily take the derivative along the solutions of a differential equation, usually by the chain rule. But for an integral equation there are special problems with differentiating the Liapunov function along the solution. In the first part of this talk we introduce techniques for differentiating the Liapunov function along the solution of the integral equation.

In the second part of the talk we consider a scalar integral equation

$$x(t) = a(t) - \int_0^t C(t,s)x(s)ds$$

and the resolvent

$$x(t) = a(t) - \int_0^t R(t,s)a(s)ds.$$

For a nice kernel, $C(t,s)$, classical results show that when $a(t)$ is bounded, so is the solution; when $a(t)$ is in L^p, so is the solution; when $a(t)$ is asymptotically periodic, so is the solution. In short, for a nice kernel the solution follows $a(t)$. We next show that this is something of a coincidence. In fact, under a variety of general conditions it is true that $\int_0^t R(t,s)a(s)ds$ is almost an exact copy of $a(t)$. If, for example, we consider

$$x(t) = (t+1)^{1/2} - \int_0^t C(t,s)x(s)ds$$

then under mild conditions on $C(t,s)$ it is true that $x \in L^p[0,\infty)$. It is not $x(t)$ which is following $a(t)$, but rather $\int_0^t R(t,s)a(s)ds$ is following $a(t)$ and $x(t)$ remains very small. A number of such results are given based on Liapunov functions.

О РАЗВИТИИ ВТОРОГО МЕТОДА ЛЯПУНОВА В ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ

Красовский Н.Н.

Институт математики и механики Уральского отделения Российской Академии наук, Россия

Обсуждается развитие метода функций Ляпунова в теории устойчивости движения. Основное внимание уделено результатам, с которыми связаны исследования уральской школы И.Г. Малкина и Е.А. Барбашина. Рассматриваются обобщения классических теорем Ляпунова для систем, описываемых различными типами дифференциальных уравнений. Движения систем с последействием определяют полугруппу преобразований в функциональном пространстве историй движения. В таком аспекте обсуждаются задачи об устойчивости с использованием функций и функционалов Ляпунова. Для стохастических систем также строятся стохастические функции и функционалы Ляпунова. Обсуждаются проблемы устойчивости управляемых процессов в условиях неопределенных и случайных динамических и информационных помех. В том числе, рассматриваются проблемы стабилизации движений в рамках теории позиционных дифференциальных игр в чистых и смешанных стратегиях.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ НШ-8512.2006.1 и гранта РФФИ № 06-01-00436

Литература

[1] Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. М-Л.: Гостехиздат, 1950.
[2] Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. Изд-е второе. М.: Наука, 1966.
[3] Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967.
[4] Bellman R. and Cooke K. Differential Difference Equations. New York-London: Academic Press, 1963.
[5] Шиманов С.Н. К теории линейных дифференциальных уравнений с последействием // Дифференц. уравнения, 1965. Т.1, № 1. С. 102-116.
[6] Разумихин Б.С. Об устойчивости систем с запаздыванием // Прикл. математика и механика, 1956. Т.20, № 3. С. 500-512.
[7] Yoshizawa T. Stability theory by Lyapunov's second method. Tokyo: Mathematical Society of Japan, No. 9, 1966.
[8] Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. Пер. с англ. М.: Мир, 1984.
[9] Осипов Ю.С. О стабилизации управляемых систем с запаздыванием // Дифференц. уравнения, 1965. Т.1, №5. С. 605-618.
[10] Burton T.A. Stability and Periodic Solutions of Ordinary and Functional Differential Equations. New York: Academic Press, 1985.
[11] Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959.
[12] Хасьминский Р.З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М.: Гл. ред. физ.-мат. лит., 1969.
[13] Kushner Harold J. Stochastic Stability and Control. New York-London: Academic Press, 1967.
[14] Кац И.Я., Красовский Н.Н. Об устойчивости систем со случайными параметрами // Прикл. математика и механика, 1960. Т.24, вып.5. С. 809-823.
[15] Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.:Наука, 1977.
[16] Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981.
[17] Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.

On Development of the Second Method of Lyapunov in the Theory of Stability of Motion

Krasovskii N.N.

Institute of Mathematics and Mechanics of Ural Branch of Russian Academy of Sciences, Russia

Development of the method of functions of Lyapunov in the theory of stability of motion is discussed with application to systems described by differential equations of various types. Systems with after-effect define semigroups in the space of histories; the stability is studied on the basis of functions and functionals of Lyapunov. Development of the method is discussed for stochastic systems in conditions of conflict and uncertainty including the concept of positional differential games with pure and mixed strategies.

References

[1] Lyapunov, A. M. The general problem of the stability of motion. M., L.: Gos. Tech. Izdat., 1950.
[2] Malkin I.G. Theory of stability of motion. Second revised edition. M.: Nauka, 1966.

[3] Barbashin, E. A. Introduction to the theory of stability. M.: Nauka, 1967.
[4] Bellman R., Cooke K.L. Differential-difference equations. New York-London: Academic Press, 1963.
[5] Shimanov S. N. On a theory of linear differential equations with after-effect. // Differential equations, 1965. V.1. N 1. P. 102 -116.
[6] Razumihin B. S. On stability of systems with delay. // Prikl. Mat. Meh., 1956. V. 20 N. 3. P. 500-512.
[7] Yoshizawa T. Stability theory by Lyapunov's second method. Tokyo: Mathematical Society of Japan, No. 9, 1966.
[8] Hale J. Theory of functional-differential equations. Transl. from English. M: Mir, 1984.
[9] Osipov Yu. S. On stabilization of control systems with delay // Differential equations, 1965. V.1. N. 5. P. 605-618.
[10] Burton T. A. Stability and periodic solutions of ordinary and functional-differential equations. New York: Academic Press, 1985.
[11] Krasovskii N. N. Certain problems in the theory of stability of motion. M: Fiz.-Mat. Lit., 1959.
[12] Hasminskii R. Z. Stability of systems of differential equations under random perturbations of their parameters. M: Nauka, 1969.
[13] Kushner H.J. Stochastic stability and control. New York-London: Academic Press, 1967.
[14] Kac I.Ya., Krasovskii N.N. On the stability of systems with random parameters // Prikl. Mat. Meh., 1960. V. 24 N. 5. P. 809-823.
[15] Kurzhanskii A.B. Control and Observation under Conditions of Indeterminacy. M: Nauka, 1977.
[16] Subbotin, A.I.; Chentsov, A.G. Guaranteed optimization in control problems. M: Nauka, 1981.
[17] Krasovskii N.N., Subbotin A.I. Positional differential games. Moskow: Nauka, 1974.

ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ И НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ
STABILITY THEORY AND NONLINEAR OSCILLATIONS

STABILITY IN SIMPLE SYSTEMS INVOLVING SHOCKS AND FRICTION

Basseville S. and Léger A.

Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes de Versailles, France
Laboratoire de Méchanique et d'Acoustique, CNRS, Marseille, France

The aim of this communication is to study the stability of equilibrium states in a mechanical system involving unilateral contact and Coulomb friction. We consider a simple mass spring system submitted to an external force and constrained to remain in a half-space. The contact of the mass with the boundary of the half-space is assumed to hold with Coulomb friction. The unilateral contact and Coulomb friction laws are strict, without regularization. Consequently, the possible shocks imply to take the equation of the dynamics in the sense of measure and not in the classical sense. The reason of this, is that the right hand-side of the equation of the dynamics involves the reaction of the obstacle, and the relation between the reaction and the displacement is not a function but a graph. Moreover, the shocks means that the velocity is not a continuous function but a function of bounded variation, and the unilateral contact conditions imply that the normal component of this reaction should satisfy a positivity condition. So that, this right side is not only a distribution but a measure.

These remarks indicate that the stability analysis can not be usual.

Recently, we have established that the problem of Cauchy is well posed if the external forces are analytical, (counter-examples to uniqueness can be built if the forces are less regular).

Consequently, we return to basic definitions of stability by studying the time evolution of the distance between a given equilibrium and the solution of a Cauchy problem where the initial data belong to a neighborhood of the equilibrium in a classical phase space. If there exists a perturbation such that the dynamics diverges from the equilibrium in a finite time or asymptotically in time, the equilibrium will be unstable. On the other hand, if no perturbation leading to a divergence exists, the equilibrium will be Lyapunov stable or asymptotically stable. The first step consists in exploring the set of equilibrium states. It appears that the set of equilibria depends on the stiffness parameters, friction coefficient, and external loads and may consist of a single solution or of an infinity of solution. According to a contact and friction laws, some equilibria are without contact, or, when they are in contact, they can be strictly stuck or in impending slip.

Then, we can study the stability of all the equilibrium states. The results obtained are summarized below

- The equilibrium states in impending slip involving a strictly negative reaction can be either stable or unstable;
- The only asymptotically stable equilibrium is the equilibrium state in grazing contact when it is the single equilibrium state. If the equilibrium in grazing contact coexists with other equilibrium states, then it is Lyapunov stable;
- All the equilibria in strictly stuck contact are Lyapunov stable.

References

[1] Ballard P., Basseville S.: Existence and Uniqueness for dynamical unilateral contact with Coulomb friction: a model problem. Math. Model. Numr. Anal. 39(1), 57–77 (2005).

[2] Basseville S., Léger A., Pratt E.: Investigation of the equilibrium states and of their stability for a simple model with unilateral contact and Coulomb friction. Arch. Appl. Mech. 73, 409–420 (2003).

[3] Basseville S., Léger A.: Stability of equilibrium states in a simple system with unilateral contact and Coulomb friction. Arch Appl Mech. 76, 403–428 (2006).

STABILITY A SPATIAL DYNAMICS FOR HYPERCYCLES EVOLUTION EQUATION OF NATURAL SELFORGANIZATION

Bratus' A.S., Posviansky V.P.

Moscow University of Transport Means (MIIT), Russia

The system of semi linear parabolic equation, which described a mathematical model of natural self organization is considered [1, 2]. Denote by $u_i(x,t)$ $(0 \le x \le l,\ t \ge 0)$ a density of i-th type of macromolecule. The differential equations for the growth macromolecules in the cases of autocatalyzing and hypercycles respectively has the form

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = u_i(k_i u_i - f_1(t)) + d_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2},\ u_i(x,0) = \varphi(x),\ \frac{\partial u_i}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u_i}{\partial x}(l,t) = 0;$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = u_i(k_i u_{i-1} - f_2(t)) + d_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2},\ u_i(x,0) = \varphi(x),\ \frac{\partial u_i}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u_i}{\partial x}(l,t) = 0,$$

$$u_0 = u_n; \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Here k_i is the replication rate, $f_1(t)$, $f_2(t)$ are the following functionals

$$f_1(t) = \sum_{i=1}^{n} \int_0^l k_i u_i^2 dx, \quad f_2(t) = \sum_{i=1}^{n} \int_0^l k_i u_i u_{i-1} dx,$$

which assures the integral condition of constancy summary densities u_i:

$$\sum_{i=1}^{n} \int_0^l u_i dx = 1.$$

Consider the problem of existence and stability of nontrivial solution for the corresponding steady state problem

$$u_i(k_i u_i - \overline{f}_1) + d_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} = 0,\ \ \frac{\partial u_i}{\partial x}(0) = \frac{\partial u_i}{\partial x}(l) = 0,\ \ i = 1, 2, ..., n;$$

$$u_i(k_i u_{i-1} - \overline{f}_2) + d_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} = 0,\ \ \frac{\partial u_i}{\partial x}(0) = \frac{\partial u_i}{\partial x}(l) = 0,\ \ i = 1, 2, ..., n;$$

$$u_0 = u_n.$$

Theorem. If the following inequality takes place

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d_1}{k_i} < \frac{\lambda}{\pi^2}, \quad 0 < \lambda < 1,$$

then in the Sobolev space H_1 there exist the nontrivial stable solutions of steady state problems. For sufficiently small λ these solutions are cycles of arbitrarily large length.

The results of numerical solution of steady state problem and the initial boundary value problem with the help of Galerkin method are presented.

References

[1] M. Eigen, P. Shuster. The Hypercycle: The principal of natural selforganization. Berlin-Heidelberg. Springer, 1979.

[2] J. Hoffbauer, K. Sigmund. The theory of evolution and dynamical system. Cambridge University Press, 1988.

ALEXANDER LYAPUNOV AND HIS ROLE IN ST.- PETERSBURG SCIENTIFIC SCHOOL OF MATHEMATICS AND MECHANICS IN THE 19TH-20TH CENTURIES

Lopatukhin A.L.*, Lopatukhina I.E., Polyakhov N.N.***, Polyakhova E.N.****

**Transtech Company Ltd,*
***Saint-Petersburg State University, Russia,*
****Saint-Petersburg State Polytechical University, Russia*

The widely known scientific legacy of Russian scientists of the 18th – 19th centuries shows several scientific schools in Mathematics, Classical and Applied Mechanics, Celestials Mechanics and Astronomy. Main Schools are listed as follows.

School of Leonard Euler (1707 – 1783): Euler himself, his colleagues, disciples and followers, e.g, Simeon Kotelnikov (1723 – 1813), Mathematics, Mechanics; S. Rumovsky (1731 – 1812), Astronomy; A. Lexell (1741 – 1784), Celestials Mechanics and Astronomy; W. Krafft - son (1743 –1814), Mathematics, Physics; N. Fuss (1755 – 1826) Mathematics; M. Golovin (1756 – 1790), Applied Mathematics, Mechanics; F. Schubert (1758 – 1825), Mathematics, Celestials Mechanics and Astronomy; S. Gur'ev (1766 – 1813), Mathematics, Mechanics.

School of Michael Vasilievich Ostrogradsky (1801 – 1862) Pure and Applied Mathematics, Analytical and Celestial Mechanics, Mathematical Physics. In the field of applied science development, two main engineering branches can be listed as follows. The branch of Ballistics and Artillery: N. V. Mayevsky (1823 – 1892), A. V. Gadolin (1829 – 1892), I. A. Vyshnegradsky (1831 – 1895), D. K. Bobylev (1842 – 1917). The branch of Railway Engineering: D. V. Yurovsky (1821 – 1891), G. E. Pauker (1822 – 1889), N. P. Petrov (1836 – 1920).

School of O. I. Somov and D.K. Bobylev in Applied Mechanics and Mathematical Physics: O. I. Somov (1815 – 1876),V. V. Imshenetsky (1832 – 1892), D. K. Bobylev (1842 – 1917), P. O. Somov-son (1852 – 1919).

School of P. L. Tchebyshev (1821 - 1894) in Pure and Applied Mathematics, and Mechanics: A. N. Korkin (1837 – 1908), K. A. Rosse (1847 – 1928), Ye. I. Zolotarev (1847 – 1878), S. V. Kovalevskaya (1850 – 1891), A. A. Markov (1856 – 1922), A. M. Lyapunov (1857 – 1918), G. K. Suslov (1857 – 1934), I. V. Mestchersky (1859 – 1935), A. N. Krylov (1863 – 1945), V. A. Steklov (1864 – 1936).

It is known that P. L. Tchebyshev's lectures in St-Petersburg University influenced on young student A. Lyapunov in the 1870s. In 1880 Lyapunov came from University, in 1882 he asked P. L. Tchebyshev suggestion about possible topic of Master Dissertation. Tchebyshev proposed him the equilibrium figures of rotating fluid masses in Newton's gravitational field and their stability problem. Tchebyshev himself felt interested in this problem but he had no time to solve it. Originally he proposed this problem for solution to S. Kovalevskaya and Ye. Zolotarev but A. Lyapunov was the single person who agreed to investigate the so-called Tchebyshev's problem. The problem can be formulated as follows: to find new non-ellipsoidal configurations of a rotating fluid mass close to classical ellipsoidal solutions of Colin Machaurin (1698 – 1746) and Carl Yacobi (1804 – 1851).

A. Lyapunov dealt with this problem in St.-Petersburg till 1885 and later after 1902 when he returned from Kharkov. He found new kinds of equilibrium figures (among them the "pear-form" figure) and investigated stability of these. His main result was obtained in 1905, however, it was published firstly in 1912. During his work, Lyapunov frequently discussed this problem with Henry Poincare (1854-1912) and George Darwin (1845 - 1912). They both considered the "pear-form" figure as a stable one but A. Lyapunov proved by applying the mathematical methods, non-stability of this figure.

BIFURCATIONS OF EQUILIBRIA IN POTENTIAL SYSTEMS AT BIMODAL CRITICAL POINTS

Mailybaev A.A., Seyranian A.P.

Institute of Mechanics, Moscow State Lomonosov University, Russia

Bifurcations of equilibria in general potential systems having arbitrary degrees of freedom at bimodal branching points are investigated. General formulae describing postbuckling paths and conditions for their stability are derived in terms of the original potential energy. A full list of possible cases for postbuckling paths and their stability depending on three system coefficients is presented. In order to calculate these coefficients the derivatives of the potential energy and eigenvectors of the linearized problem taken at the bifurcation point are needed. Formulae describing unfolding of bimodal branching points due to change of system parameters are derived. The presented theory is illustrated by a mechanical example on stability and postbuckling behavior of an articulated elastic column having four degrees of freedom and depending on three problem parameters. For some of the bimodal critical points numerical results are obtained illustrating influence of problem parameters on postbuckling paths, their stability and unfolding. A surprising phenomenon that a symmetric bimodal column loaded by an axial force can buckle with a stable asymmetric mode is recognized.

SINGULARLY PERTURBED STATE-DEPENDENT DELAY EQUATIONS: ASYMPTOTICS AND STABILITY

Mallet-Paret J.

Division of Applied Mathematics Brown University Providence, RI 02912

We discuss recent results on differential-delay equations of the form

$$\varepsilon \dot{x}(t) = f(x(t), x(t-r)).$$

We focus on the case in which the delay $r \geq 0$ is of state-dependent type $r = r(x(t))$. After determining the limiting shape of solutions for small ε, we study the detailed asymptotics of these solutions. Such an analysis is important in obtaining stability results, as well as for results for problems with multiple delays. Techniques and ideas employing degree theory, max-plus operators, a priori estimates, and geometric singular perturbations are used in our analysis.

Intriguing numerical results suggest a very rich structure, particularly in the case of multiple delay problems. Although the theory here is in its infancy, some new techniques seem very promising.

SYMMETRIES AND CONSERVED QUANTITIES OF BIRKHOFFIAN SYSTEM

Mei Fengxiang, Shang Mei, He Ming

Faculty of Science, Beijing Institute of Technology, China

In 1927 Birkhoff GD given a new integral variational principle and a new type of the equations of motion in his work "Dynamical Systems". In 1978, Santilli R M presented "Birkhoffian mechanics". Therefore, the Birkhoffian mechanics is a new development in classical mechanics. The symmetry theory is a modern method to find the conserved quantity of mechanical systems. This paper presents four symmetries and four conserved quantities of Birkhoffian system. Firstly, the Noether symmetry is an invariance of the Pfaff-Birkhoff action under the infinitesimal transformations of time and the coordinates. A Noether symmetry of the system can be lead to a Noether conserved quantity. Secondly, the Lie symmetry is an invariance of the differential equations under the infinitesimal transformations. A Lie symmetry of the system can be lead to a Hojman type conserved quantity under certain conditions. Thirdly, the form invariance is an invariance under which the transformed dynamical functions satisfy still the original equations of motion. A form invariance of the system can be lead to a new type conserved quantity under certain conditions. Finally, the Birkhoff symmetry is an invariance under which two groups dynamical functions correspond to same Birkhoff's equations. A Birkhoff symmetry can be lead to a new type conserved quantity.

CONSTRUCTION OF LIAPUNOV FUNCTION WITH MINIMAL NUMBER OF CRITICAL POINTS

Pochinka O.V.

Nizhny Novgorod State University, Russia

We consider the class of Morse-Smale diffeomorphisms of sphere S^3, whose nonwandering set consists of four fixed points: one source, one saddle and two sinks. Diffeomorphisms with such nonwandering set exist on sphere S^n of any dimension $n \geq 2$. According to [1] all of them are topologically conjugated for $n \neq 3$. According to [2] there are countable set of non topologically conjugated diffeomorphism for $n = 3$ (see also [3] for generalization). It can be explained by an opportunity of non trivial (wild) embedding of separatrices of saddle in ambient manifold. It follows from D. Pixton [4] that in this case any Liapunov function of diffeomorphism f has at least one critical point different from periodic point.

In our report for any diffeomorphisms from class under consideration we construct Liapunov function with minimal number of critical points.

Our results was obtained with partial financial support of grant $05-01-00501$ of RFBR, grant of the President of RF supporting leading scientific school 9686.2006.1.

References

[1] V. Grines, V. Medvedev, E. Zhuzhoma. On Morse-Smale diffeomorphisms with four periodic points on closed orientable manifolds. Mat. Zametki 74 (2003), no. 3, 369–386. translation in Math. Notes 74 (2003), no. 3, 352–366.
[2] Bonatti Ch., Grines V.Z. Knots as topological invariant for gradient-like diffeomorphisms of the sphere S^3. Journ. Dyn. and Control Syst.– 2000. N6. p. 579-602.
[3] Bonatti Ch., Grines V., Pochinka O. Classification of Morse-Smale diffeomorphisms with finite number heteroclinic orbits on 3-manifolds. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics.– 2005. V 250. p. 5-53.
[4] Pixton D. Wild unstable manifolds. Topology. 1977. V. 16, No 2, 167-172.

AROUND SOME RESEARCH AND RESULTS OF A.M. LIAPUNOV ON SYSTEMS WITH PERIODIC COEFFICIENTS — DISCRETE TIME COUNTERPART

Rasvan V.

Department of Automatic Control, University of Craiova, Romania

The present paper contains results on two basic directions. The first one deals with the Euler discretized version of a general Hamiltonian system with complex periodic coefficients

$$\begin{aligned} y_{k+1} - y_k &= \lambda(B_k y_k + D_k z_{k+1}) \\ z_{k+1} - z_k &= -\lambda(A_k y_k + B_k^* z_{k+1}) \end{aligned}$$

with A_k, D_k being Hermitian and all matrices defining N-periodic sequences. The strong stability results obtained for Hamiltonian systems of positive type allow, among other, to obtain the discrete time counterpart of the Liapunov criterion for the second order difference equation

$$y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1} + \lambda^2 p_k y_k = 0$$

with $p_k \equiv p_{k+N} \geq 0$, $\sum\limits_{0}^{N-1} p_k > 0$ criterion which reads

$$\lambda^2 < \frac{4}{N} \left(\sum_{0}^{N-1} p_k \right)^{-1}$$

and ensures total stability.

The next direction is concerned with a model of the parametric excitation in discrete time. If the basic system is

$$y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1} + P_0 y_k = 0, \quad P_0 > 0,$$

the system under parametric excitation is

$$y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1} + P_k(\varepsilon) y_k = 0$$

where $P_k(\varepsilon)$ is N-periodic and such that

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{0}^{N-1} |P_k(\varepsilon) - P_0| = 0$$

For this problem there are given two ways of defining and computing critical frequencies of the parametric resonance.

CONSERVED QUANTITIES AND ONE-STEP CORRECTIONS METHOD FOR DYNAMICAL SYSTEM

Shang Mei*, Chen Xiangwei and Mei Fengxiang***

**Faculty of Science, Beijing Institute of Technology, China*
***Department of Physics, Shangqiu Teachers College, China*

It is known that not all integrations can be carried out analytically, and numerical methods become the only way to solve the problem. Dynamical systems are usually represented as a set of first-order equations. Various computational methods, such as Euler's method, Runge-Kutta method and many other integration algorithms, can be used to accomplish the numerical integration of ordinary differential equations. In this paper, a one-step method for conservative quantities is introduced. The computational method is taking conservative quantities of dynamical systems as checks on accuracy at end of each time step. The method generalizes the previous work and one example is analyzed to illustrate the method.

LYAPOUNOV-SCHMIDT METHODS IN BIFURCATION THEORY AND SOME APPLICATIONS

Trenogin V.A., Sidorov N.A. and Loginov B.V.

Moscow State Institute of Steel and Alloys, Russia
Irkutsk State University, IDSTU Sb.RAN, Russia
Ulyanovsk State Technical University, Russia

Creation and investigation of nonlinear parameter dependent functional equations in mathematical models has various applications to scientific computing in many areas of mathematical simulation. Contemporary branching (bifurcation) theory is one of the most important aspects in applied mathematics intensively developing in last fifty years. The goals of this theory are the qualitative theory of dynamical systems, analytical and numerical computation of their solutions under absence of conditions guaranteeing the uniqueness of the solution.

Applications sphere of bifurcation theory and Lyapounov-Schmidt method is permanent extending. Besides their traditional applications in elasticity theory and hydrodynamics bifurcation theory methods turn out to be successful in the investigation of specific nonlinear problems of phase transitions and plasma physics, mathematical biology, filtration theory, non-Newtonian fluids movement theory.

In recent years the Lyapounov-Schmidt method has been applied in combination with representation and group analysis theories, finite-dimensional topological and variational methods, perturbation methods as well as the regularization theory. Such combined methods approaches have given the possibility to prove the most general existence theorems of bifurcating solutions, to make their algorithmic and qualitative analysis, to develop asymptotical and iterative methods.

This report presents some last results in the above mentioned areas obtained during the recent fifteen years. They contain the corresponding general theories of operator and differential-operator equations in Banach spaces illustrating by various applications both to boundary value problems for partial differential equations, integral and integrodifferential equations and their examples in natural-scientific disciplines (hydrodynamics, phase transitions theory, reaction-diffusion equations, plasma theory etc).

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ

Андреев А.С.

Ульяновский государственный университет, Россия

Рассматривается функционально-дифференциальное уравнение запаздывающего типа

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t), \qquad f(t, 0) \equiv 0, \tag{1}$$

где $t \in R$, $x \in R^n$, $f : R \times \Gamma \to R^n$, $\Gamma \subset C$, C – банахово пространство непрерывных функций $\varphi : [-h, 0] \to R^n$ $(h > 0)$.

Предполагается, что переменная x разделяется $x = (y, z)$, $y \in R^m$ $(1 \leq m < n)$ с нормой $|y|$, $z \in R^{n-m}$ с нормой $|z|$, $|x| = \sup(|y|, |z|)$. Соответственно, $\varphi = (\psi, \theta)$, $\|\psi\| = \sup(|\psi(s)|, -h \leq s \leq 0)$, $\|\theta\| = \sup(|\theta(s)|, -h \leq s \leq 0)$, $\|\varphi\| = \sup(\|\psi\|, \|\theta\|)$.

Исследуется задача об устойчивости нулевого решения уравнения (1) по части переменных в соответствии со следующим определением.

Определение. Решение $x = 0$ устойчиво по y, если $(\forall \alpha \in R^+)$ $(\forall \varepsilon > 0)$ $(\exists \delta = \delta(\varepsilon, \alpha) > 0)$ $(\forall \varphi : \|\varphi\| < \delta)$ $(\forall t \geq \alpha)$ $|y(t, \alpha, \varphi)| < \varepsilon$.

В докладе излагается применение метода функционалов и функций Ляпунова в решении поставленной задачи [1]. При этом дается достаточно полное обоснование развития классических теорем, доказанных для задачи полной устойчивости ФДУ и задачи об устойчивости относительно части переменных для ФДУ. А также проводится развитие новых методов исследования устойчивости ФДУ применительно к данной задаче.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №05-01-00765) и в рамках программы "Государственная поддержка ведущих научных школ" (НШ-6667.2006.1).

Литература

[1] Андреев А.С. Устойчивость неавтономных функционально-дифференциальных уравнений. Ульяновск: Изд-во УлГУ, 2005. 328 с.

On Stability Problem for Functional-Differential Equation with Respect to Part of Variables

Andreev A.S.

Ulianovsk state university, Russia

In the report the stability problem for functional-differential equations is considered. The problem is solved by constructing the Liapunov functions and functionals and by use of limiting equations method. New results on asymptotic stability with respect to part of variables are obtained.

К ПРОБЛЕМЕ ОПТИМИЗАЦИИ АЛГОРИТМА ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ПРЯМОГО МЕТОДА ЛЯПУНОВА ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ДИНАМИКИ ИНТЕРВАЛЬНО-НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ

Антоновская О.Г., Горюнов В.И.

ГНУ "НИИ прикладной математики и кибернетики ННГУ Н. Новгород, Россия

Известно, что применение аппарата функций Ляпунова (ФЛ) является плодотворным при различных формулировках алгоритма учета интервальной неопределенности динамической системы [1]. В частности, речь может идти о конструктивной методике применения квадратичных ФЛ для оценивания областей притяжения, позволяющей единообразно учитывать исходную по постановке задачи интервальную неопределенность, а также погрешность нахождения решений дифференциальных уравнений (функций последования точечных отображений) [2, 3], в основе которой лежит процедура оценки минимально допустимой величины первой производной (первой разности) ФЛ на ее сечениях [4].

Для реализации алгоритма оптимизации по методу ФЛ целесообразно использовать доказательство того, что для системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами a_{ij} $(i, j = 1, \ldots, n)$ и корнями $\lambda_1, \ldots, \lambda_i$ соответствующего характеристического уравнения и положительно определенной квадратичной формы $V(x_1, \ldots, x_n)$ максимальное значение первой производной на сечении $V = V_0$ не может быть меньше $2\max_{i=l,n}\{Re\lambda_i\}V_0$ [4]. В случае дискретных динамических систем с оператором в форме точечного отображения с корнями $z_1, \ldots, z_n$ соответствующего характеристического уравнения и положительно определенной квадратичной формы $V(x_1, \ldots, x_n)$ максимальное значение первой разности на сечении $V = V_0$ не может быть меньше $\max_{i=l,n}\{|z_i|^2 - 1\}V_0$ [4].

Отметим, что полученные результаты относительно первой производной (разности) ФЛ позволяют решать задачу построения квадратичной ФЛ, гарантирующей максимальную знакоотрицательную величину первой производной (разности) ФЛ на любом ее сечении как задачу нахождения ее коэффициентов из уравнений, определяющих максимальное значение первой производной (разности) ФЛ.

Литература

[1] О.Г. Антоновская, В.И. Горюнов. К оптимизации алгоритма использования прямого метода Ляпунова при исследовании процессов в интервально-неопределенных системах // VIII Международный семинар "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления": Тезисы докладов. М., 2004. С. 12–13.

[2] О.Г. Антоновская, В.И. Горюнов. Прямой метод Ляпунова и проблема анализа на ЭВМ динамики интервально - неопределенных систем. // V Международный семинар "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления". Тезисы докладов. Москва, 1998. С. 56.

[3] О.Г. Антоновская, В.И. Горюнов. Методы анализа динамики интервально-неопределенных систем и проблема оценки достоверности результатов исследования квазилинейных систем асимптотическими методами // VII Международный семинар "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления": Тезисы докладов / М., 2002. С. 61–62.

[4] О.Г. Антоновская. Построение квадратичных функций Ляпунова, удовлетворяющих заданным ограничениям, для непрерывных и дискретных динамических систем // Изв. вузов: Математика. № 2(501). 2004. С. 19–23.

On the Problem of Algorithm Optimization for Direct Lyapunov Method Use while Interval-indefinite Systems Dynamics Study

Antonovskaya O.G., Goryunov V.I.

Research Institute for Applied Mathematics and Cybernetics of NNSU, N. Novgorod, Russia

The way of quadratic Lyapunov function construction, which guarantees maximal negative value of first derivative (first difference) over each its section, is proposed. The way of such functions use for the problem of attraction region evaluation is discussed.

НОРМАЛИЗАЦИЯ СИСТЕМ С НЕВОЗМУЩЕННОЙ ЧАСТЬЮ $(\alpha x_1^2 + x_1x_2,\ x_1x_2)$

Басов В.В.

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

Рассмотрим двумерную автономную систему с параметром α

$$\dot x_1 = \alpha x_1^2 + x_1x_2 + X_1(x_1,x_2), \quad \dot x_2 = x_1x_2 + X_2(x_1,x_2) \quad (0 < |\alpha| \le 1), \tag{1}$$

где $X_i(x_1,x_2)$ — формальные ряды, начинающиеся с третьего порядка, а невозмущенная часть $(\alpha,1,0)(0,1,0)$ — одна из семнадцати канонических форм, к которым линейной неособой заменой сводится произвольное квадратичное приближение $(a_1,b_1,c_1)(a_2,b_2,c_2)$ исходной системы (см. [1]).

Пусть замена $x_i = y_i + h_i(y_1,y_2)$, в которой $h_i = \sum_{q_1+q_2=2}^{\infty} h_i^{(q_1,q_2)} y_1^{q_1} y_2^{q_2}$, преобразует систему (1) в систему

$$\dot y_1 = \alpha y_1^2 + y_1y_2 + Y_1(y_1,y_2), \quad \dot y_2 = y_1y_2 + Y_2(y_1,y_2), \tag{2}$$

где $Y_i = \sum_{p=2}^{\infty} Y_i^{(p+1)}(y_1,y_2)$, $Y_i^{(p+1)} = \sum_{j=0}^{p+1} Y_i^{(j,\,p+1-j)} y_1^j y_2^{p+1-j}$ $(i=1,2)$.

Теорема 1. *Система (2) формально эквивалентна системе (1), если $\forall\ p \ge 2$ коэффициенты $Y_i^{(p+1)}$ удовлетворяют резонансным уравнениям*

$$Y_1^{(0,p+1)} - Y_2^{(0,p+1)} = \widetilde c, \qquad \sum\nolimits_{i=1}^{2} \sum\nolimits_{j=0}^{p+1} v_{i0}^{pj}(\alpha) Y_i^{(j,\,p+1-j)} = \widetilde c, \tag{3}$$

и, если $\alpha = -k/l$, $p = (k+l)n + 2$ $(k,l,n \in \mathbb{N},\ k \le l)$, то уравнению

$$\sum\nolimits_{j=ln+3}^{p+1} \left(v_{11}^{pj}(\alpha) Y_1^{(j,\,p+1-j)} + v_{21}^{pj}(\alpha) Y_2^{(j,\,p+1-j)} \right) = \widetilde c, \tag{4}$$

где $\widetilde c$ – известные константы, а для всех множителей $v(\alpha)$ получены прямые или рекуррентные формулы и установлено, когда $v_{i\nu}^{pj}(\alpha) = 0$.

Положим $n_p^\alpha = \begin{cases} 3, & \text{если } p = 2 \text{ или } \alpha = -k/l,\ p = (k+l)n+2; \\ 2 & - \text{ в противном случае.} \end{cases}$

Теорема 2. *Система (1) формально эквивалентна обобщенной нормальной форме (2), в которой $\forall\ p \ge 2$ равны нулю все коэффициенты форм $Y_i^{(p+1)}$, за исключением любого набора из n_p^α коэффициентов, относительно которых однозначно разрешимы резонансные уравнения (3) при $n_p^\alpha = 2$ или уравнения (3), (4) при $n_p^\alpha = 3$.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 05–01–01060.

Литература

[1] Басов В. В., Скитович А. В. Обобщенная нормальная форма и формальная эквивалентность двумерных систем с нулевыми квадратичным приближением, I // Дифференц. уравнения, 2003, т. 39, N 8, с. 1016–1029.

Normalization of a System Whose Unperturbed Part is $(\alpha x_1^2 + x_1x_2,\ x_1x_2)$

Basov V.V.

Saint Petersburg State University, Russia

Formal almost identical transformations of two-dimensional systems of differential equations whose unperturbed part is $(\alpha x_1^2 + x_1x_2,\ x_1x_2)$ and perturbations are of order 3, are investigated. "Resonance equations" for such systems are given. With help of them, some criteria of formal equivalence of systems and all structures of generalized normal forms, are presented.

ИНВАРИАНТНЫЕ ТОРЫ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ С КОНСЕРВАТИВНОЙ КУБИЧЕСКОЙ НЕВОЗМУЩЕННОЙ ЧАСТЬЮ

Бибиков Ю.Н., Басов В.В.

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

В работе 1893 года "Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения" А. М. Ляпунов исследовал, в частности, вопрос об устойчивости нулевого решения дифференциального уравнения

$$\ddot{x} + x^3 = f(x, \dot{x}), \qquad f = O(x^4 + \dot{x}^2 + x^2\dot{x}). \tag{1}$$

Методами, им предложенными, можно исследовать и вопрос о бифуркации рождения предельного цикла, если возмущение f зависит от малого параметра $\varepsilon > 0$. Особенностью уравнения (1) является то, что частота невозмущенных колебаний есть бесконечно малая функция их амплитуды.

В докладе рассматриваются периодические или квазипериодические по времени возмущения двух типов: диссипативные, а также консервативные или обратимые. Первым соответствуют алгебраические по терминологии А. М. Ляпунова критические случаи, последним – трансцендентные. Указанные возмущения воздействуют на осциллятор $\ddot{x}+x^3+2ax^2\varepsilon+bx\varepsilon^2 = 0$ или консервативные системы $\varepsilon^{-\nu}\dot{x}_1 = b_2x_2^3-a_2x_2$, $\varepsilon^{-\nu}\dot{x}_2 = a_1x_1 - b_1x_1^3$ $(a_i, b_i > 0)$ с $\nu = 0, 1$. При этом обе невозмущенные системы являются качественно новыми по сравнению с осцилляторами объектами изучения, так как имеют 9 точек покоя, 6 из которых не лежат на оси абсцисс.

Целью работы является исследование устойчивости нулевого решения и бифуркации рождения инвариантных торов – носителей многочастотных колебаний. Системы с диссипативными возмущениями исследуются модифицированными методами теории Н.М. Крылова – Н.Н. Боголюбова, с консервативными и обратимыми – методами КАМ-теории.

Основное внимание уделяется построению в явном виде и исследованию бифуркационных уравнений, допустимые решения которых, фактически, задают местоположение и размеры инвариантных торов. Для получения бифуркационных уравнений вводятся специальные несимметричные и ненормированные полярные координаты, являющиеся существенным обобщением обобщенных косинусов и синусов Ляпунова.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 05–01–01060.

Invariant Tori of Periodic Systems with Cubic Unperturbed Parts

Bibikov Y.N., Basov V.V.

Saint Petersburg State University, Russia

Investigations by A. M. Liapunov of autonomous perturbations of non-linear centers are continued and generalized to cases of periodic and quasiperiodic perturbations.

ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Бобцов А.А., Быстров С.В., Григорьев В.В., Мотылькова М.М.

Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий механики и оптики, Россия

Возросшие требования к улучшению качественных характеристик систем автоматического управления приводят разработчиков к необходимости более точного описания исходного объекта, а также самой системы автоматического управления. При этом разработчики часто сталкиваются с ситуацией, что рассматриваемая система является нестационарной. Существующий математический аппарат для исследования нестационарных систем в ряде случаев не достаточен для решения практических задач.

К примеру, с увеличением требований к точности измерения угловых координат движущихся объектов в импульсной локации возникает проблема обеспечения высокого качества процессов в следящих угломерных системах. В режиме захвата следящая система по углам места и азимута должна обеспечить заданное время переходного процесса с минимальным перерегулированием, а в режиме сопровождения цели — надёжное, без срывов, слежение с минимальными ошибками. Одним из направлений обеспечения высокого качества в следящих локаторах с коническим сканированием является учёт процессов, происходящих внутри посылок облучающих импульсов, что особенно актуально для систем с редкими посылками за период сканирования. Математическая модель угломерной системы в этом случае сводится к системе разностных матричных уравнений с периодически изменяющимися коэффициентами.

Целью работы является модификация процедур анализа и синтеза, используемых при исследовании дискретных линейных стационарных систем, для их последующего использования в процедурах анализа и синтеза линейных нестационарных дискретных систем с периодически изменяющимися коэффициентами. Получение достаточных условий экспоненциальной устойчивости для дискретных систем с периодически изменяющимися коэффициентами.

Предлагается метод анализа качества процессов в дискретных системах с периодически изменяющимися коэффициентами на основе модификации метода выделения переходной и установившейся составляющих процессов. Получены достаточные интегральные условия экспоненциальной устойчивости дискретных систем с периодически изменяющимися коэффициентами через интервал периодичности.

Предложен модифицированный метод модального управления для синтеза регуляторов дискретных систем с периодически изменяющимися коэффициентами. На основе предложенных модификаций методов синтеза получены алгоритмы синтеза регуляторов для дискретных систем с периодически изменяющимися коэффициентами. Также было получено модифицированное уравнение типа Ляпунова, как критерий экспоненциальной устойчивости дискретных систем с периодически изменяющимися коэффициентами. Разработана модификация метода модального управления для синтеза регуляторов дискретных систем с периодически изменяющимися коэффициентами.

Значение полученных результатов для теории заключается в развитии методов анализа и синтеза линейных стационарных дискретных систем для исследования линейных нестационарных дискретных систем с периодически изменяющимися коэффициентами. Значение полученных результатов для практики заключается в разработке алгоритмического и программного обеспечения для синтеза регуляторов дискретных систем с периодически изменяющимися коэффициентами, а также в разработке технологии проектирования регуляторов для следящей локационной станции со сканированием.

Construction of Lyapunov Functions for Research of Discrete Systems with Periodic Factors

Bobtsov A.A., Bystrov S.V., Grigorev V.V., Motylkova M.M.

The St.-Petersburg State University of Information Technologies of Mechanics and Optics, Russia

The increased requirements to improvement of qualitative characteristics of systems of automatic control lead developers to necessity of more exact description of initial object, and also the system of automatic control. Thus developers often collide with a situation, that the considered system is time-varying. The existing mathematical device for research of time-varying systems in some cases is not sufficient for the decision of practical problems.

For example, with increase in requirements to accuracy of measurement of angular coordinates of moving objects in a pulse location there is a problem of maintenance of high quality of processes in systems of goniometric tracking. In a mode of capture the tracking system on corners of a place and an azimuth should provide set time of transient with minimal overshoot, and in a mode of support of the purpose — reliable, without failures, tracking with the minimal mistakes. One of directions of maintenance of high quality in tracking locators with conic scanning is the account of the processes occurring inside parcels of irradiating impulses that is especially actual for systems with rare parcels for the period of scanning. The mathematical model of goniometric system in this case is reduced to system difference matrix equations with periodically changing factors.

The purpose of work is updating of procedures of the analysis and the synthesis used at research of discrete linear stationary systems, for their subsequent use in procedures of the analysis and synthesis of linear time-varying discrete systems with periodically changing factors. Reception of sufficient conditions exponential stability for discrete systems with periodically changing factors.

РАЗВИТИЕ ПРЯМОГО МЕТОДА ЛЯПУНОВА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕАВТОНОМНЫХ ДИСКРЕТНЫХ УРАВНЕНИЙ С БЕСКОНЕЧНЫМ ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Богданов А.Ю.

Ульяновский государственный университет, Россия

Во многих прикладных задачах, при моделировании процессов дискретно-временными системами, возникает необходимость учета зависимости текущего состояния не стандартно от фиксированного числа предшествующих состояний, а от всей предыстории. Необходимо отметить существенную разницу между дискретным уравнением с бесконечным последействием и дискретным уравнением с фиксированным конечным запаздыванием. Последнее всегда может быть сведено к системе одношаговых дискретных процессов фиксированной размерности, что позволяет сформулировать общие теоремы в терминах существования функций Ляпунова и получить конкретные условия устойчивости. Невозможность такой редукции для дискретных уравнений Вольтерра и более сложных уравнений приводит в данном исследовании к формулировкам общих теорем об устойчивости в терминах существования подходящих функционалов, определенных на решениях рассматриваемых уравнений и зависящих от всей предыстории (подход Н.Н. Красовского,1956), или функции Ляпунова V и вспомогательного функционала W (подход Б.С. Разумихина, 1956).

Пусть $B-$ действительное векторное пространство дискретных функций $\{\varphi\}$, отображающих $\mathbb{Z}^-$ в $\mathbb{R}^m$. Пусть в B определена норма $\|\cdot\|_B$ такая, что линейное нормированное пространство $(B, \|\cdot\|_B)$ является полным пространством "с исчезающей памятью". Для дискретной функции $x : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^m$, определим функцию $x_n : \mathbb{Z}^- \to \mathbb{R}^m$ для произвольного фиксированного $n \in \mathbb{Z}$ по формуле $x_n(k) = x(n+k), k \leq 0$. Рассмотрим систему нелинейных неавтономных уравнений с бесконечным запаздыванием

$$x(n+1) = f(n, x_n), \quad f(n, 0) \equiv 0, \tag{1}$$

где $f(n,\varphi) : \mathbb{Z}^+ \times B_H \to \mathbb{R}^m$ есть непрерывное по φ при каждом $n \in \mathbb{Z}^+$ отображение, ограниченное на $\mathbb{Z}^+ \times D$, где $D = \overline{B}_h$, $|f(n,\varphi)| \leq m(h)$ для всех $(n,\varphi) \in \mathbb{Z}^+ \times \overline{B}_h, 0 < h < H$. Предположим также, что $f(n, x_n)$ удовлетворяет условиям предкомпактности.

На основе подходов Разумихина и Красовского, привлекая метод предельных уравнений, получен ряд теорем об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения уравнения (1), при этом допускается использование знакоположительных функционалов Ляпунова, чья первая разность в силу (1) лишь знакоотрицательна. Заметим, что метод функционалов Ляпунова-Красовского является в некотором смысле более естественным для уравнения (1), однако в приложениях он иногда оказывается необоснованно сложным по сравнению с методом Ляпунова-Разумихина. Многие из предложенных ранее в литературе способов представляют собой частные случаи изложенного здесь подхода, где предлагаются различные варианты конкретных функционалов W, зависящих от функции Ляпунова V, например, аналогичных функционалу $W = \max_{-h \leq k \leq 0} V(n+k, \varphi(k))$, используемому для уравнений с ограниченным запаздыванием, или вид W определяется выбором фазового пространства. Рассматривая пару: функция Ляпунова и функционал, мы для функции вычисляем первую разность в силу уравнения, а при построении W учитываем особенности фазового пространства. В этом смысле использование пары (V, W) является естественным обобщением метода функций Ляпунова на случай дискретных уравнений с бесконечным последействием.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 05-01-00765а.

The Extension of Direct Lyapunov Method for Nonlinear Nonautonomous Discrete Equations with Unbounded Aftereffect

Bogdanov A.Yu.

Ulyanovsk State University, Russia

Some new results on asymptotic stability and instability of zero solution are obtained for a wide class of nonlinear nonautonomous discrete equations with unbounded aftereffect. Author elaborates the theoretical part on the basis of Razumikhin and Krasovsky approaches using limiting equations techniques and "fading memory" spaces. The different types of asymptotic stability can be established by semidefinite Lyapunov functionals with semidefinite first difference. Several examples which illustrate the proven sufficient conditions of asymptotic stability are presented.

КОНВЕРГЕНТНОСТЬ И АБСОЛЮТНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ С МОНОТОННЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

Буркин И.М.

Тульский государственный университет, Россия

Рассмотрим нелинейную систему

$$\begin{aligned} &x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \Lambda + a_n(t)x = \varphi(t,\sigma), \\ &\sigma = c_1(t)x + c_2(t)x' + \Lambda + c_n(t)x^{(n-1)}. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $a_i(t)$ и $c_i(t)$ — ограниченные на $(-\infty,\infty)$ непрерывные функции, $\varphi(t,\sigma)$ — непрерывная по t и непрерывно дифференцируемая по σ функция, удовлетворяющая условиям

$$0 \le \frac{\partial\varphi(t,\sigma)}{\partial\sigma} \le \gamma, \quad \sigma\in(-\infty,\infty), \quad \gamma>0. \tag{2}$$

Пусть λ_1, Λ, λ_{n-1} — некоторые числа, $p(t,\lambda) = \lambda^n + a_1(t)\lambda^{n-1} + \Lambda + a_n(t)$. Введем обозначения: $\Delta_0(t,\lambda_1) = p(t,\lambda_1)$, $\Delta_i(t,\lambda_1,K,\lambda_{i+1}) = [\Delta_{i-1}(t,\lambda_1,K,\lambda_i) - \Delta_{i-1}(t,\lambda_2,K,\lambda_{i+1})](\lambda_1-\lambda_{i+1})^{-1}$, $i=\overline{1,n-2}$, $p_1(\lambda)=1$, $p_k(\lambda) = \prod\limits_{j=1}^{j=k}(\lambda-\lambda_j) = \lambda^{k-1} + a_{k,k-1}\lambda^{k-2} + \Lambda + a_{k,1}$, $k=2,K\,n.$, $c(t) = col(c_1(t),K,c_n(t))$.

Построим $n\times n$-матрицу $W=(w_{ij})$, где $w_{ij}=0$ при $i<j$, $w_{ij}=1$ при $i=j$, $w_{ij}=a_{i,j}$ при $i>j$.

Теорема 1. Пусть выполнены условия: $\Delta_i(t,\lambda_1,K,\lambda_{i+1})<0$, $(i=\overline{0,n-2})$ при $t\in(-\infty,\infty)$, все компоненты вектора $(W^{-1})^T c(t)$ неотрицательны при $t\in(-\infty,\infty)$, $\varphi(t,0)\ne0$, $\inf\limits_{t\in(-\infty,\infty)} a_n(t)>0$, $\inf\limits_{t\in(-\infty,\infty)} a_n(t) - \gamma \sup\limits_{t\in(-\infty,\infty)} c_1(t) > 0$. Тогда система (1) имеет единственное ограниченное на $(-\infty,\infty)$ решение, которое экспоненциально устойчиво в целом. Если $\varphi(t,0)\equiv0$, то тривиальное решение системы (1) абсолютно устойчиво в классе нелинейностей (2).

Для системы

$$\frac{dx}{dt} = Ax + b\varphi(t,\sigma) + f(t), \quad \sigma = c^T x, \tag{3}$$

где $A-n\times n$ — постоянная матрица, b и $c-n$ — векторы, $\varphi(t,\sigma)$ — скалярная непрерывная по t и непрерывно дифференцируемая по σ функция, удовлетворяющая условиям (2), $f(t)$ — непрерывная вектор-функция, удовлетворяющая условию $\sup\limits_{t\in(-\infty,\infty)}|f(t)|<\infty$, получены следующие результаты.

Обозначим через $\chi(p) = c^T(A-pI)^{-1}b = m(p)[n(p)]^{-1}$, где p — комплексная переменная, передаточную функцию линейной части системы (3).

Теорема 2. Пусть все нули полинома $n(p)$ имеют отрицательные вещественные части и существует такое число $\lambda>0$, что: 1) один нуль полинома $n(p-\lambda)$ положителен, а остальные имеют отрицательные вещественные части; 2) при всех $\omega\ge0$ выполнены неравенства $\operatorname{Re}\chi(i\omega-\lambda)>0$, $\lim\limits_{\omega\to\infty}\omega^2\operatorname{Re}\chi(i\omega-\lambda)>0$; 3) $\lim\limits_{p\to\infty} p\chi(p) = -c^T b<0$; 4) $0\le\varphi(t,\sigma)\sigma$ при $\sigma\in(-\infty,\infty)$; $\gamma<-\chi(0)^{-1}$. Тогда система (3) является конвергентной.

Теорема 3. Пусть выполнены предположения 1)–3) теоремы 2, а условия (2) на нелинейность $\varphi(t,\sigma)$ заменены на следующие: $0\le\varphi(t,\sigma)\sigma\le(-\chi(0)^{-1}-\delta)\sigma^2$, $0\le\dfrac{\partial\varphi(t,\sigma)}{\partial\sigma}$ при $\sigma\in(-\infty,\infty)$, где $\delta>0$ любое сколь угодно малое число. Тогда система (3) с $f(t)\equiv0$ абсолютно устойчива в указанном классе нелинейностей.

Convergence and Absolute Stability of Systems with Monotonous Nonlinearities

Burkin I.M.

Tula State University, Russia

This paper examines the nonlinear control systems with stationary or time-dependent linear parts and monotonous nonlinearities. New criteria of convergence and absolute stability are obtained.

АВТОМАТИЧЕСКАЯ БАЛАНСИРОВКА НЕУРАВНОВЕШЕННОГО РОТОРА С УЧЕТОМ ГИРОСКОПИЧЕСКОГО ЭФФЕКТА

Быков В.Г.

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

Рассматривается статически неуравновешенный несимметричный ротор, оснащенный шариковым автобалансировочным механизмом. Построена математическая модель, учитывающая угловую прецессию ротора и связанный с этим гироскопический эффект. Получены аналитические формулы, выражающие условия существования и устойчивости сбалансированного и несбалансированного стационарных режимов движения ротора. С использованием критерия Михайлова построены двухпараметрические диаграммы устойчивости. Исследованы нестационарные режимы движения при переходе через критическую скорость, соответствующие вращению ротора с постоянным угловым ускорением и при заданном значении вращательного момента.

Automatic Balancing of the Imbalanced Rotor with the Gyroscopic Effect

Bykov V.G.

Saint-Petersburg State University, Russia

The static unbalanced nonsymmetric rotor equipped with the ball automatic balancing device is concerned. The equations of motion are derived with consider of the angle precession and gyroscopic effect. We obtained the conditions of existence and stability of stationary balanced and non-balanced modes. The two-parameter diagrams of stability are designed using Mikhajlov's criterion. The non-stationary response of the rotor passing through the critical speed with the constant angular acceleration and with the given torque are investigated.

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ТРИВИАЛЬНОГО СТАЦИОНАРНОГО СОСТОЯНИЯ ГИБРИДНОГО АВТОМАТА

Бычков А.С., Меркурьев М.Г.

Киевский национальный университет имени Т. Шевченко, Украина

Гибридной системой называется кортеж $H = (Q, X, F, Init, Inv, Jump)$, где $Q = \{1, \ldots, N\}$ — множество состояний, $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — множество непрерывных переменных, $F\colon Q \times R^n \to R^n$ — правая часть, $Inv \subseteq Q \times R^n$ — множество, на котором состояние не меняется, $Init \subseteq Inv$ — множество начальных условий, $Jump\colon Q \times R^n \to \beta(Q \times R^n)$ — условие смены состояния.

Устойчивость автономной гибридной системы с непрерывным циклическим переключением. Пусть $Jump(i, x) = \varnothing \vee \{(i \bmod N) + 1, x\}$. Пусть на $Inv_i = \{x\colon (i, x) \in Inv\}$, $i = \overline{1, N}$ заданы функции Ляпунова V_i. Строим такую последовательность для $i = \overline{0, N}$:

$$c^0 \in (0, C),\ c^1 = \sup_{\substack{x^1|_{1\to 2} \\ V^1(x^1)=c^0}} V^2(x^1),\ c^2 = \sup_{\substack{x^2|_{2\to 3} \\ V^2(x^2)=c^1}} V^3(x^2), \ldots,$$

$$c^N = \sup_{\substack{x^N|_{N\to 1} \\ V^N(x^N)=c^{N-1}}} V^1(x^N)$$

Теорема 1. Пусть гибридная система H имеет тривиальное стационарное состояние $x = 0$, и для неё $|Q| < \infty$, $Jump(i, x) = \varnothing \vee \{(i \bmod N) + 1, x\}$. Также пусть задана окрестность начала координат $D \subset X$. Если для H существует набор функций Ляпунова $V(i, x)\colon Q \times D \to R$ такой, что $\dfrac{dV^i(x)}{dx} f_i(x(t)) \le 0$ для всех $x \in D \cap Inv_i$, $i = \overline{1, N}$ и для любой последовательности $\{c^i\}$, $i = \overline{0, N}$, которая начинается с первого состояния, выполняется $c^N \le c^0$, то $x = 0$ — устойчивое тривиальное стационарное состояние гибридной системы H.

Рассмотрим устойчивость автономной гибридной системы с циклическим импульсным переключением. Пусть $Jump(i, x) = \varnothing \vee \{(i \bmod N) + 1, q(x)\}$ и на Inv_i, $i = \overline{1, N}$ заданы функции Ляпунова V_i. Строим такую последовательность для $i = \overline{0, N}$:

$$c^0 \in (0, C),\ c^1 = \sup_{\substack{x^{1-}\to x^{1+}|_{1\to 2} \\ V^1(x^1)\le c^0}} V^2(x^{1+}),\ c^2 = \sup_{\substack{x^{2-}\to x^{2+}|_{2\to 3} \\ V^2(x^{2-})\le c^1}} V^3(x^{2+}), \ldots,$$

$$c^N = \sup_{\substack{x^{N-}\to x^{N+}|_{N\to 1} \\ V^N(x^{N-})\le c^{N-1}}} V^1(x^{N+}).$$

Теорема 2. Пусть гибридная система H имеет тривиальное стационарное состояние $x = 0$, и для неё $|Q| < \infty$, $Jump(i, x) = \varnothing \vee \{(i \bmod N) + 1, q(x)\}$. Также пусть задана окрестность начала координат $D \subset X$. Если для H существует набор функций Ляпунова $V(i, x)\colon Q \times D \to R$ такой, что $\dfrac{dV^i(x)}{dx} f_i(x(t)) \le 0$ для всех $x \in D \cap Inv_i$, $i = \overline{1, N}$ для любой последовательности $\{c^i\}$, $i = \overline{0, N}$, которая начинается с любого состояния, выполняется $c^N \le c^0$, и существует функция $\psi(\cdot)\colon R^+ \to R^+$ такая, что $\psi(0) = 0$ и $\|q_i(z)\| < \psi(\|z\|)$ $\forall i \in Q$, то $x = 0$ — устойчивое тривиальное стационарное состояние гибридной системы H.

Эти условия отличаются от аналогов [1] тем, что не используются значения функций Ляпунова на траекториях.

Литература

[1] Branicky M., Stability of switched and hybrid systems // Proc. 33-rd Conf. Decision and Control, Lake Buena Vista, FL, Dec. 1994, p.3498-3503.

Some Sufficient Condition for Stability of Hybrid Automata Trivial Stationary State

Bychkov A.S., Mercuriev M.G.

Kiev National University named by T. Shevchenko, Ukraine

Stability of the stationary state of impulsive and continuous hybrid automata is investigated. The study is carried out by method of Lyapunov functions. The sufficient conditions of stability and instability are obtained. These conditions are easily calculated and are constructive by nature.

ПРОБЛЕМА ЛЯПУНОВА И СПЕКТР ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМ

Задорожный В.Ф.

Институт кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины

Прямой метод Ляпунова весьма эффективен при анализе и оптимальном синтезе динамических систем. Для конкретной задачи он может быть использован лишь тогда и только тогда, когда удаётся конструктивно построить (подобрать) функцию Ляпунова (фЛ). Способы построения фЛ, которые применялись для анализа сравнительно простых интуитивно понятных динамических систем (дс) не могут , вообще говоря, работать в условиях существенно нелинейных достаточно большой размерности дс. Проблема построения фЛ — *проблема Ляпунова* (В. М. Матросов 1975) актуальна и не только для старых физических моделей, но и для существенно новых, например, задачи плазмодинамики, транспорта потока заряженных частиц с ускорением и фокусировкой (В. Ф. Задорожный 2001) и т. д. Эта проблема есть чисто математическая и по мощности она подобна проблеме Гамильтона-Якоби.

Пусть дифференциальная система $x' = X(x)$, $X(0) = 0$ образует динамическую систему. Пусть $x = 0$ асимптотически устойчивое положение равновесия дс. В этом случае существует фЛ, удовлетворяющая теорему Ляпунова об асимптотической устойчивости (Н. Н. Красовский 1959). Используя этот факт, показано, что векторное поле X в области асимптотической устойчивости положения равновесия порождает интегральный оператор и имеет место теорема разложения Гильберта-Шмидта. Таким образом, спектр дс в области а.у. будет чисто дискретным и состоять только из собственных чисел.

Как оказывается дальше, этот оператор будет ядерным, что, преобразовано в конструктивный критерий а. у. дс.

Теорема. В области асимптотической устойчивости положения равновесия динамической системы её спектр лежит в левой полуплоскости.

Показано как строить функцию Ляпунова-Зубова.

On the Lyapunov Problem & the Spectrum of the Dynamical System

Zadorozhny V.F.

Glushkov Institute of Cybernetics, Kiev, Ukraine

The vector field X of dynamical system into the domain $\Omega(0)$ of attraction the steady state $x = 0$ generates a Hilbert-Schmidt operator R. If the steady state $x = 0$ is asymptotically stable then the spectrum $\sigma(R)$ such that $\mathrm{Re}\sigma(\mathrm{R}) \leq \alpha$, α is any positive number. This reasoning yields dissipative operators and theory Hille-Yosida in the Lyapunov problem.

РОБАСТНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Зубер И.Е., Гелиг А.Х.

НИИ математики и механики имени В.И. Смирнова Санкт-Петербургского государственного университета, Россия

Рассматривается два класса уравнений вида

$$\dot{x}(t) = A(\cdot)x(t) + b(\cdot)u, \tag{1}$$

где $(\cdot) = (t, x(t), x(t-\tau))$, $\tau > 0$, $A(\cdot) \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $b(\cdot) \in \mathbb{R}^{m\times 1}$, $u \in \mathbb{R}^1$, $A(\cdot)$ и $b(\cdot)$ — непрерывные функции, причем

$$\varkappa = \sup_{(\cdot)\in[t_0,+\infty)\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m} [\|A(\cdot)\| + \|b(\cdot)\|] < \infty.$$

В первом классе $A(\cdot)$ является матрицей Фробениуса с функциональной нижней строкой, а у вектора $b(\cdot)$ последний элемент превалирует над остальными:

$$|\beta_m(\cdot)| > \mu|\beta_1(\cdot)| + ... + \mu|\beta_{(m-1)}(\cdot)|.$$

Во втором классе $b(\cdot)$ является последним единичным ортом, а матрица $A(\cdot)$ имеет треугольную структуру: она получается из матрицы Фробениуса с функциональной нижней строкой в результате замены функциональными элементами нулей, стоящих на главной дигонали и ниже ее.

Требуется по заданным $\varkappa$ и $\beta > 0$ синтезировать управление u таким образом, чтобы состояние равновесия $x = 0$ было экспоненциально устойчиво в целом с декрементом затухания β. Эта задача решена с помощью функции Ляпунова вида

$$V(x) = x^* H^{-1} x,$$

где H является трехдиагональной симметричной положительной матрицей [1], коэффициенты $h_{i,j}$ которой имеют следующий вид $h_{i,i} = h_i > 0, h_{i,i+1} = -0,5\sqrt{h_i h_j}, h_{i,j} = 0$ при $j > i+1$, причем величины h_i зависят только от $\varkappa$ и β .

Аналогичная задача решается для импульсной системы, описываемой функционально-дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = A(\cdot)x + b(\cdot)\xi, \quad \xi = \mathcal{M}u, \tag{2}$$

где $\mathcal{M}$ — нелинейный оператор, описывающий импульсный модулятор. С помощью метода усреднения [2] получена нижняя оценка на частоту импульсации, при выполнении которой построенное для системы (1) управление u стабилизирует систему (2).

Работа осуществлена при поддержке РФФИ (проекты 05-01-00238, 05-01-00290).

Литература

[1] А.Х. Гелиг, И.Е. Зубер, А.Н. Чурилов. Устойчивость и стабилизация нелинейных систем. СПб: Изд-во СПбУ. 2006. 269с.

[2] A.Kh. Gelig, A.N. Churilov. Stability and Oscillations of Nonlinear Pulse-Modulated Systems. Birkhäuser. Boston.1998. 362p.

Robust Stabilization of Nonlinear Systems

Zuber I.E., Gelig A.Kh.

Institute of Mathematics and Mechanics, Saint Petersburg State University, Russia

Stabilizing control syntheses for continuous nonlinear system with delay is received by construction of Lyapunov function. By averaging method the same problem is solved for nonlinear pulse-modulated system with delay and sufficiently high frequency modulation.

ФУНКЦИИ ТИПА ЛЯПУНОВА ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Зубов С.В.

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

Понятие расчетной устойчивости и способы изучения его свойств при использовании прямого метода Ляпунова приведено в публикациях автора [1]. В данной работе для нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений доказывается существование функций типа Ляпунова, которые представляют собой сумму квадратичной формы фазовых переменных и некоторой явно выражаемой функции времени.

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = F(x,t),\ x = (x_1,\dots,x_n)^*, F(x,t) = (F_1(x,t),\dots,F_n(x,t))^*. \tag{1}$$

Здесь $*$ — знак транспонирования. Пусть $\|x\| = (x_1^2+\ldots+x_n^2)^{1/2}$. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что n-мерная векторная функция $F(x,t)$ задана в множестве $\Omega = \{(x,t)\colon \|x\| < R,\, t \geq 0\}$, где R — число, $0 < R < +\infty$.

Нас интересует поведение решений системы (1) в окрестности движения $x(t) \equiv 0$, которое может не быть вообще решением системы (1) (в случае, когда $F(0,t) \not\equiv 0$ при $t \geq 0$). Движение $x = 0$ называется расчетным движением системы (1).

Определение. Движение $x = 0$ системы (1) называется расчетно устойчивым, если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такие числа $T(\varepsilon) \geq 0$ и $\delta(\varepsilon) > 0$, что для любого значения $t_0 \geq T(\varepsilon)$ и любого n-мерного вектора x_0, удовлетворяющего условию $\|x_0\| < \delta(\varepsilon)$, при всех $t \geq t_0$ справедливо неравенство $\|x(t,t_0,x_0)\| < \varepsilon$.

Теорема. Пусть дано нелинейное дифференциальное уравнение n-го порядка

$$\frac{dx}{dt} = Ax + F(x,t) + f(t), \tag{2}$$

где A — вещественная постоянная матрица размерами $(n\text{x}n)$, собственные числа которой имеют отрицательные действительные части, $f(t)$ — n-мерная вещественная функция, компоненты которой определены, непрерывны и ограничены для всех $t \geq 0$, n-мерная вещественная функция $F(x,t)$ удовлетворяет локальному условию Липшица по компонентам вектора x в Ω, непрерывна в Ω по совокупности аргументов (x,t) и удовлетворяет неравенству $||F(x,t)|| \leq a\,||x||^{\alpha}\,\bar{h}(t)$ для всех достаточно малых значений $||x||$ и для всех $t \geq 0$. Здесь вещественные числа $a > 0$, $0 < \alpha < 1$, $\bar{h}(t)$ — вещественная непрерывная функция, заданная и ограниченная для всех $t \geq 0$ и суммируемая на бесконечном интервале $(0,+\infty)$, т.е. существует и конечен интеграл вида

$$\int_0^{+\infty} \bar{h}(t)dt < +\infty.$$

Пусть, кроме того, $-\mu_n \leq \ldots \leq -\mu_1 < 0$ — вещественные части собственных чисел матрицы A. Предположим, что существуют такие константы $b > 0,\ c > 0$, что для всех $t \geq 0$ выполняется неравенство

$$||f(t)|| \leq be^{-(\mu_n + c)t}. \tag{3}$$

Тогда движение $x = 0$ системы (2) является расчетно устойчивым.

Литература

[1] Зубов С.В., Зубов Н.В. Математические методы стабилизации динамических систем. Санкт-Петербург: Изд-во СПбГУ. 1996. 288 с.

Lyapunov Type Functions for Multi-Dimensional Dynamical Systems

Zubov S.V.

Saint Petersburg State University

Existence of the Lyapunov type functions for nonlinear systems of differential equations is proved. These functions represent the sum of a quadratic form of phase variables and an explicit function of time.

СЧЕТНОСТЬ ЧИСЛА РЕШЕНИЙ ДВУМЕРНОЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ПФАФФА С РАЗЛИЧНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМИ МНОЖЕСТВАМИ

Изобов Н.А.

Институт математики НАН Беларуси, Беларусь, Минск

Рассматриваем линейные вполне интегрируемые системы Пфаффа

$$\partial x/\partial t_i = A_i(t)x,\ x \in R^2,\ t = (t_1, t_2) \in R^2_+,\ i = 1, 2, \tag{1}$$

с ограниченными непрерывно дифференцируемыми матрицами A_1 и A_2 2-го порядка. Для аналогов характеристического показателя Ляпунова функции одной переменной — характеристического вектора [1] $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in R^2$ нетривиального решения $x\colon R^2_+ \to R^2, \{0\}$ системы (1), определяемого условиями

$$L_x(\lambda) \equiv \overline{\lim_{\|t\|\to\infty}} \|t\|^{-1}[\ln\|x(t)\| - (\lambda, t)] = 0;\ L_x(\lambda - (2-i, i-1)\varepsilon) > 0, \quad \forall\varepsilon > 0,\ i = 1, 2,$$

и обозначаемого символом $\lambda[x]$, и характеристического множества [1] $\Lambda_x = \cup\lambda[x] \subset R^2$ этого решения оставался открытым существенный исходный вопрос о числе различных характеристических множеств Λ_x решений x рассматриваемой системы. Отметим, что для обыкновенных n-мерных линейных систем их, как хорошо известно, не более n. В [2] доказано существование вполне интегрируемой линейной системы Пфаффа с ограниченными бесконечно дифференцируемыми коэффициентами и счетным числом решений x со всеми попарно различными характеристическими множествами Λ_x.

Теорема. *Всякая двумерная линейная вполне интегрируемая система Пфаффа* (1) *имеет не более счетного числа решений x с попарно различными характеристическими множествами Λ_x.*

Условимся ограниченную монотонно убывающую выпуклую вниз функцию $f_x\colon [\alpha_x, \beta_x] \to [a_x, b_x]$ называть характеристической функцией решения $x \neq 0$ системы (1), если справедливо представление $\Lambda_x = \{(\lambda_1, f_x(\lambda_1)) \in R^2\colon \lambda_1 \in [\alpha_x, \beta_2]\}$.

Доказательство теоремы основывается на следующих леммах.

Лемма 1. *Пусть существуют нетривиальные решения u и v системы* (1) *с характеристическими функциями f_u и f_w и точка $\gamma \in \cap_{w=u,v}[\alpha_w, \beta_w]$, для которой выполнены равенство $f_u(\gamma) = f_v(\gamma)$ и неравенство $f_u(\lambda_1) < f_v(\lambda_1)$ при $\forall\lambda_1 \in [\max\limits_{w=u,v} \alpha_w, \gamma) \equiv [\alpha, \gamma) \neq \varnothing$, (при $\forall\lambda_1 \in (\gamma, \min\limits_{w=u,v} \beta_w] \equiv (\gamma, \beta] \neq \varnothing$). Тогда характеристическая функция $f_x(\lambda_1)$ всякого решения $x(t) = c_1u(t) + c_2v(t)$, $c_i = const \neq 0$, $t \in R^2_+$, этой системы определена на отрезке $[\alpha_x, \gamma] \supset [\alpha, \gamma]$ с левым концом $\alpha_x = \alpha$ в случае $\alpha_u \neq \alpha_v$ (на отрезке $[\gamma, \beta_x] \supset [\gamma, \beta]$ с правым концом $\beta_x \geq \delta \equiv \sup\{\lambda_1 \in [\gamma, \beta_v]\colon f_v(\lambda_1) \geq a_u\}$, равным δ в случае $a_u \neq a_v$) и совпадает с функцией $f_v(\lambda_1)$ на отрезке $[\alpha, \gamma]$ (на отрезке $[\gamma, \delta]$).*

Лемма 2. *Пусть существуют нетривиальные решения u и v системы* (1) *с характеристическими функциями f_u и f_w и точки $\gamma_1 < \gamma_2$, $\gamma_i \in \cap_{w=u,v}[\alpha_w, \beta_w]$, такие что на всем интервале (γ_1, γ_2) выполнено неравенство $f_u(\lambda_1) < f_v(\lambda_1)$. Тогда характеристическая функция f_x всякого решения $x = c_1u + c_2v$, $c_i \neq 0$, этой системы определена на отрезке $[\gamma_1, \gamma_2]$ и совпадает на нем с характеристической функцией f_v решения v.*

Лемма 3. *Пусть пересечение характеристических множеств Λ_v не являющегося одноточечным в случаях $\alpha_u = \beta_v$ и $a_u = b_v$ и Λ_u решений u и v системы* (1) *пусто и существуют точки $\lambda'_u \in \Lambda_u$ и $\lambda'_v \in \Lambda_v$, связанные векторным неравенством $\lambda'_u \leq \lambda'_v$. Тогда характеристическая функция f_x всякого решения $x = c_1u + c_2v$, $c_i \neq 0$ этой системы определена на отрезке $[\alpha_u(v), \delta] \neq \varnothing$ с левым концом $\alpha_u(v) \equiv \max\{\alpha_u, \alpha_v\}$, равным α_x в случае $\alpha_u \neq \alpha_v$, и правым концом $\delta \equiv \sup\{\lambda_1 \in [\alpha_v, \beta_v]\colon f_v(\lambda_1) \geq a_u\}$, равным β_x при $a_u \neq a_v$, и совпадает на этом отрезке с характеристической функцией f_v решения v.*

Лемма 4. *Если для характеристических функций f_u и f_v решений u и v системы* (1) *выполнены условия $\beta_v < \alpha_u$ и $a_v > b_u$, то характеристическое множество всякого решения $x = c_1u + c_2v$, $c_i \neq 0$, этой системы есть одноточечное множество $\Lambda_x = \{(\alpha_u, a_v)\}$.*

Литература

[1] Грудо Э.И. // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 12. С. 2115–2128; 1977. Т. 13, № 5. С. 826–840.
[2] Изобов Н.А. // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, № 6. С. 735–743.

On the Countability of a Number of Solutions to a Two-Dimensional Pfaffian Linear System with Distinct Characteristic Sets

Izobov N.A.

Institute of Mathematics NAS of Belarus, Minsk

It is proved that a two-dimensional completely integrable Pfaffian linear system has at most a countable number of solutions with all distinct characteristic sets.

СВОЙСТВА КОЭФФИЦИЕНТА И ПОКАЗАТЕЛЯ ПРИВОДИМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Изобов Н.А., Мазаник С.А.

Институт математики НАН Беларуси, Минск,
Белорусский государственный университет, Минск

Рассматриваем линейные дифференциальные системы

$$\dot{x} = A(t)x,\ x \in \mathbb{R}^n,\ t \geq 0, \tag{1_A}$$

с кусочно-непрерывными и ограниченными (постоянной $a \geq \|A(t)\|$ при $t \geq 0$) коэффициентами и возмущенные системы (1_{A+Q}) также с кусочно-непрерывными на полуоси $[0, +\infty)$ возмущениями Q, удовлетворяющими либо условию

$$\|Q(t)\| \leq C(Q)e^{-\sigma t},\ \sigma \geq 0,\ t \geq 0, \tag{2}$$

либо более общему условию

$$\|Q(t)\| \leq C_\varepsilon(Q)e^{(\varepsilon-\sigma)t},\ \sigma \geq 0,\ t \geq 0,\ \forall\varepsilon > 0, \tag{3_1}$$

эквивалентному неравенству

$$\lambda[Q] \equiv \varlimsup_{t\to+\infty} t^{-1}\ln\|Q(t)\| \leq -\sigma \leq 0. \tag{3_2}$$

Эти возмущения для $\sigma = 0$ как в случае (2), так и в случае (3_1) – (3_2) дополнительно считаем исчезающими на бесконечности: $Q(t) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Каждой системе (1_A) поставим в соответствие множества $R(A)$ и $R_\lambda(A)$ тех значений параметра σ в условиях (2) и (3_1) – (3_2), при которых возмущенная система (1_{A+Q}) при любом возмущении Q, удовлетворяющем (2) или, соответственно, (3_1) – (3_2), приводима к невозмущенной системе (1_A) с помощью некоторого преобразования Ляпунова $x = L(t)y$ с абсолютно непрерывной на $[0, +\infty)$ матрицей Ляпунова $L\colon \sup\limits_{t\geq 0}(\|L(t)\| + \|L^{-1}(t)\| + \|\dot{L}(t)\|) < +\infty$.

Оба множества $R(A)$ и $R_\lambda(A)$ являются связными, причем [1] $(2a, +\infty) \subset R_\lambda(A) \subset R(A)$. Точные нижние грани множеств $R(A)$ и $R_\lambda(A)$ будем называть [2] коэффициентом $r(A)$ и показателем $\rho(A)$ приводимости системы (1_A) соответственно. Поскольку для любой системы (1_A) значения $r(A)$ и $\rho(A)$ совпадают, то их общее значение $r_A = r(A) = \rho(A)$ будем называть коэффициентом приводимости системы (1_A). Свойства же этого коэффициента приводимости r_A системы (1_A) по отношению к возмущениям (2) и (3_1) – (3_2) различны. Это различие устанавливает [1, 2] следующая

Теорема. *Существуют такие системы* (1_A), *что* $R(A) = R_\lambda(A) = (r_A, +\infty)$, *и в то же время существуют такие системы* (1_A), *для которых* $(r_A, +\infty) = R_\lambda(A) \subset R(A) = [r_A, +\infty)$. *Кроме того, для любой системы* (1_A) *множество* $R_\lambda(A) = (r_A, +\infty)$.

Отметим также свойство независимости величины $a > 0$ нормы матрицы коэффициентов системы (1_A) и ее коэффициента приводимости r_A: *для любых чисел* $2a \geq r \geq 0$ *существует система* (1_A) *с кусочно-непрерывной матрицей коэффициентов* A, *имеющей норму* $\|A(t)\| \leq a$ *при* $t \geq 0$, *и коэффициентом приводимости* $r_A = r$.

Литература

[1] Изобов Н.А., Мазаник С.А. Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42, № 2.
[2] Изобов Н.А., Мазаник С.А. Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43, № 2.

Properties of the coefficient and the exponent of the reducibility of linear differential systems

Izobov N.A., Mazanik S.A.

Institute of Mathematics NAS of Belarus, Minsk,
Belarusian State University, Minsk

An asymptotic equivalence of linear differential systems under exponentially decaying perturbations is considered. A notion of a coefficient of Lyapunov's reducibility of a linear system is introduced and some properties of this coefficient are discussed.

ВРАЩЕНИЕ ДЕФОРМИРУЕМОЙ ОБОЛОЧКИ, ОПИСЫВАЕМОЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ ПОРЯДКА *N*, ЗАПОЛНЕННОЙ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ, ОКОЛО НЕПОДВИЖНОГО ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ

Ильина Л.П., Мануйлов К.В., Панфёров А.А.

ОАО НПК "Высокие Технологии", Санкт-Петербург, Россия

В результате построения полных субстанциональных производных по времени от составляющих вектора вращательного импульса $S_i(t) = A_i(t)\omega_i(t)$ получены уравнения Эйлера, описывающие вращение жёсткой оболочки конечной толщины, ограниченной двумя алгебраическими поверхностями порядка N, заполненной сжимаемой вязкой жидкостью, из которых определяются составляющие момента сил, вращающих жидкость, содержащуюся внутри оболочки вокруг осей, относительно коих определено её вращение как твёрдого тела, но в противоположную сторону, и угловые скорости вращения жидкости относительно движущихся (неподвижных) осей, то есть решение задачи, поставленной Г.П. Дирихле и затем продвинутой Б. Риманом в случае, когда оболочка является эллипсоидальной.

Но движение жидкости, определённое этими угловыми скоростями, является лишь «затравочным», так как при обтекании внутренней поверхности оболочки частицы жидкости с необходимостью вращаются относительно двух систем осей, из которых первые суть оси, соприкасающиеся с эволютными поверхностями внутренней поверхности оболочки, а вторые суть оси им полярные относительно последней.

Снятие требования жёсткости оболочки позволяет найти описание её колебаний и порождённых ими напряжений и деформаций, вызванных центробежными силами и движением жидкости внутри неё.

Полученные результаты приводят к переопределению критериев устойчивости поверхностей равновесия вращающейся жидкости.

Rotation of Deformable Shell Described by the Algebraic Elliptical Surface with Real Compressible Liquid Inside Around Fixed Center of Gravity

Ilyina L.P., Manuylov K.V., Panfeorov. A.A.

Research and Production Company "High Technology", Saint-Petersburg, Russia

Euler equations describing rotation of deformable elliptical shell bounded by N order algebraic surface with real compressible liquid inside around fixed center of gravity by time differentiation of components of rotating impulse vector $S_i(t) = A_i(t)\omega_i(t)$, where A_i — moments of inertia, ω_i — angular velocity, is obtained.

ИССЛЕДОВАНИЕ СОСТОЯНИЙ И УПРАВЛЕНИЕ КОЛЕБАНИЯМИ НЕЛИНЕЙНЫХ ВЯЗКОУПРУГИХ СИСТЕМ

Кабельков А.Н., Кабельков В.А., Бурцева О.А., Нефедов В.В.

Южно-Российский государственный технический университет (Новочеркасский политехнический институт), Россия

Целями работы являются: исследование устойчивости и колебаний нелинейных вязкоупругих систем с общих позиций теории устойчивости движения; оптимальное управление периодическими режимами для их подавления или ограничения амплитуд.

Рассматривается смешанная задача деформирования вязкоупругого тела. Для вывода уравнений движения деформируемого тела используется принцип виртуальной работы. На основе вариационных методов полученные уравнения сведены к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Предложена методика расчета критических параметров, основанная на «совместном» решении уравнений «основного» состояния и линеаризованных уравнений возмущенного движения.

Для исследования колебаний, ответвляющихся от основных состояний, применен модифицированный метод Ляпунова-Шмидта.

Оптимальное управление колебаниями. Для гашения колебаний наблюдаемых систем используются пассивные, активные и пассивно-активные методы. Устройства активного гашения колебаний можно разбить на следующие группы: аэродинамические, гидравлические, гироскопические и электромеханические.

Расчет оптимальных управлений детерминированными системами зарубежные и отечественные авторы проводят на основе теории Летова–Калмана. При этом задача сводится к нелинейным уравнениям типа Риккати. Существенное упрощение алгоритмов обеспечивает введение критерия «обобщенной работы» А.А. Красовского, приводящего к линейным уравнениям при одноточечных граничных условиях. В настоящей работе на основе уравнений Эйлера-Лагранжа показывается, что задача аналитического конструирования регулятора может быть сведена к линейной двухточечной краевой задаче при квадратичном критерии качества. При этом в уравнения вводится вектор возмущающих воздействий.

Полученные результаты. На основе изложенных методов решены следующие задачи: устойчивость и активное управление колебаниями высотного сооружения, обтекаемого потоком воздуха; пассивно-активное управление колебаниями высотного сооружения, подверженного сейсмическим воздействиям; управление роботом-манипулятором; активное управление пантографным механизмом.

Работы выполнены в рамках научного направления «Численно-аналитические и качественные методы в задачах нелинейной механики» кафедр «Теоретическая механика» и «Высшая математика» Физико-математического факультета ЮРГТУ.

Investigation of States and Control of Nonlinear Viscous-Elastic Systems Oscillations

Kabelkov A.N., Kabelkov V.A., Burtseva O.A., Nefedov V.V.

South-Russian State Technical University (Novocherkassk polytechnical institute), Russia

Stability and oscillations of nonlinear viscous-elastic systems have been studied. An algorithm of optimum control of periodic modes is developed to restrict their amplitudes or completely suppress them. A problem of calculation of stability and active control of fluctuations of high-altitude construction that is flowed round by the air is solved. An algorithm of passive-active control of fluctuations of high-altitude construction under seismic influence is created. Controls of robot-manipulator and pantograph mechanism are synthesized.

СТАБИЛИЗАЦИЯ ГЕТЕРОГЕННЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Косов А.А.

Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Россия

Исследуется задача стабилизации управляемой логико-динамической системы с изменяющимся фазовым пространством, описывающей динамику взаимосвязанных механических подсистем с возможными отказами и восстановлениями. Показано, что в случае, когда в подсистемах заданы потенциальные либо неконсервативные позиционные силы, матрицы которых могут зависеть от времени, а взаимосвязи являются достаточно слабыми, то систему можно стабилизировать до экспоненциальной устойчивости локальными регуляторами, использующими в каждой подсистеме только силы иной структуры по сравнению с заданными.

Если в подсистеме заданы неконсервативные позиционные силы с переменной матрицей, то локальный регулятор всегда может быть построен на основе использования диссипативных и потенциальных сил с произвольными постоянными положительно определенными матрицами и специальным образом выбранных гироскопических сил. При четном числе координат и дополнительных ограничениях на переменную матрицу неконсервативных сил стабилизирующий до экспоненциальной устойчивости локальный регулятор может быть построен без привлечения потенциальных сил на основе диссипативных сил с произвольной постоянной положительно определенной матрицей и специальным образом выбранных гироскопических сил.

Если в подсистеме заданы потенциальные силы с переменной матрицей и число координат чётно, то всегда может быть построен стабилизирующий до экспоненциальной устойчивости локальный регулятор на основе использования диссипативных, гироскопических и неконсервативных позиционных сил. При нечетном числе координат стабилизация такого рода осуществима, если хотя бы один диагональный элемент матрицы потенциальных сил отделен от нуля положительным числом.

Для линейных подсистем с заданными потенциальными силами в предположении отсутствия диссипативно-ускоряющих сил изучена задача стабилизации до не асимптотической устойчивости за счет присоединения гироскопических и неконсервативных позиционных сил.

В качестве примера рассмотрена задача стабилизации положения относительного равновесия спутника на круговой орбите, для которой найдена вся область стабилизируемости в пространстве параметров — главных моментов инерции.

Работа поддержана в рамках Программы № 22 Президиума РАН, а также гранта Президента Российской Федерации по государственной поддержке ведущих научных школ НШ-9508.2006.1.

Stabilization of Heterogeneous Mechanical Systems

Kosov A.A.

Institute of system dynamics and control theory of SB of RAS, Russia

A problem related to stabilization of a controlled logic-dynamic system with the variable phase space, which describes dynamics of interconnected mechanical subsystems characterized by possible failures and restorations, is considered. Conditions, whose satisfaction provides for the stabilization up to exponential stability at the expense of employment of local controllers, have been obtained.

О СМЕШАННЫХ СТРАТЕГИЯХ СТАБИЛИЗАЦИИ

Котельникова А.Н., Красовский Н.Н., Решетова Т.Н.

Институт математики и механики Уральского отделения Российской Академии наук, Россия

Рассматривается стабилизация управляемого объекта, описываемого уравнением Ито:

$$dy[t] = (G^{[0]}y[t] + G^{[\eta]}y[t-\eta] + B^{[s]}u^{[s]}[t-\xi] + r(t, y[t,\bullet])+$$
$$+f(u[t], v[t]; y[t-h^{[u]}[t]], y[t-h^{[v]}[t]]))dt + B^{[W]}(t, y[t])dW[t]. \qquad (1)$$

Здесь y — вектор-столбец $\{y_i, i=\overline{1,n}\}$, $|y| = (y_1^2 + \cdots + y_n^2)^{\frac{1}{2}}$, $y[t,\bullet] = \{y[t+\vartheta],\ -2h \leq \vartheta \leq 0\}$, $(h = const > 0)$ — история движения; $B^{[s]}u^{[s]}$ — линейный стабилизатор [1]; f — блок влияния управлений $\{u, h^{[u]}\}$ и неопределенных помех $\{v, h^{[v]}\}$ [2,3]; η и ξ — марковские процессы, r — малая добавка; $W[t]$ — k-мерный $(1 \leq k \leq n)$ винеровский процесс.

Устанавливаются условия на параметры уравнения (1), на помехи и управляющие воздействия, гарантирующие устойчивость по вероятности [4-6] для (1), то есть гарантирующие при наперед заданных $\varepsilon > 0$ и $\beta < 1$ неравенство для вероятности:

$$P\left(\sup_{t_* \leq t < T} |y[t]| < \varepsilon\right) > \beta,\ \ T \leq \infty \qquad (2)$$

при достаточно малом начальном возмущении

$$\max_{-2h \leq \vartheta \leq 0} |y[t+\vartheta]| \leq \delta. \qquad (3)$$

Воздействие $\{u[t], h^{[u]}[t]\}$ формируется по обратной связи вероятностным механизмом в дискретной по времени t схеме с малым шагом $t_l \leq t \leq t_{l+1}$, $l = 1, 2, \ldots$ на базе информационного образа $\{y[t,\bullet] + \Delta y[t,\bullet]\}$, включающего малую помеху. Управление $\{u[t_l], h^{[u]}[t_l]\}$ определяется функционалом Ляпунова $V(y[t,\bullet], \xi[t], \eta[t])$ [7,8].

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ НШ-8512.2006.1 и гранта РФФИ № 06-01-00436

Л и т е р а т у р а

[1] Осипов Ю.С. О стабилизации управляемых систем с запаздыванием // Дифференц. уравнения, 1965. Т.1, №5. С. 605-618.
[2] Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.:Наука, 1977.
[3] Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
[4] Хасьминский Р.З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. Москва: Гл. ред. физ.-мат. лит., 1969.
[5] Harold J. Kushner Stochastic Stability and Control. New York-London: Academic Press, 1967.
[6] Кац И.Я., Красовский Н.Н. Об устойчивости систем со случайными параметрами // Прикл. математика и механика. 1960. Т.24, вып.5. С. 809-823.
[7] Колмановский В.Б., Носов В.Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. М.: Наука, 1981.
[8] Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения, М.: Физматгиз, 1959.

On Mixed Strategies of Stabilization

Kotelnikova A.N., Krasovskii N.N., Reshetova T.N.

Institute of Mathematics and Mechanics of Ural Branch of Russian Academy of Sciences, Russia

Stabilization of a controlled object with after-effect is considered. The controlled object is affected by uncertain and stochastic disturbances and is described by an Ito equation. Effects from the past are included among disturbances and controls which is specific for the problem. Conditions are determined that guarantee stability in probability. The control is formed on the basis of the technique of Lyapunov functionals by a stochastic mechanism with the help of feedback taking into account the history of motion distorted by disturbances.

References

[1] Osipov Yu. S. On stabilization of control systems with delay // Differential equations, 1965. V.1, N. 5. P. 605-618.
[2] Kurzhanskii A.B. Control and Observation under Conditions of Indeterminacy. Moscow: Nauka, 1977.
[3] Krasovskii N.N., Subbotin A.I. Positional differential games. Moskow: Nauka, 1974.

О ПОСТРОЕНИИ НЕОГРАНИЧЕННЫХ СПЕКТРАЛЬНЫХ СИГМА-МНОЖЕСТВ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ЧЕТНОЙ РАЗМЕРНОСТИ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ ПРОИЗВОДНОЙ

Красовский С.Г.

Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь

Рассматриваем линейную систему

$$\varepsilon\dot{x} = A(t)x,\ \ \varepsilon \in (0,1],\ \ x \in R^{2n},\ \ t \geq 0, \tag{$1_{A/\varepsilon}$}$$

с кусочно-непрерывными ограниченными коэффициентами, имеющую при $\varepsilon = 1$ характеристические показатели $\lambda_1(A) \leq \ldots \leq \lambda_{2n}(A)$, составляющие точку $\lambda(A)$ пространства R^{2n}, и коэффициент неправильности Гробмана [1] $\sigma_\Gamma(A)$.

По аналогии с гробмановским спектральным множеством, введенным Н.А. Изобовым [2], рассмотрим спектральное сигма-множество [3] системы $(1_{A/\varepsilon})$:

$$S_\sigma(A/\varepsilon) \equiv \bigcup_{\lambda[Q]\leq -\sigma} \lambda((A+Q)/\varepsilon),\ \ \text{где } \sigma = \text{const} > 0,\ \ \lambda[Q] \equiv \overline{\lim_{t\to+\infty}}\, t^{-1}\ln\|Q(t)\|.$$

Теорема 1. *Для любых чисел $\lambda_1 < \lambda_2$ и $\sigma_0 > 2(\lambda_2 - \lambda_1)$ существует двумерная система (1_A)с бесконечно дифференцируемыми ограниченными коэффициентами и их производными, имеющая характеристические показатели $\lambda_i(A) = \lambda_i$, $i = 1, 2$ и коэффициент неправильности Гробмана $\sigma_\Gamma(A) = \sigma_0$, такая, что спектральное сигма-множество $S_\sigma(A/\varepsilon)$ системы $(1_{A/\varepsilon})$ при всяких $\sigma > 0$ и $0 < \varepsilon < [\sigma_0 + 2(\lambda_1 - \lambda_2)]\sigma^{-1}$ содержит множество точек $(\mu_1, \mu_2) \in R^2$, определяемое неравенствами $\lambda_2 - \sigma_0(\theta-1)^{-1} \leq \varepsilon\mu_1 < \lambda_2 \leq \varepsilon\mu_2 \leq (\lambda_2 - \varepsilon\mu_1)\theta^{-2} + \lambda_2 + (\sigma_0 + \lambda_1 - \lambda_2 - \varepsilon\sigma)\theta^{-1}$, где $\theta > 2\sigma_0(\lambda_2 - \lambda_1)^{-1} - 1 > 3$.*

Следствие 1. *Плоская внутренняя мера $\underline{\operatorname{mes}}_2\, S_\sigma(A/\varepsilon)$ множества $S_\sigma(A/\varepsilon)$ неограниченно возрастает при $\varepsilon \to +0$.*

Заметим, что при доказательстве теоремы 1 в [4] была построена лишь часть спектрального сигма-множества сингулярной системы. В случае $\lambda_1 = \lambda_2$ в [5] построено полное спектральное сигма-множество, также обладающее свойством неограниченности по малому параметру.

Теорема 2. *Для любых действительных чисел λ, $\sigma_0 > 0$ и $\theta > 1$ существует двумерная система (1_A) с бесконечно дифференцируемыми ограниченными коэффициентами и их производными, имеющая характеристические показатели $\lambda_i(A) = \lambda$, $i = 1, 2$ и коэффициент неправильности Гробмана $\sigma_\Gamma(A) = \sigma_0$, такая, что спектральное сигма-множество $S_\sigma(A/\varepsilon)$ системы $(1_{A/\varepsilon})$ при всяких $\sigma > 0$ и $0 < \varepsilon < \sigma_0/\sigma$ совпадает с треугольником*

$$\Delta(A/\varepsilon) \equiv \{(\mu_1, \mu_2) \in R^2 \colon \lambda(\theta+1) - \varepsilon\theta\mu_2 \leq \varepsilon\mu_1 \leq \varepsilon\mu_2 \leq \lambda + (\sigma_0 - \varepsilon\sigma)(\theta-1)^{-1}\}.$$

Следствие 2. *Плоская мера $\operatorname{mes}_2 S_\sigma(A/\varepsilon)$ при всяком фиксированном $\sigma > 0$ неограниченно возрастает по параметру $\varepsilon \to +0$.*

На основе теорем 1, 2 получен аналогичный результат и для сингулярных систем $(1_{A/\varepsilon})$ произвольной четной размерности $2n$, $n \in N$:

Теорема 3. *Для произвольного $n \in N$ и любых чисел $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_{2n}$, $\sigma_0 > 2 \max\limits_{k=\overline{1,n}}\{\lambda_{2k} - \lambda_{2k-1}\} \equiv 2L$ существует $2n$-мерная система (1_A) с бесконечно дифференцируемыми ограниченными коэффициентами и их производными, имеющая характеристические показатели $\lambda_i(A) = \lambda_i$, $i = \overline{1,2n}$ и коэффициент неправильности Гробмана $\sigma_\Gamma(A) = \sigma_0$, такая, что спектральное сигма-множество $S_\sigma(A/\varepsilon)$ системы $(1_{A/\varepsilon})$ при всяких $\sigma > 0$ и $0 < \varepsilon < (\sigma_0 - 2L)\sigma^{-1}$ имеет внутреннюю $2n$-меру $\underline{\operatorname{mes}}_{2n}\, S_\sigma(A/\varepsilon) > 0$, причем $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} \underline{\operatorname{mes}}_{2n}\, S_\sigma(A/\varepsilon) = +\infty$.*

Работа подготовлена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований.

Литература

[1] Гробман Д.М. // Мат. сб. 1952. Т. 30(72), №1. С. 121–166.
[2] Изобов Н.А. // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, №3. С. 428–437; 1991. Т. 27, №6. С. 953–957.
[3] Izobov N.A., Krasovskii S.G. // Mem. Differential Equations Math. Phys. 1998. Vol. 13. P. 140–144.
[4] Изобов Н.А., Красовский С.Г. // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, №8. С. 1049–1055.
[5] Красовский С.Г. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 1999. №3. С. 10–15.

On the Constructing of Unbounded Spectral Sigma-Sets for Even Dimensional Linear Systems with Small Parameter Multiplying the Derivative

Krasovskii S.G.

Institute of Mathematics NAS of Belarus, Minsk

The methods for constructing of characteristic spectral sets of linear differential systems with exponentially damping perturbations and small positive parameter multiplying the derivative are described. Metrical properties of such sets are investigated.

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА ДИССИПАТИВНЫХ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Крысько В.А., Крысько А.В., Жигалов М.В., Папкова И.В., Савельева Н.Е., Щекатурова Т.В., Кузнецова Э.С.

Саратовский государственный технический университет, Россия

В работе построена общая теория нелинейной динамики диссипативных распределенных механических систем с учетом температурного поля и внешних знакопеременных нагрузок (балок, стержней, пластин и оболочек произвольного плана, а также замкнутых цилиндрических оболочек). В качестве кинематической гипотезы принята обобщенная модель С.П. Тимошенко, из которой как частный случай следуют гипотезы типа Тимошенко и Кирхгофа. Учтены следующие типы нелинейности: геометрическая, конструктивная, физическая и упруго-пластическое циклическое нагружение. Получена априорная скорость сходимости методом Бубнова-Галеркина для искомых нелинейных дифференциальных уравнений движения механических систем в частных производных. Это тем самым дает возможность доказать существование хотя бы одного решения этой системы уравнения, как частный случай отсюда следует существование хотя бы одного решения для уравнения Тимошенко и Кирхгофа.

Для получения достоверных сигналов движения механических систем искомые нелинейных дифференциальные уравнения в частных производных сводятся к системам обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью следующих методов: конечных разностей с аппроксимацией $O(h^2)$, $O(h^4)$, конечных элементов, Бубнова-Галеркина и Ритца в высших приближениях. Задача Коши решается методом Рунге-Кутта 2-го, 4-го, 6-го порядка точности. Несколько методов было использовано не только для проверки достоверности результатов, но и с целью выбора минимальных затрат времени. Сигналы исследуются с помощью анализа Ляпуновских показателей, Фурье и Вийевлет-преобразования, сечение Пуанкаре, фазовых и модальных портретов и других методов нелинейной динамики. Построены карты характера колебаний механических систем в зависимости от параметра внешних воздействий типа механической системы и ее геометрии, модели диссипации, граничных и начальных условий. Исследуются пространственный и временной хаос. Анализируются сценарии перехода колебаний механических систем из гармонических в хаотические. Получены новые модификации известных сценариев. Предложены методы управления хаотическими колебаниями механических распределенных систем.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 06–08–01357_а).

The Nonlinear Dynamics Theory of Distributed Mechanical Systems

Krysko V.A., Krysko A.V., Zhygalov M.V., Papkova I.V., Savelieva N.E., Shekaturova T.V., Kuznetsova E.S.

Saratov State Technical University, Russia

In present research work the nonlinear dynamics theory of distributed mechanical systems is constructed. The distributed mechanical systems are beams, rods, plates and shells of arbitrary plane and also closed cylindrical shells. For mentioned systems different types of nonlinearities and series of kinematics hypothesis are taking into account. For solved problems different numerical methods for reduction of differential equations in partial derivations to ordinary differential equations are constructed with the help of finite difference method, Bubnov-Galerkin's method, Rits's method in maximum approach. The analysis of Cauchy problem solving depending upon approximation order is given. Analysis algorithms of mechanical systems are constructed.

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ В ТЕОРИИ МНОГОМАСШТАБНЫХ ПО ВРЕМЕНИ СИСТЕМ

Кузьмина Л.К.

КАИ-КГТУ, Россия

Исследование связано с развитием понятий и методов классической теории устойчивости А.М. Ляпунова применительно к задачам динамики сложных систем класса сингулярно возмущенных, многомасштабных по времени. Работа посвящена различным аспектам и задачам динамики систем такого типа, с разработкой методов и оценок в моделировании и анализе на основе обобщенной методологии, синтезирующей идеи и методы теории устойчивости и асимптотические методы. Расширенный подход, формируемый на методах А.М. Ляпунова и Н.Г. Четаева, на постулатах устойчивости и сингулярности, дает универсальный инструмент, позволяющий подойти к решению фундаментальных задач в общей теории устойчивости для сложных систем рассматриваемого класса, включая принцип сведения, задачу редукции-декомпозиции. В соответствии с идеями классических работ по теории устойчивости (А.М. Ляпунов, Н.Г. Четаев, К.П. Персидский, П.А. Кузьмин) обсуждаются некоторые постановки и задачи применительно к особенностям систем сингулярно возмущенного класса, порожденным конкретными примерами физического содержания, для которых исходная математическая модель, содержащая большие и малые параметры, может быть представлена в стандартной форме сингулярно возмущенной системы с параметрическими возмущениями нерегулярного типа, характерными для систем с многовременными масштабами. Обсуждается решение задач об устойчивости в критических случаях (по А.М. Ляпунову), присущих прикладным задачам механики. Исследуются сингулярно возмущенные системы с особенностями, свойственными механическим системам, в случаях, когда свойство равномерной асимптотической устойчивости отсутствует; невозмущенные подсистемы — на границе области устойчивости; порождающие системы — не являются предельными системами; номинальные системы — квази-Тихоновские (по Н.Н. Моисееву). Определяются условия сведения, при которых задача об устойчивости для исходной системы сводится к исследованию аппроксимирующей $s-$ системы меньшего порядка, с оценками типа Н.Г. Четаева. Причем, укороченная система — нелинейная, сингулярно возмущенная. Получено решение сингулярно возмущенной задачи об устойчивости для систем, у которых спектры соответствующих матриц — критические (и для медленных, и для быстрых переменных). Построены регулярные алгоритмы для оценок областей значений параметров системы, допускающих сведение в задачах устойчивости. Обсуждены результаты, которые ведут к строгому обоснованию принципа сведения для рассматриваемых систем. Приведенные результаты обобщают и дополняют известные в теории устойчивости (включая классическую теорему А.М. Ляпунова "О некотором обобщении") применительно к многомасштабным по времени системам.

Автор признателен Российскому Фонду Фундаментальных Исследований за поддержку исследования.

Stability Problems in Theory of Systems with Multi-Time Scales

Kuzmina L.K.

KAI-KSTU Kazan, Russia

Different aspects and various problems of complex systems dynamics with multi-time scales are considered in this research; main goal is to generalize the classical results of A.M. Lyuapunov theorem for systems of singularly perturbed class; to extend the statements for general reduction principle, for decomposition of stability property, with estimations of N.G. Chetayev type, including special critical cases on slow and on fast variables.

УСТОЙЧИВОСТЬ, РОЖДЕНИЕ ЦИКЛА И УПРАВЛЕНИЕ В СИСТЕМАХ ЛЯПУНОВА

Куницын А.Л., Ташимов Л.Т., Тхай В.Н.

Московский авиационный институт (ТУ), Россия,

Турецко-Казахский университет, Шимкент,

Институт проблем управления РАН, Москва, Россия

В окрестности точки покоя система называется системой Ляпунова, если выполняются следующие условия: 1) характеристическое уравнение (ХУ) имеет, по крайней мере, одну пару чисто мнимых корней $\pm i\lambda$; 2) остальные корни ХУ не кратны $\pm i\lambda$; 3) система имеет аналитический интеграл $H = h(const)$. В этом случае система допускает (теорема Ляпунова) однопараметрическое семейство периодических движений, примыкающих к точке покоя. В гамильтоновых системах теорема Ляпунова справедлива и в резонансных случаях. Существует аналоги указанных результатов в обратимых системах.

Интересный вопрос об устойчивости самой точки покоя поставлен только недавно [1]. Другая интересная проблема — рождение цикла на каждом фиксированном уровне h. И наконец, для систем Ляпунова интересна идея [1] о выборе управления, использующего существенным образом свойства замкнутой системы.

В докладе обсуждаются следующие вопросы:

1) устойчивость точки покоя в нерезонансном случае;
2) устойчивость точки покоя во всех случаях резонанса;
3) рождение цикла (на каждом уровне интеграла) в ситуации, близкой к резонансной;
4) выбор управления, обеспечивающего «скатывание» к точке покоя по асимптотическим траектории на нулевом уровне h.

Доклад построен на результатах [1-3]. Также используются новые результаты, полученные в общей теории устойчивости резонансных систем [4].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ(07-01-00176) и Программы 22 Президиума РАН.

Литература

[1] В.Н. Тхай. Устойчивость и управление в системе с первым интегралом// АиТ. 2005. N3. С. 34-38.
[2] В.Н. Тхай. Цикл в системе, близкой к резонансной системе// ПММ. 2004. Т.68. Вып.2. С. 254-272.
[3] А.Л. Куницын, В.Н.Тхай. Об устойчивости в системах Ляпунова//ПММ. 2006. Т.70. Вып.4. С. 547-554.
[4] А.Л. Куницын, Л.Т. Ташимов. Некоторые задачи устойчивости нелинейных резонансных систем. Алма-Ата: Гылым, 1990. 195 с.

Lyapunov Systems: Stability, Hopf Bifurcations and Control

Kunitsyn A.L., Tashimov L.T., Tkhai V.N.

Moscow Aviation Institute, Russia,
Turkish-Kazakh University,
Institute of Control Sciences RAS, Russia

The problems of Stability, Hopf bifurcations and Control for Lyapunov systems are discussed.

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ДИНАМИКЕ ВИБРАЦИОННЫХ МИКРОМЕХАНИЧЕСКИХ ГИРОСКОПОВ

Лестев А.М.*, Тихонов А.А., Лестев М.А.****

**Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, Россия*

***Санкт-Петербургский государственный университет, Россия*

Вибрационные микромеханические гироскопы (ММГ) относятся к перспективным приборам современной техники. В настоящее время отечественными научными центрами и предприятиями разработаны принципы проектирования, конструктивные схемы и конструкции ММГ, технология изготовления, электроника вибровозбуждения колебаний чувствительных элементов и съема информации, созданы опытные образцы приборов и производятся их экспериментальные исследования. Рядом зарубежных фирм осуществляется серийное производство приборов этого типа. Современные ММГ относятся к приборам низкого класса точности и на первый план выступает проблема создания микромеханических приборов навигационного класса. Решение указанной проблемы наряду с мерами схемотехнического и конструкторско-технического характера связано с проведением теоретических исследований, основанных на строгом учете возмущений и факторов, оказывающих влияние на динамику чувствительных элементов ММГ. В докладе излагаются результаты теоретических исследований влияния нелинейных факторов на динамику и точность ММГ. Приводятся математические модели чувствительных элементов приборов, результаты анализа влияния нелинейной зависимости сил упругости подвеса и электростатических сил от перемещений чувствительных элементов, анализ динамики систем автогенерации колебаний чувствительных элементов ММГ. Выявлены неустойчивые ветви резонансных кривых колебаний чувствительных элементов ММГ, явления скачков амплитуд и частот колебаний чувствительных элементов, явления захватывания при функционировании ММГ на вибрирующем основании. Рассмотрены нелинейные резонансные явления в динамике ММГ и получены условия устойчивости чувствительных элементов приборов в резонансных ситуациях. Даны рекомендации по устранению нежелательных явлений в динамике ММГ.

Работа выполнена при поддержке гранта РФ РНП 2.1.2.2997.(2006).

Nonlinear Effects in Dynamics of Micromechanical Vibrating Gyros

Lestev A.M.*, Tikhonov A.A., Lestev M.A.****

**Saint Petersburg State University of Aerospace Engineering, Russia*

** *Saint Petersburg State University, Russia*

A micromechanical vibrating gyro is considered. The paper deals with nonlinear analysis of dynamics and precision of micromechanical vibrating gyros. The nonlinear differential equations of a gyro are evaluated. The influence of nonlinear dependence between the forces of elasticity in supports and the displacements of sensitive elements is studied. Nonlinear dependence between the electrostatic forces and the displacements of sensitive elements is taken into account. The dynamics of self-sustained vibrations of sensitive elements is analyzed. Nonlinear resonances in dynamics of a gyro are revealed. The stability of nonlinear vibrations of a gyro is analyzed and recommendations to avoid undesirable effects in dynamics of a gyro are suggested.

This work is supported by Grant of RF РНП 2.1.2.2997.(2006).

АНАЛИЗ ДИНАМИКИ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ С ПОМОЩЬЮ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА

Лычак М.М.

Институт космических исследований НАНУ, Киев, Украина

Рассмотрим дискретные системы, описываемые векторным разностным уравнением

$$X_{n+1} = \Phi(X_n, n), \quad n = n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \ldots, \quad X_{n_0} = X^{(0)}, \tag{1}$$

где X_n — m-мерный вектор фазовых координат системы, $\Phi(X_n, n)$ — нелинейная m-мерная вектор-функция, ограниченная на любом ограниченном множестве значений X_n и n, а также равномерно непрерывная в окрестности точки $X \equiv 0$, $n_0 = const > 0$.

Теорема 1 (о диссипативности). Если для системы (1) во всем фазовом пространстве E^m существует такая скалярная положительно определенная функция Ляпунова $\nu^{(0)}(X_n, n)$, допускающая бесконечно большой низший предел при $\|X_n\| \to \infty$, что в E^m выполняется неравенство

$$\Delta\nu_n + \tau_0(X_n, n) \cdot [\nu^{(0)}(X_n, n) - \mu_0] < 0 \quad \forall X_n \neq 0, \;\; n \geq n_0, \tag{2}$$

для некоторой кусочно-непрерывной функции $0 < \tau(X_n, n) < 1$ $\forall X_n \neq 0$, $n \geq n_0$, и некоторого числа $\mu_0 > 0$, то система (1) диссипативна в E^m, а область $\Omega^{(0)}$, выделяемая в фазовом пространстве неравенством

$$\inf_{n \geq n_0} \{\nu^{(0)}(X_n, n)\} \leq \mu_0, \tag{3}$$

является оценкой ее предельного множества.

Теорема 2. Пусть для системы (1) существует последовательность скалярных функций $\nu^{(k)}(X_n, n)$ ($k = 0, 1, 2, \ldots, N,\; N = const$) таких, что $\nu^{(0)}(X_n, n)$ удовлетворяет условиям Теоремы 1. Причем, для всех последующих членов последовательности функция $\nu^{(k)}(X_n, n)$ ($k > 0$) положительно определена внутри области $\Omega^{(k-1)}$, являющейся оценкой предельного множества, получаемой с помощью функции $\nu^{(k-1)}(X_n, n)$ и выделяемая в фазовом пространстве неравенством вида (3), но с заменой всюду "0" на $k-1$, а внутри этой же области выполняется неравенство

$$\Delta\nu_n^{(k)} + \tau_k(X_n, n) \cdot [\nu^{(k)}(X_n, n) - \mu_k] < 0 \quad \forall X_n \neq 0, \;\; n \geq n_0, \tag{4}$$

для некоторой кусочно-непрерывной функции $0 < \tau_k(X_n, n) < 1$ $\forall X_n \neq 0$, $n \geq n_0$, и некоторого числа $\mu_k > 0$. Тогда, если при любом $k > 0$ новая оценка предельного множества $\Omega^{(k)}$ содержится в предыдущей оценке $\Omega^{(k-1)}$, то $\Omega^{(N)}$ является оценкой предельного множества диссипативной в E^m системы (1).

Если же, начиная с некоторого конечного k функции $\nu^{(k)}(X_n, n)$ и $\tau_k(X_n, n)$ равномерно непрерывны в окрестности точки $X \equiv 0$, разность областей $\Omega^{(k-1)}$ и $\Omega^{(k)}$ не является множеством меры нуль, а также существует при $N \to \infty$ $\lim \mu_N = 0$, то система (1) асимптотически устойчива в E^m.

Рассмотрены содержательные примеры применения приведенных теорем для анализа динамики нелинейных дискретных систем.

Analysis of Discrete System Dynamics Using Lyapunov Functions Sequences

Lychack M.M.

Institute for Space Research NAS, Kiev, Ukraine

Theorems useful for the analysis of discrete system dynamics are proved. Some applications of the derived theory are considered.

УСТОЙЧИВОСТЬ И СТАБИЛИЗАЦИЯ ГИБРИДНЫХ СИСТЕМ

Маликов А.И.

Казанский государственный технический университет им. А.Н. Туполева, Россия

Переключение между различными структурами системы — одна из особенностей многих прикладных инженерных задач управления. Например, усилители с переменным коэффициентом усиления, переключаемые преобразователи, регулятор широтно-импульсной модуляции, переключаемые конденсаторные схемы, а также системы подавления вибраций в устройствах, использующих переменную жесткость. Такие системы называются гибридными. Математические модели их динамики включают описание изменения координат состояния при каждой фиксированной структуре в виде систем обыкновенных дифференциальных или разностных уравнений и описание структурных изменений, в качестве которых рассматриваются различные логические условия, определенные на значениях переменных состояния и параметров системы.

В докладе представлен обзор литературы по быстро развивающемуся направлению исследований — устойчивости и стабилизации гибридных систем с фазовыми ограничениями. Приводятся основные теоремы метода функций Ляпунова и метода матричных систем сравнения, модифицированные для гибридных систем. Даются постановки задач и способы синтеза управления для систем с фазовыми ограничениями на основе функций Ляпунова и линейных матричных неравенств. Рассматриваются проблемы обеспечения устойчивости систем с переменной структурой, элементы которых являются как устойчивыми так и неустойчивыми подсистемами.

Результаты, представленные в литературе, дают достаточные условия устойчивости для некоторых классов гибридных систем. Данные условия полагаются в основу правил проектирования систем управления. В гибридных системах с неопределенностями требуются регуляторы, предназначенные для работы с большим числом допустимых моделей. В этом случае задача управления состоит в нахождении такой последовательности переключений между регуляторами, которая бы обеспечивала стабилизацию гибридной системой в целом. Приводятся, полученные на основе линейных матричных неравенств, условия существования последовательности переключений, при которых система, состоящая из неустойчивых линейных подсистем, была бы устойчивой.

Результаты иллюстрируются примерами.

Stability and Stabilization of Hybrid System

Malikov A.I.

Kazan State Technical University named by A.N. Tupolev, Russia

The survey of results on stability and stabilization of hybrid systems are given. The results of switched linear (stable and unstable) systems are discussed. The analog Lyapunov theorems are installed and stability condition for system with phase constraints. The problems of construction of normal functioning domain and regulator design which provide maximal normal functioning domain are solved.

ЗАДАЧА ОБ УСТОЙЧИВОСТИ, КАК ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА, ЯВЛЯЮЩИХСЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ КРИВОЙ РОДА p

Мануйлов К.В.

ОАО НПК "Высокие Технологии", Санкт-Петербург, Россия

Решение классической задачи об устойчивости движения (динамической системы) может быть рассмотрено как аналитическое описание поведения кривой на поверхности, осуществленное посредством решения дифференциальных уравнений (неравенств) для соответствующих функций Ляпунова.

Это описание движения строится в абелевых функциях от p переменных, представляющих собой независимо от степени сложности движения отношения проективных координат в R^3, каковые суть тригонометрические функции алгебраических рода p. Они суть отношения абелевых тэта-функций второго порядка, зависящих от двух классов переменных — либо от p аргументов v_i и $\dfrac{p(p+1)}{2}$ коэффициентов квадратичной формы τ_{ij} (называемых также модулями периодичности), либо от p аргументов u_i и от $2p-1$ модулей k_i, из коих значения τ_{ij} и k_i зависят от начальных условий, определяющих конкретные алгебраические кривые (траектории динамической системы), представляющие собой конические сечения ранга p.

Так как модули k_i суть корни уравнения степени $2p+2$, образующие сложную систему алгебраических инвариантных форм, связанных между собой (например, выражения коэффициентов уравнения степени $2p+2$), значения коих определены начальными условиями, наиболее естественно сформулировать задачу об устойчивости движения как вариационную задачу, избрав упомянутые модули k_i в качестве параметров варьирования, поставленную в форме К. Вейерштрасса – М. Краузе.

Отметим, что при этом задача о преобразовании одной алгебраической кривой в другую будет определена теоремой Якоби.

Теорема: *если одна алгебраическая кривая может быть алгебраически (рационально) преобразована в другую алгебраическую кривую, то периоды тригонометрических функций этих кривых будут соотноситься между собой целочисленно.*

Эта теорема опирается на свойства алгебраических кривых, определенные ограничениями, накладываемыми на их поведение связями между периодами I и II рода (интегралами I и II рода) тригонометрических функций этих кривых (практически любого рода p и любого порядка).

The Problem of Stability as Variational Problem for Lyapunov's Functions Presented as Trigonometrical Functions of Algebraic Curve of Genus p

Manuylov K.V.

Research and Production Company "High Technology", Saint-Petersburg, Russia

The problem of motion stability of dynamic system can be considered as analytical description by the Abelian functions of p variables of algebraic curve of genus p behavior on surface by means of the solving of differential equations for Lyapunov's functions. This problem can be formulated as variation problem for Lapunov's functions.

УСТОЙЧИВОСТЬ И НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА КРАТНЫХ СИСТЕМ ГИРОСИЛОВЫХ СТАБИЛИЗАТОРОВ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

Матросов В.М., Сомов Е.И.

Центр исследований устойчивости и нелинейной динамики
ИМАШ РАН, Москва, Россия
Самарский научный центр РАН, Россия

В рамках полной (нутационной) теории гироскопических систем [1,2] рассматриваются вопросы устойчивости и нелинейной динамики систем силовой гироскопической стабилизации космических аппаратов (КА) [3] при неполной диссипации. Для кратных систем гиросиловых стабилизаторов на основе четырех и шести двухстепенных силовых гироскопов (гиродинов) приводятся результаты нелинейного анализа их сингулярных состояний и представляются явные аналитические функции распределения суммарного вектора кинетического момента между гиродинами для устранения их избыточности и сингулярности. Эти функции используются далее при аналитическом синтезе структуры нелинейного закона управления гиродинами на основе метода линеаризующей обратной связи. Ставится и решается задача нелинейного анализа устойчивости рассматриваемой механической управляемой системы с неполной диссипацией по функциям [4,5] от координат пространства ее состояния, в частности в отношении вектора суммарного кинетического момента системы гиродинов. Нелинейный анализ устойчивости выполняется на основе функции Ляпунова в форме Н.Г. Четаева, теорема 4.2 в [5] обобщается для анализа устойчивости процессов силовой гироскопической стабилизации корпуса КА как твердого тела по выбранным функциям.

На основе глобального нелинейного преобразования нелинейных афинных управляемых систем к каноническому представлению, аналитического синтеза линеаризующей обратной связи с одновременным построением векторной функции Ляпунова (ВФЛ) в виде совокупности векторных норм для подсистем, разработан конструктивный метод построения ВФЛ, которая применяется для синтеза нелинейных гиросиловых систем управления ориентацией упругого КА в исходных координатах, анализа их динамических свойств и получения гарантированных оценок качества, в том числе для синтеза робастного (в отношении структурных и параметрических возмущений) цифрового управления гиродинами при неполном измерении состояния [6,7]. Эффективность созданных методов подтверждается результатами компьютерной имитации гиросиловой системы управления конкретного российского КА.

Работа поддержана РФФИ (гранты 04-01-96501, 07-08-97611) и программой исследований №18 Отделения энергетики, механики, машиностроения и процессов управления РАН.

Литература

[1] Матросов В.М. К вопросу устойчивости гироскопических систем // Труды КАИ, сер. Математика и механика, вып. 49. Казань: 1959. С. 3-24.
[2] Меркин Д.Р. Гироскопические системы. М: Наука. 1974. 344 С.
[3] Раушенбах Б.В., Токарь Е.Н. Управление ориентацией космических аппаратов. М: Наука. 1974. 600 С. Ляпунов А.М. Собрание сочинений. Том 2. М: Изд-во АН СССР. 1956. 472 С.
[4] Матросов В.М. Метод векторных функций Ляпунова: анализ динамических свойств нелинейных систем. М: Наука. 2001. 384 С.
[5] Matrosov V.M., Somov Ye.I. Nonlinear problems of spacecraft fault tolerant control systems // Nonlinear Problems in Aviation and Aerospace. Vol. 12: Advanced in Dynamics and Control. Boca Raton: A CRC Press Company. 2004. P. 309-331.
[6] Сомов Е.И. Робастная стабилизация упругих космических аппаратов при неполном дискретном измерении и запаздывании в управлении // Известия РАН. Теория и системы управления. № 2. 2001. С. 124-143.

Stability and Nonlinear Dynamics of the Spacecraft Multiple Gyromoment Stabilizer Systems

Matrosov V.M., Somov Ye.I.

Stability and Nonlinear Dynamics Research Center of the IMASH, RAS, Moscow, Russia
Samara Scientific Center, Russian Academy of Sciences, Russia

In the frame of complete (nutation) theory of gyroscopic systems, the stability and nonlinear dynamics problems by the gyromoment systems for a spacecraft stabilization at incomplete dissipation are considered. Nonlinear analysis of stability for the mechanical controlled systems with respect to *functions* of their state space coordinates, is carried out by Lyapunov function in the N.G. Chetayev form. Method of vector Lyapunov functions (VLF) is applied in cooperation with the exact feedback linearization technique for dynamical synthesis of a gyrodines' robust digital control at incomplete discrete measurements of the spacecraft state. Some results on dynamic properties by Russian spacecraft attitude gyromoment digital control system, are presented.

ОЦЕНКИ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМ МЕТОДОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА ВО ВЛОЖЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

Мельников Г.И.

Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, Россия

Для получения уточненных оценок качества устойчивости движения нелинейных динамических систем в конечной области пространства состояния предложен процесс построения конечного множества положительно определенных функций, применяемых во вложенных областях или в кольцевых областях. Посредством нормирования функций Ляпунова находится одно дифференциальное уравнение с кусочно-непрерывной правой частью, определяющее характер затухания переходных процессов, приближения движений к невозмущенному движению. Рассматривается также случай двух притягивающих центров с применением положительно определенной функции в кольцевой области и знакопеременных функций.

Поддержан грантом РФФИ 06-08-01338

Литература

Мельников Г.И. Некоторые вопросы прямого метода Ляпунова // Доклады АН СССР. - 1956.-Т. 110, № 3.

Мельников Г.И. Динамика нелинейных механических и электромеханических систем. - Л.: Машиностроение, 1975. - 200 с.

Мельников Г.И. Об устойчивости движения в кольцевой области // Математическая физика. - 1979. - Вып. 26. - С. 62-65.

Матросов В.М. Метод векторных функций Ляпунова: Анализ динамических свойств нелинейных систем.- М.: Физматлит, 2001.-384 с.

A Method of Differential Inequalities for Lyapunov Functions in Estimations of System Stability in Enclosed Areas

Melnikov G.I.

Saint-Petersburg State University of Information Technologies, Mechanics and Optics, Russia

This paper presents a new method for nonlinear systems stability estimation in a final area of state space. This method uses a final set of positively definite in enclosed areas functions or positively definite in ring areas functions. The normalization of Lyapunov functions is used to obtain the differential equation with the piecewise continuous right part. This equation determines the transient performance of the system. The application of the positively definite in a ring area function and the sign-varying functions to a case of two centers of attraction is considered.

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА КАРТИНЫ ВЕТВЛЕНИЯ СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Ободан Н.И., Громов В.А.

Днепропетровский национальный университет, Украина

Предлагается метод построения ветвей вторичного и третичного ветвления двумерной краевой задачи нелинейной теории оболочек и анализа соответствующих точек бифуркации. Рассматривается вариационная постановка задачи, решение, представленное в виде произведения двух функций одной координаты, находится итеративно. Указанные функции отыскиваются как решения одномерных краевых задач, полученных из условий стационарности вариационной задачи. В качестве коэффициентов в системах обыкновенных дифференциальных уравнений выступают определённые интегралы от решений данных краевых задач, полученных на предыдущей итерации, и их производных. Краевые задачи решаются методом сведения к эквивалентной задаче Коши типа метода Ньютона. Для отыскания удачного начального приближения для данного итерационного процесса используется метод продолжения по параметру внешнего воздействия; при движении по параметру фиксируются особые точки [1]: предельные точки и точки бифуркации. Предельные точки обходятся с помощью смены ведущего параметра; для получения ветвей решения, исходящих из точки бифуркации, использовался метод возмущения.

В качестве примера применения данного метода была построена картина ветвления нелинейной краевой задачи теории оболочек для случая цилиндрической оболочки. Оказалось, что структура ветвления нелинейной краевой задачи для цилиндрической оболочки, подвергнутой действию равномерного осевого сжатия, характеризуется следующими типами ветвей решения: исходящий из нуля координат ствол; ветви регулярных в обоих направлениях решений; ветви, которым соответствуют решения с одним или несколькими поясами вмятин — то есть решения регулярные в окружном направлении и локальные в продольном; локальные ветви, которым соответствует локальная в обоих направлениях форма или группа вмятин, лежащих в одном поясе, — локальные в обоих направлениях решения. При этом, каждый последующий тип ветви ответвляется от предыдущего: ответвление регулярных ветвей от ствола сопровождается вырождением операторов обеих краевых задач, ответвление ветвей регулярных в окружном и локальных в продольном направление решений сопровождается вырождением продольного оператора, ответвление локальных ветвей — вырождением окружного оператора. Для данной задачи характерно двукратное вырождение в точках бифуркации, фиксируемых на стволе и ветвях регулярных форм, и однократное для всех остальных точек бифуркации.

Структура ветвления нелинейной краевой задачи, описывающей поведение цилиндрической оболочки, подвергнутой действию равномерного внешнего давления, характеризуется наличием следующих ветвей: ствол, ветви регулярных форм, ветви локальных форм; при этом ветви регулярных форм ответвляются от ствола, а ветви локальных форм ответвляются от ветвей регулярных форм [2]. В некоторых случаях фиксировалось и третичное ветвление. Все особые точки в данной задаче связаны с вырождением окружного оператора и в общем случае характеризуются однократным вырождением.

Полученные решения продемонстрировали хорошее соответствие с известными экспериментальными данными.

Литература

[1] Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления нелинейных уравнений. - М.: Наука, 1969. - 528 с.

[2] Андреев Л. В., Ободан Н. И., Лебедев А. Г. Устойчивость оболочек при неосесимметричной деформации. - М.: Наука, 1988. - 208 с.

The Numerical Method for Non-Linear PDEs Branching Analysis

Obodan N.I., Gromov V.A.

Dnepropetrovsk National University, Ukraine

The new iterative method intended to solve essentially non-linear PDEs is put forward. The method coupled with the path-tracing method allows to construct primary, secondary, and so on bifurcation paths and analyze respective points of branching. The method doesn't depend on the approximative functions' order and type shemas to ensure structural stability of the analysis. The non-linear shell theory equations are solved with employment of the method.

НИЖЕГОРОДСКИЙ ПЕРИОД ЖИЗНИ АЛЕКСАНДРА МИХАЙЛОВИЧА ЛЯПУНОВА

Пакшина Н.А.

Арзамасский политехнический институт (филиал НГТУ), Россия

Не вызывает сомнения необходимость серьезного изучения деятельности крупных ученых. Если говорить о теории управления, то звездой первой величины, несомненно, является академик Александр Михайлович Ляпунов (1857-1918). А.М. Ляпунов — основоположник современной теории устойчивости. Труды Ляпунова служили, и будут служить неиссякаемым источником для творческой деятельности многих поколений механиков и математиков.

Информацию о жизни и деятельности А.М. Ляпунова можно найти на многочисленных сайтах. Во всех биографических справках говорится о том, что родился он в Ярославле, учился и работал в Санкт-Петербурге, свою знаменитую диссертацию написал в Харькове, а умер в Одессе. Но сказать, что в его биографии совсем не осталось «белых пятен» и неточностей нельзя.

Жизнь великого математика была тесно связана с Нижегородской землей в течении длительного периода. Это, прежде всего детство, которые он провел в Теплом Стане (нынешнее название — Сеченово) и в Болобонове (на территории Пильнского района). В 19 веке эти земли относились к Симбирской губернии, а сейчас это Нижегородская область.

Но особенно мало информации, представлено по Нижегородскому периоду жизни семьи Ляпуновых, т.е. периоду, который охватывает с 1870 года по 1876, а ряд фактов его биографии до недавнего времени вообще был неизвестен. А ведь именно в годы учебы в гимназии у математика закладывался тот самый фундамент, который в будущем станет опорой для научных исследований и открытий. Летом 1870 года семья Ляпуновых переехала в Нижний Новгород. 11 августа 1870 года документы Саши были поданы в Нижегородскую Губернскую гимназию. По результатам вступительных испытаний 28 августа Саша был зачислен в 3-й класс. В Центральном Архиве Нижегородской области (ЦАНО) сохранилось много документов, касающихся обучения в гимназии Александра Ляпунова:

- Экзаменационный список учеников гимназии 1870–1871 года;
- Многочисленные ведомости об успехах и поведении учеников Нижегородской гимназии за 1870–1876 годы;
- Программы выпускных экзаменов;
- Аттестат;
- Классные кондуитные журналы т.д.

В архиве были обнаружены материалы о том, что в 1873 году Александру Ляпунову было выдано свидетельство на право давать частные уроки. Это говорит, с одной стороны о его успехах, а с другой об определенных материальных трудностях семьи. В старших классах у А.М. Ляпунова появилось стремление к точным наукам, которым он уделял много внимания. Гимназию Александр Ляпунов окончил с золотой медалью. Автором были найдены документы, рассказывающие о том, как по ходатайству матери, Софьи Александровны, Нижегородским Дворянским Собранием ему было назначено денежное пособие, в виде дворянской стипендии на все время обучения в Санкт-Петербургском университете. Большинство этих документов не публиковались ранее. Планируется в год 150-летнего юбилея оформить эти материалы и выложить на сайт нашего института.

The Nizhniy Novgorod Period of Alexander Lyapunov's Life

Pakshina N.A.

Nizhny Novgorod State Technical University at Arzamas, Russia

The history of science plays important role in control education. In this paper the little-known Nizhniy Novgorod period of Alexander Lyapunov's life is considered. The list of rare archival materials connected with this period is presented.

РАВНОМЕРНО АСИМПТОТИЧЕСКИ УСТОЙЧИВЫЕ ИНВАРИАНТНЫЕ МНОЖЕСТВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ И ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА

Панасенко Е.А., Тонков Е.Л.

Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, Россия
Удмуртский государственный университет, Россия

Для фиксированной топологической динамической системы (Σ, f^t) и заданной функции $F\colon \Sigma \times R^n \to \operatorname{comp}(R^n)$ рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(f^t\sigma, x), \quad t \in R \tag{1}$$

и "овыпукленное" дифференциальное включение

$$\dot{x} \in \operatorname{co}F(f^t\sigma, x). \tag{2}$$

Пусть при каждом $\sigma \in \Sigma$ функция $t \to f^t\sigma$ локально липшицева, функция $(t, x) \to F(f^t\sigma, x)$ удовлетворяет условиям Каратеодори и всякое решение включения (1) определено при $t \geq 0$.

Обозначим $S(t, \omega)$, где $\omega = (\sigma, X) \in \Omega = \Sigma \times \operatorname{comp}(R^n)$, — сечение интегральной воронки включения (2) и рассмотрим динамическую систему (Ω, g^t), где $g^t\omega = (f^t\sigma, S(t, \omega))$. Далее, для заданной непрерывной функции $\sigma \to M(\sigma) \in \operatorname{comp}(R^n)$ построим множества $\mathcal{M} \doteq \{\omega = (\sigma, X) \in \Omega\colon X \subset M(\sigma)\}$ и $\mathcal{M}^r \doteq \{\omega = (\sigma, X) \in \Omega\colon X \subset M^r(\sigma)\}$, где $M^r(\sigma)$ — r-окрестность множества $M(\sigma)$.

Определение. Множество $\mathcal{M}$ называется: а) *положительно инвариантным*, если $g^t\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$ для всех $t \geq 0$; б) *устойчиво положительно инвариантным*, если $\mathcal{M}$ положительно инвариантно и для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$ что $g^t\mathcal{M}^\delta \subset \mathcal{M}^\varepsilon$ для всех $t \geq 0$; в) *асимптотически устойчивым*, если оно устойчиво положительно инвариантно и $g^t\omega \to \mathcal{M}$ для всякой точки ω, близкой к $\mathcal{M}$.

Обозначим $\mathcal{N}^r = \{\omega = (\sigma, x) \in \mathcal{M}^r \colon \omega \notin \mathcal{M}\}$. Непрерывная функция $V\colon \mathcal{M}^r \to R$ называется *функцией Ляпунова*, если $V(\omega) = 0$ для всех $\omega \in \partial\mathcal{M}$ и $V(\omega) > 0$ при $\omega \in \mathcal{N}^r$. Далее, функция Ляпунова V называется *определенно положительной*, если для любого $\varepsilon \in (0, r)$ найдется такое $\delta > 0$, что $V(\omega) \geq \delta$ при всех $\omega \in \partial\mathcal{M}^\varepsilon$.

Для $r > 0$ и локально липшицевой функции $V\colon \mathcal{M}^r \to R$, предел

$$V^0(\omega; q) \doteq \limsup_{(\vartheta, y, \delta) \to (0, x, +0)} \frac{V(f^{\delta\tau}(f^\vartheta\sigma), y + \delta h) - V(f^\vartheta\sigma, y)}{\delta}$$

называется *производной* функции V в точке $\omega = (\sigma, x)$ по направлению $q = (\tau, h) \in R \times R^n$. Далее, если $q = (1, h)$, то $V_F^0(\omega) \doteq \max\limits_{h \in F(\omega)} V^0(\omega; q)$ называется *производной V в силу включения* (1).

Теорема. *Если существует определенно положительная функция Ляпунова V такая, что $V_F^0(\omega) \leq 0$ при всех $\omega \in \mathcal{N}^r$ и для всех достаточно малых $\alpha > 0$, любого $\omega \in S_\alpha \doteq \{\omega \in \Omega\colon V(\omega) = \alpha\}$ и каждого решения $\varphi(t, \omega)$ включения* (2) *найдется такое $\tau > 0$, что $V(g^\tau\omega) \neq \alpha$ то множество $\mathcal{M}$ асимптотически устойчиво.*

Получены следствия этой теоремы для дифференциального включения $\dot{x} \in F(t, x)$

Аналогичные утверждения имеют место для слабой асимптотической устойчивости слабо инвариантного множества $\mathcal{M}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 04-01-00324 и 06-01-00258).

Uniformly Asymptotically Stable Invariant Sets for Differential Inclusions and Lyapunov Functions

Panasenko E.A., Tonkov E.L.

Tambov State University named by G.R. Derzhavin, Russia
Udmurtia State University, Russia

The conditions, under which a positively invariant set in the extended phase space of non-autonomous differential inclusion is asymptotically stable uniformly with respect to the initial time, are under discussion. The conditions are to be formulated in the terms of Lyapunov functions.

УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ЛЯПУНОВУ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ В НЕКОТОРЫХ КОМПАКТНЫХ КОЛЬЦАХ

Петров Н.Н.

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

В докладе рассматриваются некоторые модели в нейрофизиологии, имеющие *когнитивный* смысл. Составляющими каждой такой модели являются: *мозг*, состоящий из счетной линейно упорядоченной цепи нейронов, и *логический оператор*, преобразующий информационное состояние этой цепи. Информационное состояние нейрона характеризуется одним из чисел $0, 1, \ldots, m-1$, где m — число уровней его "возбуждения". В простейшем случае $m = 2$ нейрон может находиться только в двух состояниях: firing и nonfiring. Информационное состояние всей цепи описывается целым m-адическим числом, где m произвольное натуральное число, которое на практике должно определяться экспериментально. Множество Z_m всех целых m-адических чисел представляет собой компактное коммутативное ассоциативное кольцо с единицей. Логический оператор $P\colon Z_m \to Z_m$ представляет собой многочлен с коэффициентами из Z_m. Показано, что использование целых m-адических чисел вынуждено: описание информационного состояния цепи с помощью вещественных чисел в m-ичной системе счисления неадекватно. Пусть $x_0 \in Z_m$ — начальное информационное состояние цепи, которое интерпретируется как "приближенное представление о предмете изучения". Итерации $x_n = P(x_{n-1})$, $n = 1, 2, \ldots$, трактуются как "уточнения" этого представления. Если $x_n \to x^*$ (в стандартной топологии Z_m), то x^* интерпретируется как "истинное представление о предмете изучения". Доказывается, что *всякая неподвижная точка оператора P устойчива по Ляпунову.* Таким образом, оператор имеет когнитивный смысл: он "не портит" предыдущие итерации, если они достаточно близки к неподвижной точке. Пусть x^* — неподвижная точка многочлена P. Назовем x^* точкой I (II) типа, если все итерации, начинающиеся в некоторой окрестности x^*, стремятся (не стремятся) к x^*. Во всех остальных случаях будем называть x^* точкой III типа. Следующая классификационная теорема доказана для $m = 10$ ([1, 2]).

Пусть $A\colon = P'(x^*)$ — значение формальной производной многочлена P в точке x^*. Тогда
x^* – точка I типа, если и только если A начинается с 0,
x^* – точка II типа, если и только если A начинается с 1, 3, 7, 9 ,
x^* – точка III типа, если и только если A начинается с 2, 4, 6, 8 или 5.
Можно показать, что если m — простое число, то III тип невозможен. В этом случае "задача" либо "тривиальна" (I тип), либо "не решается" (II тип). Если же, например, $m = 10$, то чтобы получить "решение задачи" для неподвижной точки III типа, надо правильно выбрать начальное приближение, для чего необходимо использовать "интуицию". Таким образом, кольца Z_m, отвечающие составным m, более адекватно описывают процесс "решения задачи".

Следует признать, что пока процессы мышления лежат за пределами нашего понимания. То же можно сказать и о процессах, протекающих в микромире на "планковских расстояниях". Описание этих процессов требует числовых полей, отличных от поля вещественных чисел. Разумная альтернатива состоит в использовании полей p-адических чисел с простыми p или колец типа Z_m. "Геометрически" этот переход состоит в замене отрезка прямой кольцом Z_m, которое для любого m гомеоморфно *канторову совершенному множеству.* Последнее представляет собой фрактал, структура которого отражает роль "хаоса" в процессах, лежащих за пределами нашего понимания.

Литература

[1] Антонов А. В., Петров Н. Н. Предельное поведение полиномиальных итераций в некоторых компактных кольцах // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 1996. Вып. 4. С. 35–41.
[2] Петров Н. Н., Жиглевич А. Б. О четырех решениях уравнения $x^2 = x$ // Квант. 1989. № 11. С. 14–18.

Lyapunov Stability of Fixed Points for Polinomial Maps in Some Compact Rings

Petrov N.N.

Saint Petersburg State University, Russia

In the talk some theorems on Lyapunov stability of fixed points for polynomial maps in the ring of integer m-adic numbers are presented. Those are used in some cognitive models describing processes of thinking. A connection between these problems and ones arising in the study of microcosm is discussed.

ЧАСТОТНЫЙ МЕТОД ОЦЕНКИ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ МНОГОМЕРНЫХ НЕГОЛОНОМНЫХ СИСТЕМ, ВКЛЮЧАЮЩИХ УПРУГИЕ ЗВЕНЬЯ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Санкин Ю.Н.

Ульяновский Государственный Технический Университет, Россия

В предлагаемой работе рассматривается задача устойчивости неголономной системы, включающей упругое звено с распределёнными параметрами в частотной постановке. В основу положены идеи из работы [1]. Динамические характеристики вязкоупругих систем строятся согласно методике, изложенной в работе [2]. Используется частотный критерий, вывод которого дан в работе [3]. Приложение касается задачи курсовой устойчивости автомобиля. При этом рассматривается два варианта постановки задачи: 1. в инерциальной системе координат, движущейся со скоростью автомобиля, и 2. в осях, связанных с его рамой. Разработана частотная методика определения критической скорости автомобиля при нелинейном взаимодействии шин с дорожным покрытием, позволяющая сформулировать требования к условиям движения в неблагоприятных дорожных условиях. В первом случае, благодаря учёту рассеяния энергии, особые точки передаточной функции переходят в левую полуплоскость, что делает возможным применение частотного метода [4]. Во втором случае, после линеаризации уравнений объекта, оказывается, что суждение об устойчивости возможно при нулевом значении частотного параметра. Применение частотного метода позволяет сравнительно легко учесть влияние динамических характеристик водителя на курсовую устойчивость автомобиля [5].

Л и т е р а т у р а

[1] Лурье А.И. Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. - М.: Гостехтеориздат, 1951. -216 с.

[2] Санкин Ю.Н. Метод конечных элементов в пространстве преобразований Лапласа /Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. "Математическая" Вып.45. Дифференциальные уравнения и их приложения. №4,-2006.- С. 90-98.

[3] Санкин Ю.Н. Частотный критерий устойчивости нелинейных замкнутых систем, включающих вязкоупругое звено с распределенными параметрами // Труды Средневолжского Математического общества. Т.7, №1, 2005.- С. 154-162.

[4] Санкин Ю. Н. Исследование курсовой устойчивости автомобиля при нелинейном взаимодействии шин с дорожным покрытием / Ю. Н. Санкин, М. В. Гурьянов // Вестник машиностроения. - 2006. - №1. - С. 20-25.

[5] Санкин Ю.Н. Курсовая устойчивость автомобиля с учётом динамических характеристик водителя / Ю.Н. Санкин, А.В. Калёнов // Вестник Ульяновского государственного технического университета.- 2006.-№1.-С. 35-38.

Frequency Method for the Stability Estimation of Nonlinear Multi-Dimensional Nonholonomic Systems, Including Elastic Link with Distributed Parameters

Sankin Yu.N.

Ulianovsk State Technical University, Russia

In the present work, the stability of nonholonomic systems including elastic link with distributed parameters is studied in the frequency domain. Applications are connected with the vehicle yaw stability at nonlinear interaction of tires with road covering in disadvantageous road conditions. Two variants of mathematical models are considered: 1. differential equations are written in the inertial frame of reference, and 2. in the frame of reference bounded with the vehicle body. The employment of frequency method permits accounting the influence of driver dynamical characteristics on the vehicle stability.

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ В КРИТИЧЕСКИХ СЛУЧАЯХ ДЛЯ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ВОЛЬТЕРРА

Сергеев В.С.

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, Россия

Рассматриваются интегродифференциальные уравнения с экспоненциально убывающими интегральными ядрами разностного типа и голоморфной нелинейностью, разложение которой в степенной ряд в окрестности нуля имеет непрерывные по независимой переменной ограниченные коэффициенты.

Исследуется задача об устойчивости по Ляпунову в критическом случае одного нулевого характеристического показателя решений линеаризованного уравнения при прочих отрицательных показателях. Даются утверждения о неустойчивости нулевого решения.

В случае, когда коэффициенты разложения в степенной ряд для нелинейности постоянны или экспоненциально убывают, вопрос об устойчивости в критических случаях одного нулевого или пары чисто мнимых корней характеристического уравнения сводится к анализу знака некоторой постоянной, названной постоянной Ляпунова. Указываются теоремы о неустойчивости. Если интегральные ядра имеют экспоненциально-полиномиальную структуру, то показано, что постоянная Ляпунова полностью решает вопрос об устойчивости, и соответствующие утверждения представляют собой критерии.

Some Problems of Stability Investigation in Critical Cases for Integrodifferential Equations of Volterra Type

Sergeev V.S.

Dorodnicyn Computing Center of the Russian Academy of Sciences, Russia

The Integrodifferential equations with kernels of convolution type are considered. The problem on stability in Lyapunov's senses is investigated in the critical cases on one zero characteristic exponent and two zero characteristic exponents. The statements on instability of the trivial solution are given.

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПАРАМЕТРОМ

Терехин М.Т.

Рязанский государственный университет им. С.А. Есенина, Россия

Рассматривается система дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = A(t)x + f(t, x, \lambda), \tag{1}$$

в котором x — n-мерный вектор, λ — m-мерный вектор-параметр, на множестве $D(\delta_0) = \{(t, x, \lambda) \colon t \in [0, \omega], |x| \leq \delta_0, |\lambda| \leq \delta_0\}$, δ_0 — некоторое положительное число, матрица $A(t)$ и вектор-функция $f(t, x, \lambda)$ определены, непрерывны, ω — периодические по t, $f(t, 0, \lambda) = 0$.

Ставится задача — определить условия существования ненулевого ω-периодического решения системы (1).

Символом $x(t, \alpha, \lambda)$ обозначается решение системы (1), удовлетворяющее условию $x(t, \alpha, \lambda) = \alpha$.

Установлено, что решение $x(t, \alpha, \lambda)$ системы (1) можно представить равенством $x(t, \alpha, \lambda) = X(t) + o(|\alpha|)$, в котором $X(t)$ — фундаментальная матрица системы $\dot{x} = A(t)$, $X(0) = E$, E — единичная матрица, $\lim\limits_{\alpha \to 0} \dfrac{o(|\alpha|)}{|\alpha|} = 0$.

Доказано, что для того, чтобы $x(t, \alpha, \lambda)$ было ω-периодическим решением системы (1), необходимо и достаточно, чтобы векторы α и λ удовлетворяли операторному уравнению

$$F(\alpha, \lambda) + o(|\gamma|^k) = 0, \tag{2}$$

в котором $F(\alpha, \lambda)$ — известная n-мерная вектор-функция, $\gamma = (\alpha, \lambda)$, $k \geq 2$ — некоторое натуральное число.

В докладе будут предложены методы разрешимости операторного уравнения (2).

Periodic Solution of the Nonlinear Systems of the Differential Equations with Parameter

Teryokhin M.T.

Ryazan State University, Russia

The problem of existence of non-zero ω-periodic solution of non-autonomous system of the differential equations with parameter is investigated.

It is proved, that the system of the differential equations has ω-periodic solution then and only then, when the vectors α and λ satisfy an equation $F(\alpha, \lambda) + o(|\gamma|^k) = 0$, $F(\alpha, \lambda)$ is the well-known vector-function, $\gamma = (\alpha, \lambda)$, $k \geq 2$ — natural number.

О ПЕРВОМ МЕТОДЕ ЛЯПУНОВА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Треногин В.А.

Московский государственный институт стали и сплавов, Россия

Рассмотрим в банаховом пространстве X дифференциальное уравнение при $t \geq 0$

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + R(t,x). \tag{1}$$

Предполагается, что $A(t)$ – замкнутый линейный неограниченный оператор с плотной и не зависящей от t областью определения, достаточно гладкий и являющийся при каждом производящим оператором сильно непрерывной полугруппы с экспоненциальным убыванием. Относительно нелинейного оператора $R(t,x)$ предполагается, что он достаточно гладкий и что для всех $t \geq 0$ $R(t,0) = 0$, так что ДУ (1) имеет тривиальное решение $x(t) = 0$. Рассмотрим для ДУ (1) задачу Коши с начальным условием $x(0) = x_0$ при всевозможных x_0, достаточно малых по норме. Возникает задача об устойчивости по Ляпунову тривиального решения ДУ (1). Наш подход основан на идее, что устойчивость по Ляпунову это непрерывная зависимость решения от начальных значений или других возмущений равномерно на положительной вещественной полуоси. В работах [1] и [2] в предположении независимости оператора A от времени доказан ряд теорем существования и единственности обобщенного и классического решений задачи Коши в специальных классах экспоненциально убывающих на плюс бесконечности абстрактных функций. Тем самым устанавливается ряд обобщений классической теоремы Ляпунова об устойчивости по линейному (по первому) приближению. Исследуется как аналитический (в духе первого метода Ляпунова) так и неаналитический случаи. В данной презентации предлагается дальнейшее широкое обобщение этого круга ляпуновских идей.

Литература

[1] Треногин В.А. Теорема Ляпунова об устойчивости по линейному приближению как следствие теоремы о неявных операторах. ДАН, 2006, том 407, стр. 742-746.

[2] Trenogin V.A. First Lyapunov method for the abstract parabolic equations. Works of 5th ISAAC Congress World Scientific, Singapore, 2006 (in print).

On the First Lyapunov Method for Differential Equations in Banach Space

Trenogin V.A.

Moscow State Institute of Steel and Alloys, Russia

For quasilinear DE in the Banach space with unbounded linear part, the analog of Lyapunov theorem about the stability respect to linear approximation is proved.

О ЗАДАЧАХ СЛЕЖЕНИЯ, УПРАВЛЯЕМОСТИ И СТАБИЛИЗАЦИИ ДЛЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОМБИНАЦИИ РАЗРЫВНЫХ ОБРАТНЫХ СВЯЗЕЙ И ИМПУЛЬСНЫХ УПРАВЛЕНИЙ

Финогенко И.А.

Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск, Россия

Исследуется движение механических систем, представленных уравнениями Лагранжа второго рода. Известная ранее задача о стабилизации системы релейными управлениями на принципе декомпозиции рассматривается для случая, когда целевое множество представлено разрывными по времени функциями. Это приводит к режиму декомпозиции (скользящему режиму) системы с кусочно непрерывными скоростями, т.е. к обобщенным решениям. Обеспечивается такое движение добавлением в систему импульсных управлений, которые позволяют начинать движение системы по целевому множеству минуя, переходный процесс. Роль разрывного позиционного управления (обычной функции) сводится при этом к стабилизации целевого множества системы между моментами приложения импульсов. Импульсы меняют обобщенные скорости движения по выбранной в пространстве обобщенных состояний траектории скачкообразно, в частности, могут обратить их в нуль и тогда позиционное управление стабилизирует конечное состояние системы. В свою очередь, выбором траектории движения решается задача управляемости системы, т.е. перевод ее из одного обобщенного состояния в любое другое. Обсуждается понятие решения системы дифференциальных уравнений с разрывной правой частью и дифференциальных включений при наличии в них в качестве слагаемых обобщенных функций. Предлагается способ описания траекторий системы, проходящих через заданный набор точек (обобщенных состояний), допускающий взаимосвязанный выбор времени и величины импульсных воздействий. Исследуется зависимость траектории движения от времени и величины импульсных воздействий, обосновывается правомерность предельного перехода от обычной системы с неограниченными на малых промежутках времени управлениями к импульсным системам. Исследования проводятся методом сведения системы дифференциальных уравнений с обобщенными функциями к обычной системе через замену переменных.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект № 06-01-00247) и Президиума РАН (Программа фундаментальных исследований № 22, проект 2.5)

On the Problem of Tracking, Controllability and Stabilization for Mechanical Systems with the Use of a Combination of Discontinuous Feedbacks and Impulse Controls

Finogenko I.A.

Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS, Irkutsk, Russia

Motion of mechanical systems described by Lagrange 2nd kind equations is investigated. The well-known problem bound up with stabilization of a system by relay controls on the principle of decomposition is considered for the case, when the target set is represented by the functions discontinuous with respect to time. This leads to the mode of decomposition (sliding mode) for the system with piecewise continuous velocities, i.e. to generalized solutions. Such motion is ensured by adding impulse controls to the system, such that these controls allow to start the system's motion along the target set, while avoiding transient process. The role of discontinuous positional control (ordinary function) is reduced in this case to stabilization of the system's target set between the moments of application of the impulses. The impulses spasmodically change the generalized velocities of motion along a chosen trajectory, in particular, these can reduce them to zero< and then the positional control stabilizes the system's final state. In turn, by choosing the trajectory of motion, it is possible to solve the problem of system's controllability, i.e. its transition from one generalized state to another. The concept of solution of a system of differential equations with the discontinuous right-hand side and the concept of differential inclusions, which have generalized functions in the capacity of the addends, are discussed. A technique, which is intended for describing system's trajectories passing through a given set of points (generalized states) and which assume an interconnected selection of the time and the space of impulse effects, is proposed. Dependence of the trajectory of motion on the time and the value of impulse effects is investigated; the admissible (lawful) character of the limit passage from an ordinary system, which has the controls unbounded on small time intervals, to impulse systems is grounded. The investigation is conducted by the technique which implies reduction of the system of differential equations with generalized functions to a ordinary system by replacement of the variables.

The works has been conducted with partial support of the RFFR grant (project № 06-01-00247) and the INTAS-SB RAS grant (Project № 06-100013-9019).

ВЕКТОРНЫЕ ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА И ЗАДАЧИ РОБАСТНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ

Фурасов В.Д.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Россия

Рассматриваются три круга вопросов, связанных с общей проблемой стабилизации динамических систем в условиях параметрической неопределенности.

Первый круг образуют вопросы стабилизации взаимодействующих систем при неполной информации о параметрах перекрестных связей. Их решение проводится по классической схеме теории устойчивости. Сначала каждой системе, рассматриваемой изолированно, ставится в соответствие своя функция Ляпунова и отвечающее этой функции множество законов управления. Затем найденные функции объединяются в векторную функцию Ляпунова и на ее основе устанавливаются общие соотношения, при выполнении которых устойчивость взаимодействующих систем следует из устойчивости каждой из них.

Второй круг образуют вопросы стабилизации семейства динамических систем. В отличие от известной схемы робастной стабилизации, требующей построения общей функции Ляпунова для всего стабилизируемого семейства, здесь находится семейство функций Ляпунова, определяющих общий закон стабилизации. Построенный таким образом закон совпадает с законом управления, отвечающим общей функции Ляпунова, если эта функция совпадает с каждой функцией, входящей в построенное семейство.

В третий круг входят вопросы, возникающие при обобщении установленных соотношений на задачи робастной стабилизации взаимодействующих семейств систем при неполной информации о связях между ними. В этом случае каждому семейству систем ставится в соответствие свое семейство функций Ляпунова. Построенные семейства функций, объединяясь, дают семейство векторных функций Ляпунова. На основе этого семейства и соответствующих систем сравнения формулируются условия, позволяющие о свойствах взаимодействующих семейств судить по свойствам систем, образующих такие семейства.

При рассмотрении любого круга вопросов из множества функций Ляпунова, порождающих законы стабилизации, естественным образом выделяются функции, обладающие специальными свойствами. В частности, порождающие законы управления, наилучшие в том или ином смысле и (или) обеспечивающие абсолютную устойчивость робастно стабилизируемых систем. Изложение рассматриваемых вопросов иллюстрируется многочисленными примерами.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 04-01-00389.

Vector Lyapunov Functions and Problems of Robust Stabilization

Furasov V.D.

Moscow State University, Russia

From the unified point of view on the basis of Lyapunov functions we consider three classes of problems connected to the general problem of stabilization for dynamical systems under parametric uncertainty. The first class contains the problems of stabilization of interacting systems under incomplete information on parameters for cross-connections. The second class includes the problems of robust stabilization for the family of systems. The third one concerns the problems of stabilization for interacting families of dynamical systems. From the synthesized sets of feedback laws it is possible to select stabilization laws that have special properties. Theory is illustrated by numerical examples.

ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ РАВНОВЕСИЯ ГИРОСТАТА НА КРУГОВОЙ ОРБИТЕ ПРИ СИММЕТРИЧНОМ РАСПОЛОЖЕНИИ ГИРОСТАТИЧЕСКОГО МОМЕНТА ОТНОСИТЕЛЬНО ЕГО ЦЕНТРАЛЬНОГО ЭЛЛИПСОИДА ИНЕРЦИИ

Чайкин С.В.

Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск, Россия

В ограниченной постановке рассматривается движение гиростата — твердого тела с расположенным в нем вращающимся статически и динамически уравновешенным маховиком по кеплеровой круговой орбите в центральном ньютоновском поле сил.

С использованием нового вида уравнений, определяющих относительные равновесия (состояния покоя относительно орбитальной системы координат) системы, отыскиваются равновесия и исследуется их устойчивость в случае расположения оси вращения маховика в какой-либо главной центральной плоскости инерции гиростата. Изучается бифуркация равновесий системы в зависимости от величины ее гиростатического момента.

Relative Equilibria of a Gyrostat on a Circular Orbit at the Symmetric Location of a Gyrostatic Momentum with Respect to its Central Inertia Ellipsoid

Chaikin S.V.

Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS, Irkutsk, Russia

Gyrostat motion is considered in the limited statement. Relative equilibria are found, and their stability is investigated. Bifurcation of system equilibria is studied as a function of its gyrostatic momentum.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ЛЯПУНОВУ В ЗАДАЧАХ УСТОЙЧИВОСТИ ФОРМ КОЛЕБАНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ УПРУГИХ СИСТЕМ

Шматко Т.В.

Национальный технический университет "Харьковский политехнический институт", Украина

Исследование динамического поведения механических систем и вопросы, связанные с динамической потерей устойчивости, относятся к числу актуальных проблем, возникающих при проектировании многих современных конструкций. Решение этой проблемы приводит к необходимости рассмотрения задач колебаний и устойчивости упругих систем, работающих под воздействием интенсивных динамических и, в частности, периодических нагрузок.

В нелинейных задачах с хаотической динамикой аналитическое исследование поведения системы, а также исследование устойчивости форм нелинейных колебаний в системах с несколькими степенями свободы может быть, как известно, крайне затруднено. Автором доклада был предложен эффективный численно-аналитический критерий устойчивости (неустойчивости) форм колебаний нелинейных упругих систем, который является следствием классического определения по Ляпунову. Неустойчивость форм колебаний упругих систем здесь означает "перекачку" энергии из одной формы пространственных колебаний в другую.

Для применения предложенного критерия к исследованию устойчивости форм колебаний конкретных нелинейных упругих систем (цилиндрических оболочек, пластин и пологих оболочек с заданным планом) был разработан новый метод, базирующийся на теории R-функций, вариационных методах и методе Рунге-Кутта. Получена математическая модель в виде нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Коэффициенты системы вычисляются методом R-функций в результате решения последовательности краевых задач. С помощью такого подхода решены новые задачи динамической устойчивости геометрически нелинейных пластин сложной формы под действием периодических нагрузок. Получено графическое изображение найденных областей устойчивости (неустойчивости) для широкого диапазона значений геометрических и физических параметров пластин.

К достоинствам предложенного метода относится его универсальность и возможность дальнейшего применения к широкому классу задач исследования устойчивости форм колебаний композитных пластин и пологих оболочек сложной формы при различных способах закрепления.

Литература

Mikhlin Yu.V., Manucharyan G.V., Shmatko T.V. Lyapunov definition and stability of regular or chaotic vibration modes in systems with several equilibrium positions. Computers and structures". - 2004. - № 82. - PP. 2733–2742.

Application of Lyapunov Stability Definition to the Problems of Vibration Modes Stability of Nonlinear Elastic Systems

Shmatko T.V.

National Technical University "Kharkov Polytechnical Institute Ukraine

Research method of stability of forced nonlinear vibrations of nonlinear elastic systems which are under action of intensive periodic dynamic loads is considered. The base of method is using of variational methods, R-function method, and "limited criterion of Lyapunov". Stability/unstability domains of nonlinear form vibrations of nonlinear elastic systems are determined by using designed software, based on proposed method. These systems are simulated by beams, arches, plates, cylindrical shells and shallow shells with the given plan form; the corresponding mathematical models are constructed. The results of this research can be used by the specialists for structural component designing of modern constructions.

НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ
NONLINEAR CONTROL

TOWARDS APPLICATIONS OF PROBABILISTIC INEQUALITIES IN A ROBUST CONTROL PROBLEM

Chernyshov K.R.

V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences, Moscow, Russia

In paper [1], a method of finding a robust control of a technological plant has been proposed, with the technique's entity is based on using an assumption on belonging of the technological plant's output variable distribution to a (a priori unknown) class of probability distributions in order to form a domain of admissible controls. In turn, to select representatives from the distribution class in paper [1], an entropy-based approach and dispersion analysis (the Fisher criterion). The entropy-based approach is a selection of the distributions for a "working" distribution class possessing the highest values of the entropy. But, from one hand side, it is well known that such "worst" distribution density (given a variance) is always only one, what particularly has been confirmed by numerical examples in the same paper (Table 2 in [1]), and, from another hand side, other examples, presented in [1], disprove themselves the assumption on a connection of the entropy value and the domain of admissible controls [2]. At the same time, in a general case the "working" class distribution make-up changes due to changing sample variances of the model's output variable at each step (under invariability of the initial class make-up). So, using the Fisher criterion within such a problem statement proposed in paper [1] will formally be a futile "walking over a circle". The present paper proposes a specification of the paper [1] approach, oriented to investigation of sufficient conditions guaranteeing existence of the domain of admissible controls, and, correspondingly, specification of the conditions of selection of the "worst" distribution densities. The conditions are based on applying the generalized Gauss inequality [3] (a modification of the Chebyshev inequality for the arbitrary unimodal distribution densities) also referred in literature as Gauss-Vysochanskij-Petunin one. A condition which assures the possibility to select not more than two (in case of the antisymmetric distributions) or the only one (in case of symmetric distributions only) "worst" distribution densities of the model's output variable in the "working" class of distribution densities, and, consequently, the branch of admissible robust controls corresponding to that choice of densities. A number of various numerical examples is presented confirming the theoretical results described.

A possible supplement branch of specifying the domain of admissible controls (due to increasing adequacy of its forming) is using a corresponding non-parametric estimation of the distribution density of the output variable accompanied by involving the estimated density into the "working" class of distributions: issues of deriving such estimates, in particular, the strongly consistent estimates, are at present profoundly developed, including such practically important cases as the distribution density estimation via samples of dependent observations [4].

References

[1] Bernatskii F.I., Dobrodeev D.L., Pashchenko F.F. On the reduction of capacity of the distributional class in robust control of technological plants // Automation and Remote Control. 2000. Vol. 61, No 6, part 2. P. 1003-1011.

[2] Chernyshov K.R. Information theory within identification and control problems: an unexpected review // Proceedings of the Conference "Stability and Control Processes"SCP '2005 dedicated to the 75th birthday anniversary of V.I. Zubov. Saint-Petersburg, June 29 - July 1, 2005. P. 1000-1009.

[3] Vysochanskij D.F., Petunin Yu.I. A generalization of Gauss inequality for unimodal distributions // Theory Probab. Math. Stat. 1985. Vol. 31. P. 29-34.

[4] Gyorfi L., Masry E. The L2 and strong consistency of recursive kernel density estimation from dependent samples // IEEE Transactions on Information Theory. 1990. Vol. IT-36, No 3. P. 531-539.

ON EXTERNAL POLYHEDRAL ESTIMATES OF REACHABLE SETS TO LINEAR SYSTEMS AND SYSTEMS WITH BILINEAR UNCERTAINTY

Kostousova E.K.

Institute of Mathematics and Mechanics,
Ural Branch of Russian Academy of Sciences Ekaterinburg, Russia

The reachability problem is an essential theme in control theory [1]. Among different approximation methods the techniques were developed for estimating reachable sets by domains of some fixed shape such as ellipsoids, parallelepipeds (see, for example, [1–5]).

In the paper we present external polyhedral (parallelepipedal) estimates $\mathcal{P}(t)$ of reachable sets to systems with bilinear uncertainty (linear systems under hard parallelepipedal bounds on the controls and initial states and hard interval bounds on the matrices of the system). The estimates satisfy the upper semigroup property [1] and are described by nonlinear ordinary differential equations (ODE) which, for given dynamics of orientation matrices $P(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, describe the dynamics of centers and "semi-axis values" of parallelepipeds.

Properties of these estimates are investigated for the particular case without bilinear uncertainty when the system is linear with a given matrix A. It is known [5] that if $P(t)$ satisfy ODE $\dot{P} = A\,P$, then the corresponding estimates $\mathcal{P}(t)$ are touching (tight [2] in n specific directions). Here we assume that A is Hurwitz (all eigenvalues have negative real parts) and $P(t)$ satisfy either $P(t) \equiv$Const$= P_0$ or $\dot{P} = A\,P$, $P(0) = P_0$, and examine the question: under which matrices P_0 the estimates $\mathcal{P}(t)$ are bounded/unbounded as $t \to \infty$? In particular, the criterions (formulated in terms of eigenvalues of A and properties of bounding sets) are found which ensure that either there exist P_0 such that $\mathcal{P}(t)$ are bounded or estimates $\mathcal{P}(t)$ are unbounded for each P_0. For the case of time-invariant linear systems the system of ODE and algebraic relations is derived (on the base of an idea from [6]) which determines estimates $\mathcal{P}(t)$ with constant orientation matrices. These estimates do not satisfy the upper semigroup property, but are touching and also are bounded if A is Hurwitz.

Supported by the Russian Foundation for Basic Research (Project N 06-01-00483) and by the Russian Programm for Support of Leading Scientific Schools (Project N 5344.2006.1).

References

[1] Kurzhanski A.B., Vályi I. Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control. Birkhäuser, Boston, 1997.

[2] Kurzhanski A.B., Varaiya P. On ellipsoidal techniques for reachability analysis. Parts I, II // Optimization Methods & Software, 2002, vol.17, N 2, pp. 177–237.

[3] Filippova T.F., Lisin D.V. On the estimation of trajectory tubes of differential inclusions // Proc. of the Steklov Institute of Mathematics, 2000, Suppl. 2, pp. S28–S37.

[4] Kostousova E.K., Kurzhanski A.B. Theoretical framework and approximation techniques for parallel computation in set-membership state estimation // CESA'96 IMACS Multiconference Computational Engineering in Systems Applications, Lille, France, July 9-12,1996. Symposium on Modelling, Analysis and Simulation. Proc., vol.2., pp. 849–854.

[5] Kostousova E.K. State estimation for dynamic systems via parallelotopes: optimization and parallel computations // Optimization Methods & Software, 1998, vol.9, N 4, pp.269–306.

[6] Girard A., Guernic C.L., Maler O. Efficient computation of reachable sets of linear time-invariant systems with inputs // Hybrid Systems: Computation and Control, vol. 3927 in LNCS, Springer, 2006, pp. 257–271.

MULTIPLE LYAPUNOV FUNCTIONS FOR IMPULSIVE SWITCHED SYSTEMS

Liguo Zhang, Yangzhou Chen, and Pingyuan Cui

School of Electronic and Control Engineering,
Beijing University of Technology, Beijing, China

Both switched dynamical systems and impulsive dynamical systems are studied extensively in the literature. However, impulsive switched systems in which the state may change discontinuously at switching times are not yet well studied. Nonetheless, many physical systems exhibit both system switching and impulsive jump phenomena. This paper investigates stability of a class of impulsive switched systems by using the Branicky's multiple Lyapunov functions approach. Sufficient conditions for stability of those systems are established. Some examples are given to illustrate the applicability of our results.

An impulsive switched system with impulses at fixed times is described as follows:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f_i(x(t)) & t \in (t_k, t_{k+1}] \\ x(t_k^+) = g_{ij}(x(t_k)) & t = t_k \\ x(t_0^+) = x_0 & k = 1, 2, ... \end{cases} \tag{1}$$

where $x(t) \in R^n$, $i, j = 1, 2, ..., N$, $f(\cdot) : R^n \to R^n$ globally Lipschitz continuous with $f_i(0) = 0$, $g_{ij}(\cdot) : R^n \to R^n$ is continuous . Here, t_k^+ is time just after t_k, $\{t_k\}$ satisfy

$$t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_k < t_{k+1} < ..., \;\; t_k \to \infty \;\text{ as }\; k \to \infty$$

and $x(t_k^+) = \lim_{t \to t_k} x(t)$.

Theorem. *Let S be the set of all switching sequences associated with the system (1), $S|i$ the endpoints of times that system i is active. V_i is Lyapunov-like function for f_i and $x_S(\cdot)$ over $S|i$, then the system (1) is stable in the sense of Lyapunov. Additionally, the system is asymptotically stable if for some ε_i and δ_i*

$$\dot{V}_i(x(t)) < -\varepsilon_i \|x(t)\|^2 \tag{2}$$

for t in $S|i$, and V_i are strictly decreasing on $S|i$:

$$V_i(x(t_k)) - V_i(x(t_l)) < -\delta_i \|x(t_l)\|^2 \tag{3}$$

where $t_k < t_l$, and $i_l = i_k = i$.

THE MINIMAL ROBUST POSITIVELY INVARIANT SET AND ITS INVARIANT APPROXIMATIONS VIA FINITE TIME AUMANN INTEGRALS

Rakovic S.V. and Kouramas K.I.

The Automatic Control Laboratory, ETH Zurich

This paper provides results on the minimal robust positively invariant set and its robust positively invariant approximations of an asymptotically stable, continuous-time, linear time-invariant system subject to additive but bounded uncertainty. The minimal robust positively invariant set is characterized as an infinite time Aumann Integral.

A novel family of robust positively invariant sets, defined as a simple scaling of a finite time Aumann Integral is characterized. Adequate members of this family are robust positively invariant sets and are arbitrarily close outer approximations of the minimal robust positively invariant set. Conditions are given that allow one to specify a priori the accuracy of the approximation.

A practical result, based on optimal control theory, for the construction of safe polytopic sets is also provided.

Computational procedures are briefly discussed and connection with the recent methods for the reachability computations is provided. Some simple examples illustrate the reported results.

APPROXIMATE MODELING OF A CLASS OF NONLINEAR OSCILLATORS USING TAKAGI–SUGENO FUZZY SYSTEMS

Schulte H.

Bosch Rexroth AG, Hydraulic Machines, System- and Control Engineering, Elchingen

An effective modeling of nonlinearities and the analysis of the influence on the closed loop dynamics is often crucial for high performance control applications. For this reason this work presents an analytical method of approximate description of a class of nonlinear systems. Instead of studying the exact nonlinear models to enlarge the description capability compared to linear models we will use a Takagi–Sugeno (TS) fuzzy system [1], that consists of a time-variable weighted combination of linear state-space models. The set of linear state-space models define a polytope in the model-parameter space also called a Polytopic Linear Model (PLM).

The emphasis in this work will be on a systematic description of the construction of fuzzy systems from known nonlinear models based on an error analysis as a function of model complexity. An upper bound on the number of models will be derived that is sufficient to construct a TS fuzzy system with predefined accuracy. The TS fuzzy system may be seen here as a compromise between general nonlinear models that can be very accurate but due to their complexity difficult to apply in model-based control schemes and linear time invariant (LTI) systems that can be very simple and easy to use for control design purposes but the expected behavior of a nonlinear system can only be guaranteed for operating conditions that are close to the point of linearization.

This paper is organized as follows: First of all, the Takagi–Sugeno fuzzy system structure is introduced and some analytical interpretations are given. After that the approximate construction of TS fuzzy systems from known nonlinear models are explained. An error analysis and some approximation properties are investigated. The total number of local models and a grid of equilibrium points are determined on a compact space by an analytically derived equation that is a function of a given upper bound of the model error.

The construction method is applied to mechanical oscillators with nonlinear springs and dampers. Further on some simulation results will be presented in comparison with simulations using the known nonlinear models. Finally, in the application of the above derived model a nonlinear state-feedback controller design following [2] is briefly described.

References

[1] T. Takagi and M. Sugeno, Fuzzy identification of systems and its application to modelling in control, IEEE Transactions on System, Man and Cybernetics, vol. 15, no. 1, pp. 116–132, 1985.

[2] H. O. Wang, K. Tanaka and M. F. Griffin, An Approach to Fuzzy Control of Nonlinear Systems: Stability and Design Issues, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, vol. 4, no. 1, pp. 14–23, 1996.

DYNAMIC PROPERTIES OF NONLINEAR INTERVAL SYSTEMS

Sokolova S.P., Sokolova L.A.

Saint-Petersburg Institute for Informatics of RAS, Russia

New progress and research in intelligent techniques, based on information processing implementing protein molecules' immune networks [1], processing principles appeared under the term of "immunocomputing" (IC). The principal difference between IC and other calculation methods (neurocomputing, evolutionary and genetic algorithms and so on) lies in the functions of their basic components and matches their biological prototypes and mathematic models. The basic premise here is the arbitrary IC basic components (formal proteins) interconnection within a formal immune network (FIN) [1].

This paper is on the development of the Immunocomputing approach to the class of nonlinear uncertainty systems with and without time-delay. The parametric uncertainties are characterized by a relationship of the true values of the parameters to intervals. These have known boundaries. Actually the interval model of a system mirrors a real situation with the information on values of its parameters, when a priori only the boundaries of the interval are known. Therefore, using the rules and nomenclature of interval mathematics we can represent it as mathematical model.

The next scientific results are presented:

- mathematical models and calculation procedures of singular value decomposition (SVD) of interval matrices, interval binding energy, interval indices for different classes the initial data [2];
- parameter identification of the nonlinear interval dynamics mathematical model by using the interval methods of global unconstrained optimization;
- investigation of the dynamical properties (asymptotic and absolute stability, attraction and so on of the stationary sets) of nonlinear interval systems with and without time-delay and nonlinearities of sector and quadratic types.

References

[1] Tarakanov A. O., Skormin V. A., Sokolova S. P. Immunocomputing: Principles and Applications, N.Y., Springer, 2003, 193 p.

[2] Sokolova L. A. Index design by immunocomputing. Lecture Notes in Computer Science, Vol. 2787. Springer, Berlin, 2003, pp. 120–127.

STATE DEPENDENT DELAYS: RESULTS AND PROBLEMS

Walther H.-O.

Mathematisches Institut der Universität Gießen, Germany

We present recent progress in (autonomous) differential equations with state-dependent delay. For such equations the initial value problem is well-posed on a Banach manifold which depends on the equation. The solution operators are continuously differentiable. More smoothness is still an open problem, as well as optimal smoothness for stable and center-stable manifolds at stationary points. Also, the usual construction of such infinite-dimensional local invariant manifolds directly for the semiflow is not yet available. — We discuss examples and modeling issues and report about work on existence of periodic solutions. This is more involved than in case of constant delay; the nature of the state-dependent delay comes into play.

Key words: State-dependent delay, functional differential equations, local invariant manifolds, periodic solutions

References

Hartung, F., Krisztin, T., Walther, H.O. and J. Wu: Functional Differential Equations with State-dependent Delay: Theory und Applications.

In HANDBOOK OF DIFFERENTIAL EQUATIONS, Ordinary Differential Equations, Volume 3, pp. 435-545, Canada, A., Drabek., P. and A. Fonda eds., Elsevier Science B.V., North Holland, Amsterdam 2006.

МЕТОД ЛОКАЛЬНОГО УЛУЧШЕНИЯ В ОДНОМ КЛАССЕ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Аксенюшкина Е.В.

Байкальский государственный университет экономики и права, Россия

Рассмотрим задачу оптимального управления (задача А)

$$\Phi_0(u) = \varphi_0(x(t_1)) \to \min,$$

$$\dot{x} = f(x,u,t), \;\; x(t_0) = x^0,$$

$$\Phi_i(u) = \varphi_i(x(t_1)) = 0, \;\; i = \overline{1,m}.$$

Построим метод улучшения управления $u(t)$ в рамках задачи А на основе процедуры слабого варьирования. Образуем семейство варьированных управлений по правилу с параметром $\alpha > 0$

$$u_\alpha(t) = u(t) + \alpha\delta u(t), \;\; t \in T.$$

Как известно [1–3], соответствующие приращения функционалов Φ_i допускают представление

$$\Phi_i(u_\alpha) - \Phi_i(u) = -\alpha \int_T < H_u^i[t,u], \delta u(t) > dt + o_i(\alpha), \;\; i = \overline{0,m}.$$

Пусть $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ — вектор множителей Лагранжа, $\mu \geq 0$ — штрафной параметр. Ведем нормальный функционал Лагранжа и штрафной функционал терминальных ограничений по принципу наименьших квадратов

$$L(u,\lambda) = \Phi_0(u) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \Phi_i, \quad P(u,\mu) = \frac{1}{2}\mu \sum_{i=1}^{m} \Phi_i^2(u).$$

Образуем модифицированный функционал Лагранжа

$$M(u,\lambda,\mu) = L(u,\lambda) + P(u,\mu).$$

Слабая вариация построенного функционала имеет вид

$$\delta M(u,\lambda,\mu) = \delta L(u,\lambda) + \delta P(u,\mu) =$$

$$= -\int_T < H_u^0[t,u] + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i H_u^i[t,u] + \mu \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(x(t_1)) H_u^i[t,u], \delta u(t) > dt.$$

Введем обозначения

$$\delta_1 u(t) = H_u^0[t,u] + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i H_u^i[t,u], \quad \delta_2 u(t) = \mu \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(x(t_1)) H_u^i[t,u].$$

Таким образом, в случае $\delta_1 u(t) \neq 0$, $\delta_2 u(t) \neq 0$ гарантировано локальное (для малых $\alpha > 0$) улучшение функционалов $L(u,\lambda^*)$, $P(u,\mu)$ для любого $\mu > 0$

$$L(u_\alpha, \lambda^*) < L(u,\lambda^*), \quad P(u_\alpha,\mu) < P(u,\mu).$$

При этом автоматически происходит локальное улучшение модифицированного функционала Лагранжа.

Литература

[1] Энеев Т.М. О применении градиентного метода в задачах теории оптимального управления. – Космические исследования, 1966, т.4, вып.5, с. 651–669.
[2] Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления. – М.: Наука, 1978. – 408 с.
[3] Срочко В.А. Итерационные методы решения задач оптимального управления. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2000. – 160 с.

Method of Local Improvement for a Class of Optimal Control Problems

Aksenyushkina E.V.

Baikal National University of Economics and Law, Russia

An optimal control problem with terminal conditions in equality form is considered. The proposed control varying procedure provides simultaneous descend with respect to Lagrange and penalty functionals by the least squares method. An improvement procedure consists of solving linear systems for Lagrange multipliers. The choice of penalty parameter is well justified.

МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ РЕШЕНИЯ ВОГНУТОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Антоник В.Г.

Иркутский государственный университет, Россия

Рассматривается задача оптимального управления в следующей постановке

$$\Phi(u) = \phi(x(t_1)) + \int_T F(x(t),t)dt \to \min\,,\ u \in V\,, \tag{1}$$

$$\dot{x} = f(x,u,t) = A(u,t) + b(u,t)\,,\ x(t_0) = x^0\,, \tag{2}$$

$$V = \{u \in PC(T) : u(t) \in U,\, t \in T = [t_0,t_1]\}\,. \tag{3}$$

Предполагается, что функции $\phi(x)$ и $F(x,t)$ вогнуты по $x \in R^n$, матричная функция $A(u,t)$ и вектор-функция $b(u,t)$ линейны по $u \in R^r$.

Следуя схеме анализа задачи [1,2], для пары допустимых управлений $u, v \in V$ строится нелокальная оценка приращения целевого функционала

$$\Delta_v \Phi(u) \le -\int_T \Delta_{v(t)} H(p(t,u,v), x(t,u), u(t), t)dt\,. \tag{4}$$

Здесь вектор-функция $p(t,u,v)$ является решением векторно-матричной системы

$$\dot{p} = -A(v,t)^T p - P\Delta_v f(x(t,u),u(t),t)\,,\ p(t_1) = -\phi_x(x(t_1))\,, \tag{5}$$

$$\dot{P} = -A(v,t)^T P - PA(v,t) + M\,,\ P(t_1) = 0\,, \tag{6}$$

где M – симметричная положительно-определенная матрица.

С помощью оценки (4) конструируется итерационный метод решения задачи (1)-(3).

Пусть $u^k(t), x^k(t) = x(t,u^k)$, $t \in T$ – допустимая пара в задаче. Сформируем вспомогательное управление

$$v^k(p,t) = \arg\max_{w \in U} H(p, x^k(t), w, t)\,,\ p \in R^n\,,\ t \in T\,.$$

Найдем решение $p^k(t)$ векторно-матричной системы (5)-(6) при $x(t) = x^k(t)$, $u(t) = u^k(t)$, $v = v^k(p,t)$. Образуем следующее приближение

$$u^{k+1}(t) = v^k(p(t),t)\,,\ t \in T$$

и подсчитаем соответствующую фазовую траекторию $x^{k+1}(t) = x(t,u^{k+1})$.

На основании оценки (4) справедливо свойство улучшения $\Phi(u^{k+1}) \le \Phi(u^k)$. Неотрицательная величина $\delta_k = \Phi(u^k) - \Phi(u^{k+1})$ может служить невязкой принципа максимума на управлении $u^k(t)$. Сходимость метода описывается условием

$$\delta_k \to 0\,,\ k \to \infty\,.$$

С помощью описанного метода был решен ряд тестовых задач. При этом делаются выводы относительно выбора матрицы M.

Литература

[1] Срочко В.А. Итерационные методы решения задач оптимального управления / В.А. Срочко. – М.: Физматлит, 2000. – 160 с.

[2] Антоник В.Г. Итерационные алгоритмы решения вогнутой задачи оптимального управления / В.Г. Антоник // Вестник БГУ. Вып.3. Серия 13: математика и информатика. – Улан-Удэ: Изд-во Бурят.ун-та, 2006. – С. 162–167.

Method of Successive Approximations for a Concave Optimal Control Problem

Antonik V.G.

Irkutsk State University, Russia

The optimal control problem with concave cost functional and linear dynamic system is considered. Non-local estimate of the functional is constructed. On the base of this estimate the iterative method for the problem is proposed.

АДАПТИВНЫЙ НАБЛЮДАТЕЛЬ ДЛЯ ХАОТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ДУФФИНГА

Арановский С.В., Бобцов А.А., Григорьев В.В., Николаев Н.А.

Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, Россия

Проблема построения адаптивных наблюдателей для нелинейных динамических систем находится в центре внимания в течение последних лет. Одна из причин подобного интереса состоит в возможности применения нелинейных динамических систем для кодирования и передачи информации. Это одно из новых направлений передачи данных, когда информация кодируется в параметрах динамической системы «передатчика». Сигнал выхода этой системы передается «приемнику», в задачу которого входит восстановление неизмеримых сигналов «передатчика» и параметров модели «передатчика». В данной работе с использованием процедуры синтеза адаптивного наблюдателя для хаотической системы Дуффинга, решается задача восстановления неизвестного закодированного параметра. Данная задача в отличие от известных аналогов решается только по измерениям выходного сигнала хаотической системы, а также в условиях полной параметрической неопределенности математической модели хаотической системы Дуффинга. В работе рассматривается хаотическая система Дуффинга, описываемая дифференциальным уравнением вида

$$\ddot{y}(t) + c_1\dot{y}(t) + c_2y(t) - \bar{\theta}f(y) - w(t) = 0, \tag{1}$$

где c_1, c_2 и $\bar{\theta}$ — неизвестные числа, нелинейная функция $f(y) = y^3$, $w(t) = A\sin(\omega t + \phi)$ — неизмеримый гармонический сигнал.

Ставится задача синтеза адаптивного наблюдателя, обеспечивающего восстановление неизвестного параметра $\bar{\theta}$ модели (1). Будем допускать, что измеряется только выходная переменная $y(t)$ модели (1). Также предполагается, что параметры математической модели (1) c_1, c_2, $\bar{\theta}$, A, ω и ϕ являются неизвестными числами. Для оценки параметра $\bar{\theta}$ используется адаптивный наблюдатель вида

$$\hat{z}(t) = \psi_1(t)\hat{\theta}_1 + \psi_2(t)\hat{\theta}_2 + \psi_3(t)\hat{\theta}_3 + \psi_4(t)\hat{\theta}_4 + \psi_5(t)\hat{\theta}_5 + \psi_6(t)\hat{\theta}_6, \tag{2}$$

$$\dot{\hat{\theta}}_i = k_i\psi_i(t)(\ddot{\xi}_1 - \hat{z}(t)), \tag{3}$$

где постоянный коэффициент $k_i > 0$, $i = \overline{1,6}$, $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$, $\hat{\theta}_3$, $\hat{\theta}_4$, $\hat{\theta}_5$, $\hat{\theta}_6$ — текущие оценки неизвестных параметров $\theta_1 = \theta + a_0$, $\theta_2 = \bar{\theta}$, $\theta_3 = -\bar{\theta}\theta$, $\theta_4 = a_1$, $\theta_5 = 2\theta - a_1\theta$, $\theta_6 = (\theta - a_0\theta)$, $\theta = -\omega^2$, неизвестные коэффициенты a_1 и a_0 рассчитываются из соотношения $a_1p + a_0 = p^2 + c_1p + p_2 - (p+1)^2$, $p = d/dt$ — оператор дифференцирования, а известные функции $\psi_1(t) = \frac{p^2}{(p+1)^2}\xi_1(t)$, $\psi_2(t) = \frac{p^2}{(p+1)^2}\xi_2(t)$, $\psi_3(t) = \frac{1}{(p+1)^2}\xi_2(t)$, $\psi_4(t) = \frac{p^2}{(p+1)^2}\dot{\xi}_1(t)$, $\psi_5(t) = \frac{p}{(p+1)^2}\xi_1(t)$, $\psi_6(t) = \frac{1}{(p+1)^2}\xi_1(t)$, $\xi_1(t) = \frac{1}{(p+1)^2}y(t)$, $\xi_2(t) = \frac{1}{(p+1)^2}y^3(t)$.

Доказывается, что алгоритм (2), (3) обеспечивает параметрическую сходимость.

Adaptive Observer For a Chaotic Duffing System

Aranovskiy S.V., Bobtsov A.A., Grigoriev V.V., Nikolaev N.A.

Saint Petersburg University of Information Technologies, Mechanics and Optics, Russia

By using procedure design of the adaptive observer for a chaotic Duffing system, the problem of reconstruction of the unknown coded parameter is solved. The given problem unlike known analogues is solved only on measurements of an output signal of a chaotic system and also under conditions of absolute parametrical uncertainty.

О БИФУРКАЦИИ ЭКСТРЕМАЛЕЙ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ПО РЕГУЛИРОВАНИЮ ЭВОЛЮЦИИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПРИ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ВОЗМУЩЕНИИ

Ашимов А.А., Сагадиев К.А., Боровский Ю.В., Искаков Н.А., Ашимов Ас.А.

Институт проблем информатики и управления МОН РК Р
еспублика Казахстан, г. Алматы

Как известно, поиски эффективных решений в ряде областей, в том числе в макроэкономике, осуществляются в рамках постановки и решения соответствующих задач вариационного исчисления, функционалы или фазовые ограничения которых зависят от некоторых коэффициентов математической модели объекта управления $\lambda = (\lambda^1, \lambda^2, \mathrm{K}, \lambda^m) \in \Lambda \subset R^m$, то есть, имеет место многопараметрическое возмущение соответствующей задачи вариационного исчисления. Исследование подобных задач требует определения бифуркационной точки, условий ее существования и анализа бифуркационного значения коэффициента $\lambda = (\lambda^1, \lambda^2, \mathrm{K}, \lambda^m)$ [1].

В данном сообщении приводятся результаты впервые проведенных исследований бифуркаций экстремалей задач вариационного исчисления рассматриваемого класса по выбору оптимального набора законов параметрического регулирования эволюции динамической системы в среде заданного конечного множества алгоритмов [2] на уровне k регулируемых параметров динамической системы. Предложено:

Определение. Значение $\lambda^* \in \Lambda$ называется точкой бифуркации экстремали задачи вариационного исчисления, если при $\lambda = \lambda^*$ существуют как минимум два различных оптимальных набора из r законов, отличающихся хотя бы на один закон, а в каждой окрестности точки λ^* найдется такое значение $\lambda \in \Lambda$, для которого рассматриваемая задача имеет единственное решение.

Доказана:

Теорема (о существовании точки бифуркации). Пусть при значениях параметра λ_1 и λ_2, ($\lambda_1 \neq \lambda_2$, λ_1, $\lambda_2 \in \Lambda$, Λ — связное открытое множество) рассматриваемая задача имеет соответствующие единственные решения для двух различных оптимальных наборов из r законов, отличающихся хотя бы на один закон. Тогда имеется хотя бы одна точка бифуркации $\lambda^* \in \Lambda$.

Предложен численный алгоритм нахождения бифуркационных значений коэффициентов рассматриваемой задачи и нахождения линий и поверхностей, состоящих из таких точек.

Полученные теоретические результаты проиллюстрированы на примере одной задачи вариационного исчисления по выбору оптимального закона параметрического регулирования развития экономической системы страны на базе ее математической модели [3], предложенной для исследования влияний доли потребительских расходов государства во внутреннем валовом продукте и процента по государственным займам.

Литература

[1] Бобылев Н.А., Емельянов С.В., Коровин С.К. Геометрические методы в вариационных задачах. М.: Магистр, 1998.

[2] Ашимов А.А., Боровский Ю.В., Волобуева О.П., Ашимов Ас.А. О выборе эффективных законов параметрического регулирования механизмов рыночной экономики // Автоматика и телемеханика. 2005. № 3. С. 105-112.

[3] Петров А.А., Поспелов И.Г., Шананин А.А. Опыт математического моделирования экономики. М.: Энергоатомиздат, 1996.

On Bifurcation of Extremals of One Variational Calculus Task at the Choice of the Optimum Set of Laws of Parametric Regulation with Multiparametrical Perturbation

Ashimov A.A., Sagadiyev K.A., Borovskiy Yu.V., Ashimov As.A.

Institute of Problems of Informatics and Control, Almaty, Kazakhstan

The research considers bifurcation of one variational calculus task at the choice of optimum law of parametrical regulation of a dynamic system in an environment of a given finite set of algorithms. It suggests the terms of existence of a solution of the specified task of variational calculation, the definition of a bifurcation point, terms of its existence and numerical algorithm of finding the bifurcation value of a parameter.

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ В РЕАЛЬНОМ ВРЕМЕНИ

Балашевич Н.В.*, Габасов Р.Ф., Кириллова Ф.М.***

**Институт математики НАН Беларуси, Минск,*
***Белорусский государственный университет, Минск*

В 80-х годах XX века в теории управления выделилось новое направление — управление в реальном времени, которое, в отличие от классических принципов управления по разомкнутому контуру и по замкнутому контуру, предполагает вычисление управляющих сигналов по ходу процесса управления на основе поступающей информации о состоянии системы. Интенсивное развитие указанной тематики обусловлено как востребованностью эффективных методов управления в многочисленных приложениях, так и достижениями современной вычислительной техники.

В докладе предлагается подход к решению проблемы синтеза оптимальных систем путем построения алгоритма работы оптимального регулятора, способного в режиме реального времени вычислять значения оптимальных обратных связей в ходе конкретного процесса управления [1].

В основе алгоритмов работы оптимальных регуляторов лежит двойственный метод коррекции оптимальных программ, опирающийся на 1) новую параметризацию программы с помощью ее моментов переключения; 2) быструю динамическую реализацию двойственного адаптивного метода линейного программирования [2].

Эффективность указанной динамической реализации разрабатывалась при вычислении сигналов оптимальных обратных связей обусловлена следующими особенностями: 1) локализация положения момента переключения управления осуществляется путем анализа целенаправленно перебираемых точек в окрестности моментов переключения и концов промежутка управления; 2) за счет хранения и преобразования небольшого объема дополнительной вспомогательной информации, характеризующей текущее управление, достаточно выполнять на итерациях метода интегрирование сопряженной системы на промежутках, сопоставимых с периодом квантования; 3) предусмотрено распараллеливание операций интегрирования сопряженной системы в окрестности точек переключения управления и концов промежутка управления.

На основании предложенных алгоритмов реализации оптимальных обратных связей в реальном времени обосновывается метод стабилизации движений динамических систем с использованием ограниченных управляющих воздействий. Показывается, что позиционное решение специальной сопровождающей задачи оптимального управления является ограниченной стабилизирующей обратной связью для рассматриваемой динамической системы и строится алгоритм работы стабилизатора, который в режиме реального времени генерирует значения ограниченной стабилизирующей обратной связи по ходу конкретного процесса управления.

Работа выполнена в рамках Государственной программы фундаментальных исследований «Математические модели 14».

Литература

[1] Габасов Р., Кириллова Ф.М. Оптимальное управление и наблюдение в реальном времени // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2006, № 3. С. 90–111.
[2] Габасов Р., Кириллова Ф.М., Тятюшкин А.И. Конструктивные методы оптимизации. Ч. 1: Линейные задачи. - Минск: Университетское, 1984.

Optimal Real-Time Control of Dynamical Systems

Balashevich N.V.*, Gabasov R., Kirillova F.M.***

**Institute of Mathematics, NAS of Belarus*
***Belarusian State University*

For the problem of synthesis of optimal systems, algorithms of operating optimal controllers that produce values of optimal feedbacks in the course of any control process in real-time are suggested. These algorithms are based on: 1) new parametrization of the optimal program through its switching instant; 2) fast dynamic realization of the dual adaptive method of linear programming.

О ПРОБЛЕМЕ И МЕТОДАХ КОРПОРАТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Баранов В.В., Баранова Е.Л., Масленникова А.В., Матросов В.М.

*Центр исследований устойчивости и нелинейной динамики
при ИМАШ РАН, Москва, Россия*

Рассматривается проблема управления в классе так называемых «интересо-ориентированных» систем, в которых мотивация управления основывается на интересах, а цель управления формируется внутри системы. Их частным случаем являются системы, в которых существуют общие интересы, объединяющие субъектов в корпоративную систему. Рассматриваются два класса корпоративных систем: типа федерации и конфедерации. Частным случаем обоих классов систем являются унитарные системы, в которых субъект и объект интересов единственны.

Для унитарных систем сформулирована концепция управления, мотивированного интересами. В ее условиях развита методология формализации проблемы, основанная на принципах расщепления интересов, компромиссных решений и структурных преобразований. На базе этой методологии построена модель принятия управляющих решений, основными объектами которой являются стратегии диагностики ситуаций, выбора режимов использования, управляющих воздействий по обеспечению работоспособности и безопасности, и выбора структурных параметров системы. Набор подобных стратегий определяет «политику» управления. Ставится задача выбора равновесной политики, при которой достигается устойчивый компромисс по критериям «полезности», «риска потерь полезности» и «риска кризиса». Устойчивость компромисса понимается в смысле равновесий Нэша и парето-оптимальности, и называется сильной устойчивостью.

Получены результаты, определяющие условия разрешимости проблемы и конструктивные методы ее решения на неограниченном горизонте времени.

Развиваемая методология и результаты распространяются на условия корпоративных систем. Получены результаты, определяющие модели и методы корпоративного выбора. Проблема корпоративного выбора сводится к проблеме коллективного выбора и решается методами последней. Методы же решения проблемы коллективного выбора основываются на трех аксиомах: предпочтений по полезности, единогласия и толерантности. Такая аксиоматика порождает лексиминное предпочтение на альтернативах. Его ядро не пусто, а элементы обладают свойством сильной устойчивости.

На основе методологии и результатов модели управления, мотивированного интересами, и методов корпоративного выбора развиты методы решения проблемы корпоративного управления для систем типа федерации и конфедерации.

Рассмотрены применения к проблеме превентивной безопасности и эффективности сложных стареющих систем.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 05-08-33574 а).

On Problem and Methods of Corporative Control

Baranov V.V., Baranova E.L., Maslennikova A.V., Matrosov V.M.

Stability and Nonlinear Dynamics Research Center under Blagonravov Mechanical Engineering Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

We study the problem of control in systems in which the motivation of control is based on interests. We develop the methodology of problem formalization and its solution, assuming that the interests are multi-aspect and the object of interests is stochastic – its dynamics is described by the Markovian process. We developed the methods of stable compromise basing on leximine preference.

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ ПОСТРОЕНИЯ ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ РОБАСТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Бейсенби М.А., Кульниязова К.С.

Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Казахстан

Для современных задач управления характерны все возрастающая сложность объектов управления, требования высокой эффективности, устойчивости и качества управляемых процессов в условиях многочисленных ограничений и неполной информации. В реальных объектах управления неизбежно присутствует неопределенность, а проектируемая система управления должна быть работоспособна при наличии неопределенности. В общей постановке исследование системы на робастную устойчивость состоит в указании ограничений на изменение параметров системы управления, при которых сохраняется устойчивость. Универсальным методом исследования динамических систем является прямой метод А.М. Ляпунова. Широкое применение данного метода сдерживается отсутствием общего подхода выбора функции Ляпунова.

Пусть замкнутая система управления задана уравнением состояния

$$\frac{dX(t)}{dt} = AX(t) + Bu(t), \quad X(t) \in R^n, \quad u(t) \in R^1. \tag{1}$$

Здесь A — матрица объекта управления с неопределенными параметрами размерности $n \times n$, B — матрица управления размерности $n \times 1$. Закон управления $u(t)$ в замкнутом контуре задается в виде скалярной функции. Для увеличения потенциала робастной устойчивости рекомендуется выбирать закон управления $u(t)$ в классе структурно-устойчивых отображений, что придает системе управления свойства сверхробастной устойчивости. Построим функцию Ляпунова таким образом, чтобы ее градиент был вектором, противоположным вектору скорости системы (1)

$$\operatorname{grad} V = -\frac{dx}{dt}. \tag{2}$$

Тогда полная производная по времени от функции Ляпунова с учетом уравнения движения будет равна:

$$W(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{dV}{dt} = \operatorname{grad} V \cdot \frac{dx}{dt}.$$

Таким образом, полная производная по времени от функции Ляпунова $W(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq 0$. Для устойчивости системы достаточно, чтобы функция Ляпунова была знакоположительной. Если $\det V_{ij} \neq 0$, где $\|V_{ij}\| = \left\| \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{x_s}$ — гессиан функции Ляпунова, тогда теорема Морса теории катастроф гарантирует существование гладкой замены переменных, такой, что функция Ляпунова локально может быть представлена квадратичной формой

$$V = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2,$$

где λ_i — собственные значения матрицы устойчивости V_{ij}, вычисленные для состояния равновесия.

Замена переменных осуществляется посредством линейных и нелинейных преобразований, при которых функции $V \leftrightarrow V^*$ качественно подобны.

Так как функция Ляпунова зависит от параметров системы и управления, то гессиан и его собственные значения также зависят от этих параметров. Потребовав выполнение условий $\lambda_i > 0$ для положительной определенности функции Ляпунова, можно определить область робастной устойчивости системы управления.

Regarding an Approach of Liapunov's Function Definition for Research of Control System's Robust Stability

Beisenbi M.A., Kulniyazova K.S.

Eurasian National University, Astana, Kazakhstan

New approach for the Liapunov's function definition is proposed that its gradient is vector, reversed to speed vector of system. Using this function and the results of catastrophe theory, it is quite possible to research the control system robust stability.

ОБ УСТОЙЧИВОМ ВОССТАНОВЛЕНИИ УПРАВЛЕНИЙ И ФАЗОВЫХ КООРДИНАТ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Близорукова М.С.

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, Россия

Обсуждается задача устойчивого восстановления фазовых состояний и управлений по результатам неточных измерений «части» координат траектории динамической системы. Содержание рассматриваемой задачи таково. Имеется система, описываемая векторным нелинейным дифференциальным уравнением с запаздыванием входа. Ее траектория зависит от меняющегося во времени входного воздействия — управления. Заранее как управление, так и траектория не заданы. В процессе функционирования системы наблюдается «часть» фазовых координат. Наблюдения, вообще говоря, неточны. Требуется построить алгоритм приближенного восстановления фазовых координат, а также входа, обладающий свойствами динамичности и устойчивости. Свойство динамичности означает, что текущие значения приближения соответствующих координат и входа вырабатываются в реальном времени, свойство устойчивости — что приближения сколь угодно точны при достаточной точности наблюдения.

Задача относится к классу обратных задач динамики управляемых систем. Представляемый в сообщении алгоритм опирается на конструкции теории устойчивого динамического обращения. Последняя основана на сочетании методов теории некорректных задач и теории позиционного управления. Суть методики состоит в том, что алгоритм восстановления представляется в виде алгоритма управления по принципу обратной связи некоторой искусственной динамической системой — моделью. Управление в модели адаптируется к результатам текущих наблюдений фазовых состояний таким образом, что его реализация во времени «аппроксимирует» как неизвестный вход (в случае измерения всех координат), так и неизмеряемые координаты (в случае измерения части координат).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 06-01-00359), и Программы фундаментальных исследований Президиума РАН «Процессы управления» и Урало-сибирского междисциплинарного проекта.

On a Stable Reconstruction of Phase States and Controls of Dynamical Systems

Blizorukova M.S.

Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of RAS, Ekaterinburg, Russia

A problem of stable reconstruction of phase states and controls through results of inaccurate measurements of a part of coordinates of dynamical system's trajectory is under consideration. A solving algorithm that is dynamic and stable is designed. The algorithm is based on constructions of the theory of stable dynamic inversion.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ. ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СИНТЕЗА СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ БЕСПИЛОТНЫХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

Бобронников В.Т., Матвеев А.В.

Московский Авиационный Институт (Государственный Технический Университет), Россия

В последние годы области эффективного применения беспилотных летательных аппаратов (БЛА) непрерывно расширяются. Одновременно увеличивается диапазон массово-инерционных характеристик БЛА (от несколько сотен килограммов до нескольких килограммов) и степень автоматизации процесса управления движением БЛА. Все чаще устойчивое движение аппарата по заданной траектории обеспечивается не только благодаря рациональному выбору аэродинамических характеристик БЛА как объекта управления, но и с помощью автопилота. Кроме того, в состав системы управления включается не только система управления угловым движением аппарата, но и система наведения.

В докладе рассматривается роль математического моделирования при разработке БЛА. Представлены предварительные результаты решения задачи синтеза системы управления движением БЛА среднего класса самолетной компоновочной схемы, предназначенного для мониторинга процессов на земной поверхности с помощью аппаратуры видеонаблюдения. Предполагается, что движение по заданному маршруту полностью автоматизировано и обеспечивается автономной системой управления. Траектория движения формируется перед пуском БЛА. Она задается координатами и высотой пунктов поворота маршрута (ППМ) в земной системе координат. Движение БЛА между этими пунктами обеспечивается командами двухканальной автономной системы наведения.

Система наведения обеспечивает движение БЛА к очередному ППМ по методу пропорционального сближения в горизонтальной плоскости и стабилизацию движения центра масс вдоль линии заданного направления в вертикальной плоскости. Информацией о текущем положении БЛА систему управления обеспечивает бесплатформенная инерциальная навигационная система (БИНС), комплексированная со спутниковой навигационной системой.

Система управления угловым движением является трехканальной. Она состоит из двух продольных каналов и канала крена. Поворот траектории в горизонтальной плоскости к ППМ обеспечивается двумя вариантами разворота: плоский или координированный.

В докладе дается описание пакета программ, разработанного для решения задачи синтеза системы управления БЛА указанного класса. Пакет реализован в системе программирования MATLAB. Он включает программу построения опорных траекторий при движении БЛА по заданному маршруту, расчета динамических коэффициентов и передаточных функций БЛА как объекта управления вдоль траектории; программы моделирования и синтеза системы управления угловым движением в изолированных каналах и трехканального автопилота; программу моделирования пространственного управляемого движения ЛА с учетом всех компонент системы, в том числе автопилота, системы навигации на основе БИНС и системы наведения.

Представлены результаты решения задачи синтеза системы управления движением, иллюстрирующие использование разработанного программного обеспечения на отдельных этапах решения задачи синтеза и при анализе управляемого движения БЛА в целом.

Mathematical Modeling of Movement. The Software for Solving of Unmanned Aerial Vehicles Autopilot Synthesis Problem

Bobronnikov V.T., Matveev A.V.

Moscow Aviation Institute, Russia

Mathematical modeling in design of unmanned aerial vehicles is discussed. A software created for the solution of synthesis problem for the unmanned aerial vehicles control system is presented.

СТАБИЛИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ПО ВЫХОДУ В УСЛОВИЯХ ЗАПАЗДЫВАНИЯ

Бобцов А.А., Григорьев В.В., Николаев Н.А.

Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, Россия

В течение прошлых двух десятилетий, проблема стабилизации линейных систем с запаздыванием по времени являлась предметом достаточно обширных исследований. Много интересных результатов было представлено в литературе. Однако мало внимания было сосредоточено на нелинейных системах с запаздыванием. В данной работе рассматривается задача синтеза закона управления, обеспечивающего сходимость выходной траектории нелинейной системы к нулю. Рассматривается нелинейный объект вида

$$y(t) = \frac{b(p)}{a(p)}u(t) + \frac{c(p)}{a(p)}\omega(t), \tag{1}$$

где $p = d/dt$ обозначает оператор дифференцирования; выходная переменная $y = y(t)$ измеряется, но ее производные; $b(p) = b_m p^m + \cdots + b_1 p + b_0$, и $c(p) = c_r p^r + \cdots + c_1 p + c_0$ — полиномы с известными коэффициентами; число $r \leq n-1$; передаточная функция $\dfrac{b(p)}{a(p)}$ имеет относительную степень $\rho = n - m$; полином $b(p)$ — гурвицев и параметр $b_m > 0$; неизвестная функция $\omega(t) = \varphi(y(t-\tau))$ удовлетворяет следующему допущению:

$$|\varphi(y(t-\tau))| \leq C_0|y(t-\tau)| \text{ для всех } y(t-\tau), \tag{2}$$

где $\tau > 0$ — неизвестное постоянное запаздывание, $y(\vartheta) = \phi(\vartheta)$ для $\forall\vartheta \in [-\tau, 0]$ и число $C_0 > 0$ известно.

Используя только измерения выходной переменной, в данной работе предложена схема управления вида

$$u(t) = -\alpha(p)(\mu + \kappa)\hat{y}(t), \tag{3}$$

где число μ и любой гурвицев полином $\alpha(p)$ степени $\rho - 1$ — такие, что передаточная функция $W(p) = \dfrac{b(p)\alpha(p)}{a(p) + \mu b(p)\alpha(p)}$ является строго вещественно положительной; положительный параметр κ используется для компенсации неопределенности $\varphi(y(t-\tau))$; функция $\hat{y}(t)$ рассчитывается согласно следующему алгоритму

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1(t) = \sigma\xi_2(t), \quad \dot{\xi}_2(t) = \sigma\xi_3(t) \\ \cdots\cdots\cdots \\ \dot{\xi}_{\rho-1}(t) = \sigma(-k_1\xi_1(t) - \cdots - k_{\rho-1}\xi_{\rho-1}(t) + k_1 y(t)), \end{cases} \tag{4}$$

$$\hat{y}(t) = \xi_1(t), \tag{5}$$

где число $\sigma > \mu + \kappa$ и параметры k_i вычисляются таким образом, чтобы система (5) была асимптотически устойчивой при $y(t) = 0$.

С использованием функционала Ляпунова-Красовского доказано, что существуют положительные числа μ и κ, такие что $\lim\limits_{t\to\infty}|y(t)| = 0$.

Output Stabilization of Time-Delay Nonlinear Systems

Bobtsov A.A., Grigoriev V.V., Nikolaev N.A.

Saint Petersburg University of Information Technologies, Mechanics and Optics, Russia

This paper deals with the output stabilization of time-delay systems with sector-bounded nonlinearity. In this paper we will consider the problem of absolute stability for a class of time-delay systems which can be represented as a feedback connection of a linear dynamical system with unknown parameters and a uncertainty nonlinearity satisfying a sector constraint. For a class of output control algorithms a controller providing output asymptotic stability of equilibrium position is designed.

ЛОКАЛЬНАЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИЦИРУЕМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ ПО ОДНОКРАТНОМУ НАБЛЮДЕНИЮ ИХ РЕШЕНИЙ

Бодунов Н.А.

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина), Россия

Рассматривается зависящая от параметра система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Вводится понятие локальной параметрической идентифицируемости этой системы по наблюдению ее решения в произвольный момент времени, заключающееся в возможности однозначного определения параметра системы по результатам эксперимента. Получены необходимые и достаточные условия локальной параметрической идентифицируемости рассматриваемой системы при дополнительном ограничении на матрицу системы. Анализируется связь полученных условий с поведением спектра этой матрицы.

Local Parametric Identifiability of Linear Stationary Systems Via a Single-Time Observation of Solutions

Bodunov N.A.

Saint Petersburg State Electrotechnical University, Russia

We consider a special case of a system of linear stationary differential equations, depending on a parameter. We obtain necessary and sufficient conditions of local parametric identifiability for the system via an observation of a solution at an arbitrary time moment. We analyze relations between the conditions obtained and the behavior of the spectrum of the system matrix.

ЗОНЫ ИММУНИТЕТА И СУВЕРЕНИТЕТА УПРАВЛЯЕМОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ НА ПЛОСКОСТИ

Бутенина Д.В.*, Бутенина Н.Н., Метрикин И.А.***

***Государственный университет аэрокосмического приборостроения, Россия,*
***Нижегородский государственный университет, Россия*

Рассматривается управляемая динамическая система (УДС) с аффинным управлением

$$\dot{X} = P_0(X) + \sum_{i=1}^{n} u_i(t) P_i(X), \tag{1}$$

где $X \in R^2$, $P_j(X)$ $(j = \overline{0,n})$ $\{R^2 \to R^2\}$ – вектор-функции класса C^K $(k \geq 3)$, $U(t)(u_1(t),\ldots,u_n(t))$ $\{R^1 \to R^n\}$ – кусочно-непрерывная ограниченная функция, $m_i \leq u_i \leq n_i$. Ограничения на управление являются параметрами УДС.

Пусть целью управления является устойчивое решение ω_0 одной из автономных систем, отвечающей условию $u_i(t) = \mu_i \equiv const$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. При выполнении определенных условий, наложенных на систему (1), существуют такие ограничения на управление, при которых область управляемости $V(\omega_0)$ в состояние ω_0 имеет безопасные зоны, из которых при заданных ограничениях на управление нет выхода. Максимальную из таких зон называют зоной иммунитета. Известно [1], что

1) при расширении ограничений на управление зона иммунитета может только сжиматься (в отличие от областей управляемости и достижимости);

2) для широкого класса УДС можно указать такие ограничения на управление, при которых область управляемости не имеет безопасных зон.

Если целью управления является абсолютно неустойчивое предельное множество ω^* одной из автономных систем ($u_i(t) = v_i = const$) семейства (1), то при определенных условиях в области достижимости $D(\omega^*)$ существуют собственные зоны $S_\alpha(\omega^*)$, в которые нет доступа извне. Максимальную из таких зон называют зоной суверенитета состояния ω^* (минимальной является область управляемости $U(\omega^*)$). При расширении ограничений на управление зоны суверенитета могут только сжиматься. Для широкого класса УДС существуют такие ограничения на управление, при которых состояние ω^* достижимо из любой точки области $D(\omega^*)$, являющейся в таком случае областью полной управляемости.

В настоящей работе исследована УДС, описывающая при различных значениях параметров достаточно широкий круг физических явлений. Найдены ограничения на управление и вид управляющей функции, при которых возможен перевод изображающей точки из устойчивого фокуса на неустойчивый предельный цикл одной из автономных систем семейства УДС.

Литература

[1] Бутенина Н.Н. Зоны иммунитета управляемых динамических систем на плоскости.// Дифференциальные уравнения. 1999. т.35, № 5. с. 630–637.

Immunity and Sovereignty Zones for a Controlled Dynamical System on the Plane

Butenina D.V.*, Butenina N.N., Metrikine I.A.***

***State University of Aerospace Instrumentation, Saint Petersburg, Russia,*
***Nizhny Novgorod State University, Russia*

For a second-order controlled dynamical system (CDS) with affine control it is proved, that when control function values region widens, the pointed zones may decrease only and, as a rule, disappear by leap.

A particular mathematical model, where immunity zone disappearance is observed, is examined.

ФАЗОВЫЙ ПОРТРЕТ УПРАВЛЯЕМОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ НА ПЛОСКОСТИ

Бутенина Н.Н., Коробицин В.В.

Нижегородский государственный университет, Россия

Рассматривается управляемая динамическая система (УДС) вида

$$\dot{X} = P_0(X) + \sum_{i=1}^{n} u_i(t)P_i(X), \tag{1}$$

где $X \in R^2$, $P_j(X)$ $(j = \overline{0,n})\{R^2 \to R^2\}$ — функции класса C^K $(k \geq 2)$, $u(t)(u_1(t), \ldots, u_n(t))\{R^1 \to R^n\}$ — произвольная кусочно-непрерывная функция, значения которой принадлежат замыканию ограниченной выпуклой области G с кусочно-гладкой границей.

Главную роль при качественном исследовании УДС играют «системы одностороннего пересечения», т.е. такие системы, траектории которых другими допустимыми траекториями пересекаются только в положительном (отрицательном) направлении. Особые (орбитно-неустойчивые) траектории таких систем разбивают фазовую плоскость на «ячейки» (аналоги ячеек автономных систем на плоскости).

Справедливы утверждения:

1. если в точке ячейки «g_i» УДС (1) локально управляема и $U(M_0)[D(M_0)]$ — область управляемости в M_0 (достижимости из точки M_0), то для любой точки M_1 этой ячейки $U(M_1) = U(M_0)$, $D(M_1) = D(M_0)$;

2. если точка M_0 является граничной точкой множества $U(M_0)(D(M_0))$, то любая другая точка этой ячейки также является граничной точкой множества $U(M_1)(D(M_1))$. При этом, если $\partial U(M_0)(\partial D(M_0))$ содержит какую-либо особую полутраекторию, то $\partial U(M_1)(\partial D(M_1))$ содержит полутраекторию той же самой особой траектории. В.В. Коробициным разработан программный комплекс, позволяющий строить особые траектории УДС (1) и для произвольной точки K отдельной ячейки строить множества управляемости и достижимости.

Литература

[1] Бутенина Н.Н. Ячейки управляемых динамических систем на плоскости. //Дифференциальные уравнения. 2000. т.36, № 11. с. 1458–1463.

[2] Бутенина Н.Н., Коробицин В.В. Качественно — численное исследование управляемых динамических систем на плоскости. Труды конференции ММ02001. Самара, Россия. с. 86–89.

Phase Portrait of a Controlled Dynamical System on the Plane

Butenina N.N., Korobitsin V.V.

Nizhny Novgorod State University, Russia

It is stated, that for phase portrait construction for a controlled dynamical system (CDS) with affine control it is enough to know CDS singular trajectories, which divide the phase plane over elementary cells.

For each two points of one cell, controllability (attainability) regions either coincide or have common kernel.

Program complex, allowing to construct CDS singular trajectories, is worked out.

КОМПОЗИТНАЯ МОДЕЛЬ ТРАНСФОРМИРУЮЩЕГОСЯ ПРОЦЕССА. ПРОГРАММНОЕ УПРАВЛЕНИЕ И ИНВАРИАНТНЫЙ СИНТЕЗ

Валуев А.М.

Московский государственный горный университет,
Институт машиноведения РАН, Россия

Модели процессов с качественной динамикой известны с 1960-х г.г. (В.В. Величенко, Л.Т. Ащепков, А.С. Филатьев), главным образом для задач космического полета. В этих моделях уравнения динамики системы изменяются при переключениях, последовательность которых (сценарий процесса) фиксирована. «Модель управления катастрофой», введенная в 1990-х г.г. В.В. Величенко; принципиально допускает различные сценарии процесса.

Исследование задач управления производственными системами в горнодобывающей промышленности и некоторых других отраслях, а также задач распределения ресурсов при выполнении проекта показало, что они могут быть представлены в форме композитной модели трансформирующегося процесса, комбинирующей модели, описываемые обыкновенными дифференциальными или разностными уравнениями с управлением и автоматные модели. Процесс разбивается на заранее не определенное количество N этапов — временных интервалов $[T(k), T(k+1) = T(k) + t(k))$, $k = 1, \ldots, N$, и на k-ом этапе характеризуется векторами качественного состояния $d(k)$ (принимающего значение из конечного множества A_D) и управления $u(k) \in R^m$, конечным $x^1(k) \in R^n$ и начальным $x^0(k) \in R^n$ состояниями. Окончание этапа связано с наступлением набора событий $S(k) \subseteq 1, \ldots, L$. Система соотношений модели:

$$x^1(k) = Y(d(k), x^0(k), u(k), t(k)), x^0(k+1) = X(S(k), d(k), x^1(k)), d(k+1) = D(S(k), d(k)),\ k = 1, \ldots, N, \quad (1)$$

$$T(N+1) = T_0;\ x^1_{i(s)}(k) - x_{s0}(d(k)) = 0,\ s \in S(k),\ \ x^1_{i(s)}(k) - x_{s0}(d(k)) \le 0,\ s \notin S(k),\ k = 1, \ldots, N, \quad (2)$$

$$r^U_j(d(k), u(k)) \le 0, j \in J_1(d(k)),\ \ r^U_j(d(k), u(k)) = 0, j \in J_2(d(k)),\ k = 1, \ldots, N, \quad (3)$$

$$r^Y_j(d(k), x^1(k)) \le 0,\ j \in K_1(s),\ s \in S(k),\ \ r^Y_j(d(k), x(k)) = 0,\ j \in K_2(s),\ s \in S(k),\ k = 1, \ldots, N. \quad (4)$$

Рассматривается задача минимизации терминального целевого функционала:

$$F_0(x^1(N)) \to \min. \quad (5)$$

В докладе формулируются ряд условий адекватности модели. Сценарий $S = (S(1), \ldots, S(N))$ определяется управлением $u = (u(1), \ldots, u(N))$, если нестрогое неравенство в (2) заменить на строгое, иначе имеются различные сценарные представления одного и того же управления. При фиксированном сценарии соотношения (1)–(5) определяют задачу дискретного оптимального управления, условия оптимальности для которых установлены ранее (в т.ч. установленные автором условия с применением декомпозиции по системе ограничений). В случае, когда при некотором k $\dim S(k) > 1$ или $t(k) = 0$, возможен переход к другому сценарному представлению, условия перехода вытекают из (1)–(4). С их использованием выводятся новые условия оптимальности, подобные принципу максимума. Используемые при этом вычислительные конструкции позволяют строить численные методы оптимизации на основе развития декомпозиционного метода для задач дискретного оптимального управления.

Возмущения в модели типа (1)–(5) могут проявляться как в уравнениях динамики и трансформации (1), так и в ограничениях (3), (4) и могут привести к изменению программного сценария процесса. В докладе предложено развитие метода инвариантного синтеза (по версии В.В. Величенко), основанное на комбинированном построении номинального управления — на основе программного управления (для этапов, соответствующих номинальному сценарию) и стандартного управления как функции $d(k)$ и введении дополнительных компенсационных слагаемых.

Composite Model of a Transforming Process. Program Control and Invariant System Synthesis

Valuev A.M.

Moscow State Mining University, Russia

A hybrid model is introduced to represent production processes in the mining industry and some other branches as well as resource planning in project scheduling. In the model the process dynamics combines ODE or difference equations depending on the qualitative state vector within a stage and transformation equations for both quantitative and qualitative state vectors. Adequacy and optimality conditions are established enabling to calculate the optimum control. For disturbed processes a version of V.V. Velichenko's invariant system synthesis method is proposed.

РЕАЛИЗАЦИЯ ОГРАНИЧЕННОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ В НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ РЕГУЛИРОВАНИЯ

Габасов Р.Ф.*, Кириллова Ф.М., Ружицкая Е.А.*****

**Белорусский государственный университет, Минск,*

***Институт математики НАН РБ, Минск, Беларусь,*

****Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Беларусь*

Описывается метод решения классической задачи регулирования в классе ограниченных управляющих воздействий для нелинейной системы с обеспечением дополнительных свойств переходных процессов. Рассматривается нелинейная динамическая система

$$\dot{x} = Ax + b(x)u,\ x \in X,\ t \geq 0,\ X \subset R^n, \tag{1}$$

где $x = x(t)$ — n-вектор состояния системы в момент времени t; $A \in R^{n\times n}$ — постоянная матрица, $b(x),\ x \in R^n$ — достаточно гладкая n-вектор-функция, $u = u(t) \in R$ — значение управляющего воздействия $u(t)$, $|u(t)| \leq L,\ t \geq 0\ (0 < L < \infty)$.

Пусть $X_0 = \{x \in R^n : Ax + b(x)u_x = 0,\ |u_x| \leq L\}$ — множество состояний равновесия для (1), $z \in intX_0,\ z \in G \subset R^n$.

Определение. Функция $u = u_z(x),\ x \in G$, называется дискретной (с периодом квантования $h > 0$) ограниченной стабилизирующей обратной связью для состояния равновесия z системы (1) в G, если:

1) $u_z(z) = u_z$;

2) $|u_z(x)| \leq L,\ x \in G$;

3) замкнутая система

$$\dot{x} = Ax + b(x)u_z(x),\ x(0) = x_0 \in G, \tag{2}$$

имеет решение $x(t) \in G,\ t \geq 0$;

4) траектория системы (2) является непрерывным решением уравнения

$$\dot{x} = Ax + b(x)u(t),\ x(0) = x_0,$$

с $u(t) = u_z(x(kh)),\ t \in [kh, (k+1)h[,\ k = 0, 1, 2, ...$;

5) движение $x(t) \equiv z,\ t \geq 0$, системы (3) асимптотически устойчиво в G.

Обоснован метод построения ограниченной обратной связи для регулирования системы (1). Конструирование обратной связи базируется на позиционном решении вспомогательных задач оптимального управления (задач минимизации интенсивности или полного импульса управляющего воздействия), обеспечивающей перевод системы из окрестности одного состояния равновесия в окрестность нового состояния равновесия и её стабилизацию относительно нового состояния. При этом можно учесть дополнительные ограничения на процессы управления: степень устойчивости, степень колебательности, перерегулирования, монотонности. Для решения задачи вводится кусочно-постоянная аппроксимация системы (1). Рассматриваются два варианта построения стабилизирующей обратной связи и описываются алгоритмы её реализации. Результаты иллюстрируются на примере управления и стабилизации с помощью магнита [2].

Литература

[1] Габасов Р., Кириллова Ф.М. Оптимальное управление и наблюдение в реальном времени // Известия РАН. Теория и системы управления, 2006, №3.– С. 90–111.

[2] Gilbert E.G., Kolmanovsky I. A generalized reference governor for nonlinear systems // Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control, Orlando, Florida USA, December 4–7, 2001. – P. 4222–4227.

Realization of Bounded Feedbacks in a Nonlinear Regulation Problem

Gabasov R.F.*, Kirillova F.M., Ruzhitskaya E.A.*****

**Belarussian State University, Minsk, Belarus,*

***Institute of Mathematics National Academy of Sciences of Republic Belarus, Minsk, Belarus,*

****Gomel State University of F. Skorina, Belarus*

A method of constructing the bounded feedbacks for regulation of a system with nonlinear input is suggested. The method is based on the positional solutions of auxiliary optimum control problems which provide transferring the system from one equilibrium state to a new given state to stabilize it. Moreover, by changing constraints of the optimal control problems one can provide some additional properties of processes.

ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССАМИ, ОПИСЫВАЕМЫМИ КИНЕТИЧЕСКИМ УРАВНЕНИЕМ

Гаева З.С., Шананин А.А.

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, Россия,
Московский физико-технический институт, Россия

Одной из актуальных практических задач в общей проблеме модификации погоды является предотвращение града. Важнейшим вопросом воздействия на градовые процессы является выбор места и времени внесения реагента, так как это определяет механизм взаимодействия реагента и облака. Эта проблема формализована в виде математической задачи управления микроструктурой градового облака, эволюция которого описывается кинетическими уравнениями Смолуховского для функций распределения капель и кристаллов по массе или размеру. Управление осуществляется с целью предотвращения образования крупных градин в облаке, которые могут достигнуть поверхности земли и нанести ущерб. Поэтому минимизируется функционал, определяющий количество градин в облаке, больших определенного размера. Численное решение задачи управления является более сложной проблемой, чем расчет интегральных характеристик функции распределения частиц в облаке для определения которых решаются уравнения коагуляции. Поэтому актуальным вопросом является разработка экономичных методов решения этих уравнений, обладающих необходимой точностью. Предлагается за счет выбора системы ортогональных функций Дмитриева в методе Галеркина существенно сократить объем вычислений. Однако при этом возникают проблемы контроля точности вычисления, связанные с тем, что интегральные характеристики, описывающие эволюцию облака, не могут быть вычислены точно по конечному числу коэффициентов Галеркина. На основе теории проблемы моментов Чебышева – Маркова – Крейна был разработан алгоритм (см. [1]) для вычисления точных верхней и нижней границ, в которых может лежать интегральная характеристика функции распределения. На использовании этого алгоритма был основан новый подход к решению задач управления микрофизическими процессами в градовых облаках, а именно: задачу управления микроструктурой градового облака заменить оценочной задачей. По коэффициентам Галеркина строится точная верхняя граница функционала. Функционал, определяющий количество градин, больших определенного размера, заменяется точной верхней границей. Новый функционал и, следовательно, его производные не задаются явными формулами. В то же время, в условия трансверсальности в задаче управления входят производные функционала. В работе [2] предложен алгоритм вычисления производных точных оценок, который позволил адаптировать метод последовательных приближений для решения задачи управления микрофизическими процессами в облаке.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 06-01-00752а), по программе государственной поддержки ведущих научных школ (код проекта НШ-5379.2006.1)

Литература

[1] Гаева З.С., Шананин А.А. Проблема Маркова - Чебышева и исследование галеркинских приближений в одной задаче агрегации// Матем. Моделирование.1995. Т. 7, № 9, с. 35–54.

[2] Гаева З.С., Шананин А.А. Численный метод решения задачи управления микроструктурой градового облака // Матем. моделирование. 2004. Т. 16, № 12, С. 69–84.

Numerical Algorithm for the Control Problem of the Processes Described by the Kinetic Equation

Gaeva Z.S., Shananin A.A.

A.A. Dorodnitsyn Computational Center RAS, Moscow, Russia,
Moscow Physical-Technical Institute (MIPT), Russia

A new approach of optimal control is proposed for kinetics of coagulation and applied to hail clouds. For analysis of clouds evolution, important characteristics are the integral characteristics of the distribution function of hailstones, which are bigger than certain critical size, so they can cause damage. A problem of control of hail clouds microstructure is replaced with an estimation task. New functional and its derivatives are not defined by explicit formulas. The present work is devoted to the statement of an estimation problem, and also to the development of algorithms for calculation of derivatives of exact estimations over the moments.

НЕЛИНЕЙНОЕ РОБАСТНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В ЗАДАЧАХ С ФИКСИРОВАННЫМ МОМЕНТОМ ОКОНЧАНИЯ

Ганебный С.А.*, Кумков С.С.*, Пацко В.С.*, Пятко С.Г.**

**Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, Россия*
***Санкт-Петербургский государственный университет гражданской авиации, Россия*

Среди практических проблем управления при наличии помех типичными являются задачи, в которых уровень динамической помехи заранее неизвестен.

Робастным назовем управление обратной связи, которое при «малом» уровне неизвестной заранее помехи обеспечивает хорошее качество тратой «малого» по величине управляющего воздействия. С ростом уровня помехи допускается рост величины управляющего воздействия, гарантирующего хорошее качество.

В работе рассматриваются задачи с фиксированным моментом окончания и оговоренным заранее геометрическим ограничением на полезное управление. Цель управления — приведение системы в момент окончания на заданное терминальное множество.

Для построения нелинейного робастного управления применяем методы антагонистических дифференциальных игр с геометрическими ограничениями на управления обоих игроков. Основная идея состоит в следующем. Рассмотрим семейство дифференциальных игр, в которых ограничение на управление второго игрока (помехи) зависит от числового параметра. С каждым значением параметра свяжем также некоторое ограничение на управление первого игрока (на полезное управление) и стабильную трубку (стабильный мост по терминологии [1]) в пространстве *время* × *фазовый вектор*. Получаемое семейство трубок упорядочиваем по включению с возрастанием параметра. Первый игрок гарантирует удержание системы внутри каждой из трубок при соответствующем ей уровне помехи, используя свое управление, также лежащее в соответствующем ограничении. Это семейство может рассматриваться как задание в пространстве игры некоторой функции Ляпунова, которая позволяет построить нелинейное управление обратной связи для первого игрока и вычислить гарантию, обеспечиваемую этим управлением.

Указанная идея реализована для задач с линейной динамикой и геометрическим ограничением на полезное управление. При этом для построения робастного управления в памяти компьютера следует хранить всего две стабильные трубки. Разработан комплекс программ численного построения робастного управления. Случай скалярного полезного управления, ограниченного по модулю, описан в [2]. Данные доклад посвящен ситуации произвольного геометрического ограничения на векторное полезное управление.

При помощи разработанных программ проведено моделирование задачи управления самолетом на посадке в условиях ветрового возмущения. Рассмотрена также задача о перехвате одного слабоманеврирующего объекта другим (ракеты антиракетой). В этой задаче ограничение на двумерное векторное полезное управление является эллипсом.

Литература

[1] *Красовский Н.Н., Субботин А.И.*, Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
[2] *Ганебный С.А., Кумков С.С., Пацко В.С.*, Построение управления в задачах с неизвестным уровнем динамической помехи // ПММ, Т. 70, Вып. 5, 2006, С.753–770.

Nonlinear Robust Control in Problems with Fixed Terminal Time

Ganebny S.A.*, Kumkov S.S.*, Patsko V.S.*, Pyatko S.G.**

**Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of RAS, Ekaterinburg, Russia,*
***Saint Petersburg State University of civil aviation, Russia*

Dynamic problems with fixed terminal time and geometric constraint for the control are considered. A method for constructing robust control is suggested, which provides good process quality by a "weak" realization in the case of a "weak" disturbance. With growth of the disturbance level, the realization of the control is allowed to grow within the constraint. The suggested control method was tested in a problem of aircraft landing under wind disturbance, and a problem of interception of a weak-maneuvering object by another one.

АНАЛИТИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ АВТОКОЛЕБАНИЙ В МНОГОКОНТУРНЫХ СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ

Горобцов А.С., Рыжов Е.Н.

Волгоградский государственный технический университет, Россия

Получены достаточные условия:
1) синтеза устойчивых предельных циклов в заданных подпространствах состояний многоконтурных систем;
2) условия синтеза двумерного асимптотически устойчивого тора $\mathbf{T}^2$ в фазовом пространстве.

Подход к решению основан на нахождении функций Ляпунова к синтезу управления обратной связью по вектору состояния. Управления искались в пространстве кубически-нелинейных вектор полиномов.

Общая концепция решения задач, сводится к синтезу управляемых процессов на заданном декартовом произведении k подпространств $\mathbf{R}_i^2$, $i = 1, 2, \ldots, k$, обеспечивающих требуемую динамику на декартовом произведении подпространств

$$\prod_{i=k+1}^{n} \mathbf{R}_i^2 \equiv \underbrace{\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \cdots \times \mathbf{R}}_{2n-2k}.$$

Это приводит к синтезу управлений в фазовых пространствах каждого из контуров (внутриконтурных управлений) и синтезу нелинейных обратных связей между контурами (синтезу межконтурных управлений), что позволяет, управляя динамикой на заданном подпространстве $\mathbf{R}^{2n}$, получать желаемую динамику в других подпространствах $\mathbf{R}^{2n}$.

На основании этого построены алгоритмы для решения следующих типов задач нелинейного управления:

1. синтеза многоконтурных автоколебательных систем, т.е. задачи одновременного возбуждения устойчивых автоколебательных процессов, работающих на нескольких колебательных контурах;

2. синтеза системы с автоколебательными режимами в заданных подпространствах состояний $\mathbf{R}^{2k} \subset \mathbf{R}^{2n}$ ($k < n$, k-номер колебательного контура) с одновременным демпфированием колебаний на произведениях $\prod\limits_{j=k+1}^{n} \mathbf{R}_j^2 = \mathbf{R}^{2(n-k)}$ в $\mathbf{R}^{2n}$.

3. алгоритм управления амплитудой автоколебательного режима, генерируемого одним из колебательных контуров, посредством синтеза автоколебательного режима, с заданной амплитудой в другом контуре.

Результаты проиллюстрированы численным моделированием синтеза двух и трех контурных систем Льенаровского типа.

The Synthesis of Auto-Oscillatory Processes in Multi Circuit Control Systems

Gorobtsov A.S., Ryzhov E.N.

Volgograd State Technical University, Russia

The sufficient conditions of synthesis algorithm of limiting cycles and stabilization in multi circuit control systems are received. The synthesis conditions of the two dimensional asymptotically stability torus in multi circuit control systems is obtained.

УПРАВЛЕНИЕ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКМИ УСТРОЙСТВАМИ

Григорьев В.В., Быстров С.В., Болтунов Г.И., Бобцов А.А., Кремлев А.С., Камнев Д.А.

Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, Россия

Данное исследование посвящено разработке новых алгоритмов управления и регуляторов для самых современных пьезоэлектрических исполнительных устройств микроперемещений. Анализируя опыт исследований и разработок элементов и устройств пьезотехники можно выделить два базовых направления развития. Первое заключается в совершенствовании пьезоматериалов (их свойств и характеристик) с целью обеспечения, в конечном итоге, стабильности параметров пьезоэлектрических устройств. Второе — в разработке адаптивных алгоритмов управления пьезоэлектрическими устройствами в условиях постоянно изменяющихся параметров и характеристик пьезоматериалов под действием внешних возмущений (температура, давление, механическое воздействие). В настоящее время на западе успешно решается задача создания новых пьезоматериалов и конструкций на их основе, достигнуты значительные успехи в разработке самых современных пьезоэлектрических исполнительных устройств с увеличенным диапазоном перемещений и сниженным напряжением управления. Тогда как в нашей стране за последнее десятилетие производственная и научно-техническая база развития пьезотехники и пьезоматериалов оказалась полностью неконкурентоспособной. Однако в нашей стране работы теоретического характера остаются на высочайшем уровне и ведутся непрерывно во многих исследовательских центрах и ВУЗах. Эти разработки полностью подтверждаются экспериментальными данными и результатами математического и компьютерного моделирования. Ярким примером комплексного использования пьезокерамических элементов, узлов и деталей является их внедрение в автомобильную промышленность.

Примерами таких устройств могут служить:

- пьезоприводы регулировки сидений;
- боковые ударные сенсоры подушек безопасности;
- пьезоприводы зеркал;
- пьезоприводы системы подвески;
- пьезоприводы регулировки фар.

В классической теории управления для управления пьезоэлектрическими устройствами синтезируется интегральный, или пропорционально-интегральные регуляторы, что обусловлено статическим характером системы. Современные адаптивные и робастные алгоритмы позволяют осуществлять компенсацию флуктуаций параметров пьезоэлектрических устройств, когда модель обладает параметрическими неопределенностями (задана неточно), подвержена внешним возмущениям. К основным структурным неопределенностям относятся нелинейность статической характеристики и гистерезис. Конструктивные особенности пьезоэлекртических устройств не позволяют непосредственно измерять значения переменных состояния, измерения возможно только по косвенным параметрам. Перспективным решением в управлении пьезоэлектрическими устройствами является управление по выходу, в данном случае задача управления заключается в определении параметров объекта управления только по текущему изменению выходной переменной, т.е. без изменения её производных или переменных состояния.

Piezoelectric Devices Control

Grigoriev V.V., Bystrov S.V., Boltunov G.I., Bobtsov A.A., Kremlev A.S., Kamnev D.A.

Saint-Petersburg State University of Information Technologies Mechanics and Optics, Russia

This study is devoted to the development of the new control algorithms and regulators for the most contemporary piezoelectric actuating elements of microtransfers.

In the classical automatic control theory for control of piezoelectric devices is synthesized integral, or proportional-plus-integral regulators, which is caused by the static nature of system. Contemporary adaptive and robust algorithms permit implementation of compensation for the fluctuations of the parameters of the piezoelectric devices, when model possesses the parametric uncertainties (it is assigned inaccurately), it is subjected to external disturbances.

The promising solution in the piezoelectric devices control is the output control. In this case the task of control consists in the determination of the parameters of the object of control only according to the current change in the output variable, i.e., without a change in its derivatives or state variables.

ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА В ЗАДАЧАХ ГАРАНТИРОВАННОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Гусев М.И.

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, Россия

Рассматривается управляемая система

$$\dot{x} = f(t, q, x, u(t)) + w(t),\ x(t_0) = x^0,$$

($x \in R^n,\ t \in [t_0, t_1]$), в правую часть которой входит неизвестный векторный параметр $q \in R^m$. Вся доступная априорная информация о q задана условием $q \in Q$, где Q — компакт в R^m. Вход $u(t)$ и начальное состояние x^0 считаются известными. Величина q должна быть идентифицирована по результатам измерения на $[t_0, t_1]$ функции

$$y(t) = g(t, x(t, q)) + \xi(t),\ t \in [t_0, t_1],$$

где $g : [t_0, t_1] \times R^n \times U \to R^k$ заданная непрерывная функция, $x(t, q)$ — решение системы, соответствующее параметру q, $\xi(t)$ — ошибка измерения. Априорная информация об ошибке $\xi(t)$ и возмущении $w(t)$ задана условием $W_1(\xi(\cdot)) \leq 1$, $W_2(w(\cdot)) \leq 1$, где $W_1(\xi(\cdot)), W_2(w(\cdot))$ — выпуклые квадратичные функционалы в $L_2[t_0, t_1]$.

Выбор входа $u(t)$ влияет на точность идентификации параметра q, которую принято характеризовать «размерами» информационного множества системы, состоящего из всех возможных значений параметра q, совместимых с измерением $y(t)$ и априорными ограничениями на q и возмущения. Задача планирования эксперимента в гарантирующей постановке состоит в выборе входа $u(t)$ из класса измеримых функций $u(t) \in P \subset R^r$, $t \in [t_0, t_1]$ (P — компакт в R^r), минимизирующего некоторую характеристику информационного множества.

Поскольку построение информационных множеств представляет собой весьма трудоемкую процедуру, предлагается модификация данной задачи, состоящая в оптимизации интеграла от функции цены некоторой вспомогательной задачи оптимального управления по множеству неопределенных параметров, позволяющая избежать непосредственного построения информационных множеств в процессе нахождения оптимальных входов.

В докладе обсуждаются связь данного подхода с подходами, основанными на оптимизации параметров информационных множеств, и методы решения рассматриваемой задачи. Для отдельных частных случаев доказана сводимость рассматриваемой задачи к задаче оптимального управления для нелинейной системы с правой частью зависящей от параметра и целевым функционалом, содержащим интеграл от функции фазового вектора по множеству параметров. Для последней задачи доказаны необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума и предложен алгоритм решения. Проведены численные эксперименты для ряда задач идентификации параметров нелинейных систем, исследовано влияние выбора параметров интегрального функционала (меры интегрирования) на характеристики информационных множеств (качество идентификации).

Experimental Design for Guaranteed Identification of Nonlinear Systems

Gusev M.I.

Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of RAS, Ekaterinburg, Russia

In this report the problem of optimal input choice for identification of the parameters of nonlinear dynamic system on the basis of indirect observation is studied. We consider a deterministic model of uncertainty with set-membership description of the uncertain items. The integral of information function (information state) over the set of a priori constraints on parameters is considered as a criterion of optimality. For the case of integral constraints on measurement noise it is shown that considered problem may be reduced to an optimal control problem for the trajectory tubes of considered system. We describe the algorithm of solution based on necessary optimality conditions and provide some examples of numerical simulation. Considered algorithm allows to avoid the immediate construction of information sets under designing the optimal input that results in computational expenditure reduction.

ПОСТРОЕНИЕ ЗАВИСЯЩИХ ОТ ПАРАМЕТРОВ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА НА ОСНОВЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ЛЕММЫ ЯКУБОВИЧА

Гусев С.В.

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

Предложен новый метод построения зависящих от параметров функций Ляпунова для нелинейных систем с параметрической неопределенностью. Предполагается, что линейная часть системы является рациональной функцией вектора неизвестных параметров, принадлежащего заданному компактному (вообще говоря, невыпуклому) множеству, граница которого также описывается рациональными функциями. Рассматриваются системы с нелинейностью, удовлетворяющей квадратичным неравенствам, которые также могут зависеть от неизвестных параметров. Предложен критерий абсолютной устойчивости всех систем из рассматриваемого параметрического семейства. Критерий выражен в терминах решения некоторых линейных матричных неравенств и дает необходимое и достаточное условие существования квадратичной, зависящей от параметров функции Ляпунова. Полученные результаты представляют собой обобщение некоторых результатов В.А.Якубовича по абсолютной устойчивости нелинейных систем [1] на случай систем с параметрической неопределенностью.

В основе метода лежат обобщения леммы Якубовича [2] и теоремы о неущербности S-процедуры [3] на случай зависящих от параметров квадратичных форм. Используя параметрическую версию леммы Якубовича, удается свести задачу о решении линейных матричных неравенств, рационально зависящих от параметров, к решению некоторого набора не зависящих от параметров линейных матричных неравенств растущей размерности. Полученные результаты представляют интерес вне связи с задачей построения функции Ляпунова. В частности, они могут быть использованы для минимизации рациональных функций в невыпуклых компактных областях, граница которых описывается рациональными функциями. Как одно из приложений этого результата предложен алгоритм проверки положительности полиномов, которые не могут быть представлены в виде суммы квадратов полиномов.

Применение параметрической леммы Якубовича к проверке положительности рациональных функций дает новое доказательство утверждения семнадцатой проблемы Гильберта [4], в случае, когда как числитель, так и знаменатель рассматриваемой функции строго положительны. Некоторые предварительные результаты, связанные с темой доклада, опубликованы в [5].

Литература

[1] Якубович В.А. Частотная теорема в теории управления. Сиб. мат. журн. 1973. Т. 14. № 2. С. 384–419.

[2] Якубович В.А. Решение некоторых матричных неравенств встречающихся в теории автоматического регулирования. ДАН СССР. 1962. Т.143. С. 1304–1307.

[3] Якубович В.А. S-процедура в нелинейной теории регулирования. Вестник ЛГУ. Серия Математика, механика, астрономия. 1971. № 1. С. 62–77.

[4] Проблемы Гильберта. Сборник под общ. ред. П.С. Александрова. Москва. 1969.

[5] Gusev S.V. Parameter-Dependent S-Procedure And Yakubovich Lemma. ArXiv: math.OC/0612794. 2006. P. 1–11.

Construction of Parameter-Dependent Lyapunov Functions Using Parametric Yakubovich Lemma

Gusev S.V.

Saint Petersburg State University, Russia

A new method of parameter-dependent Lyapunov function construction for nonlinear parameter-dependent systems is proposed. The method is based on a generalization of Yakubovich Lemma to the case when the quadratic form depends on parameters. This generalization is called the parametric Yakubovich Lemma. It can be used to give a new proof of the statement of Hilbert's 17th problem under additional assumption that the numerator and denominator of the considered rational function are strictly positive.

ПОСТРОЕНИЕ ГРУБЫХ НЕЗАМКНУТЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ ПРЕВЕНТИВНОЙ КОМПЕНСАЦИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

Дружинин Э.И.

ИДСТУ СО РАН, Иркутск, Россия

Обсуждается актуальная задача автоматического управления движением в условиях неопределенности. Следуя замыслу построения ***незамкнутой*** автоматической системы программного управления *без **текущих** измерений возмущений* [1], предлагается подход, основанный на использовании ***априорной*** информации о требуемой точности значений критерия качества регулирования и о действующих возмущениях. Предлагаемый путь построения незамкнутой системы опирается на ***прямой*** метод расчета программных управлений в нелинейных системах [2,3]. Управление, вычисленное по разработанным алгоритмам [1,6], обеспечивает исполнение задающего воздействия в окрестности, допускаемой точностью регулирования и действующими возмущениями. В силу корректности — устойчивости по А.Н. Тихонову [7] — прямых алгоритмов [8] вычисленные управляющие воздействия, *не использующие **текущих** измерений*, обеспечивают малую чувствительность регулируемых процессов к возмущениям параметров объекта и среды [9].

Литература

[1] Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. – М.: Наука, 1977, 392 с.
[2] Воронов В.А., Дружинин Э.И. Проблема программного управления космическим аппаратом как нелинейная краевая задача в пространстве состояний // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2004. № 3.
[3] Воронов В.В., Дружинин Э.И. Прямой метод формирования программных управлений не-линейными объектами // Изв. РАН ТиСУ. 2005. № 2, с. 10–17.
[4] А.Н.Тихонов, В.Я.Арсенин. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука,1979, 385 с.
[5] Дружинин Э.И. Обусловленность прямых алгоритмов расчета программных управлений нелинейными системами. Труды Международного семинара «Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби». Екатеринбург, издательство Уральского университета, 2006, том 2, с.136-142.
[6] Э.И. Дружинин, С.Н. Васильев, В.А. Воронов. Новая вычислительная технология формирования программных управлений в нелинейных системах. XIII Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам, 29-31мая 2006. Санкт-Петербург, Россия, с. 167–174.

On Constructing the Robust Open Control Systems on Basis of Preventive Compensation of Perturbations

Druzhinin E.I.

Institute for System Dynamics and Control Theory (ISDCT) of SB RAS, Irkutsk, Russia

The well-condition property (stability by A.N.Tichonov) of direct computational algorithms is closely associated with the nonsensitivity property of the calculated controls to perturbations of system parameters, their so-called "parametric robustness". The underlying ideology of the direct method to ensure realization of the route in the neighborhood determined by the assigned accuracy that has been successfully employed in a particular problem of controlling the scanning in the assigned route of the spacecraft optical axis, leads to a new solution for the problem of controlling from the driving action, or, in more general terms, to a new concept of constructing open control systems, to the concept of preventive compensation of perturbations.

РИСКИ В МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ

Жуковский В.И.*, Сорокин К.С.**

*Российский заочный институт текстильной и легкой промышленности (РосЗИТЛП), Москва, Россия,
**ВМиК МГУ, Россия

Блестящая идея А.М. Ляпунова о возможности судить об устойчивости, ограничиваясь только свойствами функции Ляпунова и её производной, в докладе преломляется в возможность судить об оптимальности решения многокритериальной позиционной динамической задачи при неопределённости (МЗН) по экстремальным свойствам производной функции Беллмана-Красовского. Рассматривается МЗН:

$$\Gamma = \langle \Sigma, \mathbf{U}, \mathbf{Z}, \{J_i(U, Z, t_0, x_0)\}_{i\in N} \rangle ,$$

где $N = \{1, \dots, n\}$; $\Sigma \div \dot{x} = f(t, x, u, z)$, $x(t_0) = x_0$; $t \in [t_0, \vartheta]$, $\vartheta > t_0 \geq 0$, $x \in R^n$, $u \in R^m$, $z \in R^k$; $\mathbf{U} = \{U \div u(t, x, z)\}$, $\mathbf{Z} = \{Z \div z[\cdot] \mid \dot{z} = \Psi(t, z),\ z[t_0] = z_0\ \forall z_0 \in R^k\}$, $J_i(U, Z, t_0, x_0) = \varphi_i(x(\vartheta)) + \int\limits_{t_0}^{\vartheta} F_i(t, x(t), u[t], z[t])dt$.

Для Γ вводятся функции (функционалы) риска $\Phi_i(U, Z, t_0, x_0) = \max\limits_{V\in\mathbf{U}} J_i(V, Z, t_0, x_0) - J_i(U, Z, t_0, x_0)$ $(i \in N)$ и n-вектора $J = (J_1, \dots, J_n)$ и $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_n)$.

Определение. Тройку $(U^*, J^*[t_0, x_0], \Phi^*[t_0, x_0]) \in \mathbf{U} \times R^{2n}$ *назовём гарантированным по исходам и рискам решением* (ГИР) задачи Γ с начальной позицией (t_0, x_0), если существует $Z_* \in \mathbf{Z}$, при которой $J_i^*[t_0, x_0] = J_i(U^*, Z_*, t_0, x_0)$, $\Phi_i^*[t_0, x_0] = \Phi_i(U^*, Z_*, t_0, x_0)$ и
1^0) для каждого $Z \in \mathbf{Z}$ контрстратегия $U^* \in \mathbf{U}$ максимальна по Парето в

$$\Gamma(Z) = \left\langle \Sigma(z), \mathbf{U}, \{J_i(U, Z, t_0, x_0), -\Phi_i(U, Z, t_0, x_0)\}_{i\in N} \right\rangle ;$$

2^0) неопределённость $Z_* \in \mathbf{Z}$ минимальна по Парето в

$$\Gamma(U^*) = \left\langle \Sigma(U^*), \mathbf{Z}, \{J_i(U^*, Z, t_0, x_0), -\Phi_i(U^*, Z, t_0, x_0)\}_{i\in N} \right\rangle .$$

Предлагаются достаточные условия существования ГИР (основываясь на виде Φ_i и на теории многокритериальных задач), затем с помощью [1] модифицируются соответствующие уравнения динамического программирования. В заключение найден явный вид ГИР для линейно-квадратичной Γ.

При финансовой поддержке РФФИ грант № 05-01-00419.

Литература

[1] V.I. Zhukovskiy. Lyapunov Functions in Differential Games. London and New York: Teylor & Francis Group, 2003, 281 p.

Risks in Multi-Criteria Problems

Zhukovskiy V.I.*, Sorokin K.S.**

*Russian Correspondence Institute of Textile and Light Industry, Moscow, Russia,
**Lomonosov Moscow State University, Russia

The dynamic multi-criteria problem in positional counter-strategies under uncertainty is considered in this paper. The risk function for each criteria is introduced and the guaranteed in outcome and risk solution is formalized. The existence theorem is proved and in linear-quadratic case the explicit solution is found.

О СТАБИЛИЗАЦИИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С НАБЛЮДАТЕЛЕМ

Зайцев В.А.

Удмуртский государственный университет, Россия

Рассмотрим линейную динамическую систему

$$\begin{aligned} &\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad &(t,x,u) \in R^{1+n+m}, \\ &y = C(t)x, &y \in R^k \end{aligned} \tag{1}$$

с измеримыми ограниченными коэффициентами. Построим по системе (1) и по выходному сигналу y оценку $\hat{x}$ состояния системы (1):

$$\dot{\hat{x}} = A(t)\hat{x} + V(t)(y(t) - C(t)\hat{x}) + B(t)u, \quad \hat{x} \in R^n. \tag{2}$$

Пусть закон управления имеет вид

$$u = U(t)\hat{x}. \tag{3}$$

Замкнутая $2n$-мерная система (1)–(3) примет вид

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(t) & B(t)U(t) \\ V(t)C(t) & A(t) + B(t)U(t) - V(t)C(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ \hat{x} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Пусть $\widetilde{x} = x - \hat{x}$. Перейдем в системе (4) к переменным $(x, \widetilde{x})$, получим систему

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\widetilde{x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(t) + B(t)U(t) & -B(t)U(t) \\ 0 & A(t) - V(t)C(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ \widetilde{x} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Теорема 1. Пусть система (1) равномерно вполне управляема и равномерно вполне наблюдаема (при $u = 0$). Тогда для любых чисел $\lambda, \mu \in R$ существуют измеримые ограниченные управления $U(t)$, $V(t)$ и постоянная матрица S, такие что система (5) с этими управлениями приводима преобразованием Ляпунова к системе

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\widetilde{x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(t) + \lambda I & S \\ 0 & A(t) + \mu I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ \widetilde{x} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Теорема 2. Пусть система (1) равномерно вполне управляема и равномерно вполне наблюдаема (при $u = 0$), и коэффициенты системы (1) — периодические функции. Тогда для любого $v > 0$ существуют периодические измеримые ограниченные управления $U(t)$, $V(t)$ такие что система (5) с этими управлениями приводима периодическим преобразованием Ляпунова к системе постоянной матрицей P, такой что $\mathrm{Re}\lambda_i < -v$ для всех собственных значений λ_i матрицы P.

Работа поддержана РФФИ (грант № 06–01–00258).

On Stabilization of a Periodic System with Observer

Zaytsev V.A.

Udmurtia State University, Russia

If periodic system with observer is uniformly completely controllable and uniformly completely observable then it is uniformly stabilizable by periodic control functions

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИССИПАТИВНЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ СОВРЕМЕННЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Зотеев В.Е.

Самарский государственный технический университет, Россия

Известно, что достоверная оценка и анализ изменения характеристик рассеяния энергии колебаний механической системы в процессе ее эксплуатации или прочностных промышленных испытаний является важнейшей проблемой в машиностроении. Традиционные методы определения диссипативных характеристик, в основе которых лежат простые математические модели, обычно используют результаты нескольких измерений и не ориентированы на применение статистических методов обработки экспериментальных данных. Отдельные попытки частичной или полной компьютеризации и автоматизации процесса определения параметров диссипативной системы не затрагивали самой методологии, вследствие чего существенно повысить достоверность оценок не удавалось. Современный уровень развития средств вычислений позволяет коренным образом изменить методы моделирования, идентификации и диагностики, внедрить в практику исследований демпфирующих свойств машин и механизмов статистические методы анализа и тем самым существенно повысить качество и достоверность результатов обработки экспериментальных данных. Принципиально решить проблему качественного изменения способа определения диссипативных характеристик механической системы можно только на основе новых математических моделей, ориентированных на применение современных методов параметрической идентификации и компьютеризацию алгоритмов вычислений.

При разработке новых эффективных методов параметрической идентификации нелинейных диссипативных систем в формате современных информационных технологий были решены следующие основные задачи. Во-первых, построены линейно параметрические дискретные модели в форме стохастических разностных уравнений, описывающие временные последовательности результатов измерений виброграммы свободных колебаний механических систем с линейно вязким, турбулентным и кулоновым трением, систем с диссипативными силами, пропорциональными n-й степени скорости движения, систем с гистерезисным трением. Модели этого класса линейны относительно коэффициентов, известным образом связанных с динамическими характеристиками системы, в том числе с характеристикой нелинейности диссипативной силы, которая является важнейшим диагностическим признаком технического состояния механической системы. Во-вторых, на основе полученных линейно параметрических дискретных моделей в форме стохастических разностных уравнений разработан и исследован помехоустойчивый метод оценивания динамических характеристик нелинейной диссипативной системы. В основе метода лежит итерационная процедура средне-квадратичного оценивания коэффициентов стохастического разностного уравнения. Известные соотношения между этими коэффициентами и параметрами диссипативной системы позволяют не только вычислять динамические характеристики с высокой точностью, но и достоверно оценивать погрешность полученных результатов. В третьих, решена задача эффективного внедрения в практику обработки результатов эксперимента по определению характеристик рассеяния энергии колебаний нелинейной механической системы современных средств вычислений. Разработано программное обеспечение, реализующее устойчивые алгоритмы оценивания динамических характеристик нелинейной диссипативной системы.

Численно-аналитические исследования и результаты применения данного метода в задачах идентификации параметров моделей неупругого деформирования и разрушения материалов показали его высокую эффективность и надежность.

Parametrical Identification of Nonlinear Dissipative Systems Based on Modern Information Technologies

Zoteev V.E.

Samara State Technical University, Russia

The problem of qualitative change of methods for mechanical systems dissipative characteristics determination can be solved in the frame of modern information technologies.

In the present work, new mathematical models are developed in the form of stochastic difference equations, describing time sequences of measurements of free fluctuations of nonlinear dissipative systems.

ЛОКАЛИЗАЦИЯ ПРЕДЕЛЬНОГО МНОЖЕСТВА И ПРЕДКОМПАКТНОСТЬ ТРАЕКТОРИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Зуев А.Л.

Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Донецк, Украина

Теорема Барбашина-Красовского и принцип инвариантности ЛаСалля позволяют исследовать характер предельного множества траектории автономной системы дифференциальных уравнений с помощью функции Ляпунова, имеющей знакопостоянную производную. Для обобщения этого подхода на случай динамических систем в бесконечномерных пространствах необходимо дополнительно проверять условие предкомпактности (относительной компактности) исследуемых траекторий, поскольку такое условие не следует из ограниченности решений. В статье [1] предложено достаточное условие предкомпактности положительных полутраекторий для абстрактной задачи Коши на промежутке $t \in [0, +\infty)$ следующего вида:

$$\dot{x}(t) = Ax(t),\ x(0) = x_0 \in X, \tag{1}$$

где X – вещественное банахово пространство, A – замкнутый (вообще говоря, неограниченный) оператор с областью определения $D(A) \subset X$ и значениями в X. В цитируемой статье предполагается, что оператор $-A$ является монотонным.

С целью изучения более широкого класса уравнений (в том числе с немонотонными операторами) рассмотрим возмущенную задачу Коши на промежутке $t \geq 0$:

$$\dot{x} = Ax + f(t)R(x,t),\ x(0) = x_0 \in X, \tag{2}$$

где $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $R : X \times [0, +\infty) \to X$ – непрерывные отображения.

В настоящем сообщении доказано сохранение свойства предкомпактности траекторий при переходе от уравнения (1) к (2) с некоторыми дополнительными предположениями на функцию f и отображение R. С помощью этого результата получены достаточные условия предкомпактности траекторий нелинейного автономного дифференциального уравнения в банаховом пространстве. В качестве приложения рассмотрены задачи о стабилизации и частичной стабилизации положения равновесия механической системы в виде твердого тела с присоединенными упругими элементами.

Идея доказательства распространяет подход [2] на случай банахова пространства с базисом. Как показывают примеры, полученный результат справедлив без предположения о монотонности генератора нелинейной полугруппы.

Работа выполнена за счет бюджетных средств МОН Украины, предоставленных как грант Президента Украины GP/F13/0173.

Л и т е р а т у р а

[1] *Dafermos C.M., Slemrod M.* Asymptotic behavior of nonlinear contraction semigroups // Journal of Functional Analysis. – 1973. – **13**. – P. 97–106.

[2] *Zuyev A.L.* Partial asymptotic stabilization of nonlinear distributed parameter systems // Automatica. – 2005. – **41**, No 1. – P. 1-10.

Localization of the Limit Set and the Precompactness of Trajectories in a Banach Space

Zuyev A.L.

Institute of Applied Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Ukraine, Donetsk, Ukraine

A class of bounded perturbations of a linear differential equation in a Banach space is considered. Sufficient conditions for the trajectories precompactness of the perturbed system is proposed. Such conditions are shown to be applicable for a nonlinear differential equation without assuming that the corresponding infinitesimal generator is accretive.

This work is supported by the Ministry of Education and Science of Ukraine through grant GP/F13/0173 of the President of Ukraine for Young Scientists.

НЕЛИНЕЙНЫЕ УПРАВЛЯЕМЫЕ СИСТЕМЫ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Комлева Т.А.*, Плотников А.В.**

**Одесский национальный политехнический университет, Украина,*
***Одесская государственная академия строительства и архитектуры, Украина*

В 80-х годах XX века возникла теория управления объектами в условиях неопределенности. Это связано с тем, что не все управляющие воздействия, которые влияют на состояние динамической системы, подвластны воле человека. При разрешении практических задач важно учитывать: недостаток информации о каких либо параметрах системы, погрешности в исходных данных, ошибки в показаниях измерительных приборов, действующие на систему неконтролируемые помехи и возмущения и др.

В данном докладе предполагается, что на объект кроме управлений воздействуют помехи, относительно которых известна лишь область их изменения. Чтобы учесть эти помехи, в уравнение движения вводят параметр v:

$$\dot{x} = f(t, x, u, v), \;\; x(t_0) = x_0, \; u \in U, \; v \in V. \tag{1}$$

При изучении системы (1) в докладе рассматриваются следующие два подхода.

Первый подход. Подставив в уравнение (1) вместо неопределенных параметров область их изменения, в результате получим дифференциальное уравнение с многозначной правой частью, которое содержит только управление [1-6].

Второй подход основан на том, что по своей формулировке полученная задача близка к задачам теории дифференциальных игр в предположении, что помеха — это другой игрок [7-9].

Л и т е р а т у р а

[1] Плотников А.В. Асимптотическое исследование уравнений управляемого движения с многозначными траекториями // Укр. матем. журнал, 1990, Т.42, №10 - с. 1409-1412.
[2] Плотников А.В. Компактность множества достижимости нелинейного дифференциального включения, содержащего управление // Киев: Кибернетика, 1990. №6. - с. 116-118.
[3] Плотников А.В. Задача управления пучками траекторий // Сиб. мат. ж. 1992. Т.33, №2 - с. 196-199.
[4] Плотников В.А., Плотников А.В., Витюк А.Н. Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы. - Монография - Одесса: Астропринт, 1999. - 356 с.
[5] Плотников А.В. Необходимые условия оптимальности для одной нелинейной задачи управления пучками траекторий // Кибернетика и системный анализ, 2000. №5 - С. 112-118.
[6] Plotnikov V.A., Plotnikov A.V. The multivalued differential equations and optimal control / Applications of Mathematics in Engineering and Economics, Proceeding of the XXVI Summer School, Sozopol'2000 , Editors: B.I. Cheshankov, M.D. Todorov. Heron Press, Sofia, 2001. - P. 60-67.
[7] Комлева Т.А., Плотников А.В. О завершении преследования для неавтономной дифференциальной игры двух лиц // Нелінійні коливання, 2000. Т.3, №4. - С. 469-473.
[8] Комлева Т.А. О времени завершения преследования в одной нелинейной дифференциальной игре // Укр. мат. журн. - 2001. - Т.53, №5. - С. 702-706.
[9] Комлева Т.А. Алгебраические условия управляемости динамической системы при неопределенности / Международная конференция, посвященная 75 летию со дня рождения В.И. Зубова «Устойчивость и процессы управления», Россия, Санкт-Петербург 29.06.-01.07.2005. Сборник трудов. Санкт-Петерб. Гос. Университет, 2005. Т.3. - С. 1407-1413.

Nonlinear Controlled Systems under Conditions of Uncertainty

Komleva T.A.*, Plotnikov A.V.**

**Odessa National Polytechnical University, Ukraine,*
***Odessa State Academy Civil Engineering and Architecture, Ukraine*

In the report, nonlinear control systems under conditions of uncertainty are considered. Some results obtained by means of two approaches are presented. The first approach is the transition to controlled differential inclusions and the second one — application of methods similar to methods used in the theory of differential prosecution games.

РАЗВИТИЕ ИДЕЙ МЕТОДА А.М. ЛЯПУНОВА В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

Коробов В.И.

Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, Украина, Szczecinsky University, Institute of Mathematic (Szczecin, Poland)

Широкое применение к задачам управления и дальнейшее развитие получил метод функции А.М. Ляпунова. Это прежде всего касается задачи оптимальной стабилизации на бесконечном промежутке времени, развитых В.И. Зубовым, Н.Н. Красовским, А.М. Лётовым и многими другими авторами. Дальнейшее его развитие также связано с результатами по векторным функциям А.М. Ляпунова (А.М. Матросов), теории частичной устойчивости (В.В. Румянцев, А.С. Озиранер). Одним из направлений развития метода функций А.М. Ляпунова стал метод функции управляемости, предложенный автором в 1979 году, для решения задачи допустимого синтеза позиционного управления на конечном промежутке времени с наперед заданными ограничениями на управление.

Под этой задачей для управляемой системы будем понимать задачу нахождения управления в виде функции фазовых координат, удовлетворяющего заданным ограничениям и такой, что траектория полученной замкнутой системы дифференциальных уравнений, начинающаяся в произвольной начальной точке, оканчивается в заданной точке в конечный момент времени.

Предложенный метод предполагает построение функции управляемости и соответствующего управления таким образом, чтобы удовлетворялось некоторое дифференциальное соотношение, подобное как соотношению для функции Ляпунова в теории устойчивости, так и соотношению для функции Беллмана в теории оптимального управления. При этом для функции управляемости естественным способом ее задания является неявный способ, что отличает от традиционного явного задания функции Ляпунова, либо как решение уравнения в частных производных. С помощью функции управляемости оценивается снизу и сверху время движения. Эта функция может являться и временем движения, в частности, оптимальным в задаче быстродействия. Отметим, что метод функции управляемости близок, с одной стороны, к методу функций Ляпунова, а, с другой стороны – к методу динамического программирования (функция Беллмана, в частности, может быть рассмотрена как функция управляемости).

Рассмотрены способы построения функции управляемости и позиционного управления для линейных систем, в том числе в бесконечномерных пространствах, и некоторых классов нелинейных систем с точкой покоя. Решена задача синтеза для класса нелинейных систем, которые с помощью замены фазовых переменных и управления отображаются на линейные. В общем случае, решение задачи синтеза для нелинейных систем проводится по первому приближению. Рассмотрена задача синтеза инерционных управлений, т.е. задача синтеза с ограничениями на управление и его производные до заданного порядка.

Метод функции управляемости может быть распространен на случай, когда конечная точка не является точкой покоя системы. Тогда синтез неустойчив в том смысле, что после попадания в эту точку траектория не только не остается в ней, но покидает некоторую ее окрестность и снова возвращается в эту точку за конечное время.

Для решения задачи синтеза также сформулирован *допустимый принцип максимума*, который по форме подобен принципу максимума в оптимальном управлении, но при этом указывается сопряженная функция, которая является функцией фазовых координат, а не времени, что позволяет определять позиционное управление.

Development of A.M. Lyapunov Ideas in the Mathematical Control Theory

Korobov V.I.

Kharkov National University named by V.N. Karazin, Ukraine
Szczecinsky University, Institute of Mathematic (Szczecin, Poland)

Method of controllability function proposed by the author for the solution of the allowable synthesis problem for positional control on the finite time interval and preset constraints is discussed.

О СХОДИМОСТИ ДВОЙСТВЕННОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Кротов В.Ф., Булатов А.В.

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Россия

Двойственный метод численного решения задач оптимального управления, основанный на максимизации нижней оценки функционала качества, был предложен в [1]. В [2] приведен обзор результатов применения этого метода к конкретным задачам оптимального управления, как дискретными системами, так и системами с непрерывным временем.

Рассматривается следующая задача

$$I(x,u)=\int_0^T\left(\sum_{i=1}^n a_i(x^i)^2+\eta u^2\right)dt,$$

$$x'=Ax+bu,\quad x(0)=x_0,\quad \big(x(t),u(t)\big)\in V(t).$$

В докладе представлена детальная схема применения двойственного метода к этой задаче, все этапы которой полностью алгоритмизированы. Приводятся новые общие результаты о сходимости двойственного метода.

Литература

[1] Кротов В.Ф. Вычислительные алгоритмы решения и оптимизации управляемых систем уравнений. I, II. // Техническая кибернетика, 1975, N 5, 6.
[2] Krotov V.F. Global Methods in Optimal Control Theory. Marcel Dekker Inc.: NY, 1996.

On the Convergence of a Dual Method for a Linear-Quadratic Optimal Control Problem

Krotov V.F., Bulatov A.V.

Institute of Control Problems, RAS, Russia

Application of a dual method is elaborated for the common linear-quadratic optimal control problem. New results on the convergence of the dual method in general continuous-time problem are presented.

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ИЕРАРХИЧЕСКИХ СИСТЕМ В УСЛОВИЯХ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Кругликов С.В.

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, Россия

Исследованы достаточные условия устойчивости взаимодействия двух иерархических систем при условии, что управляющие воздействия каждой из них формируются независимо по частично доступной информации. Формирование управления реализуется на основе сочетания решений априорных задач управления и оценивания в гарантированной постановке по схеме принципа разделения. Достаточные условия сформулированы на основе согласования экстремальных критериев качества участников и свойств доступной информации. Реализации возмущений моделируются локальными сегментами, имеющими вероятностное распределение как элементы функционального пространства с мерой.

Принято представление взаимодействия иерархических систем в виде структурированной дискретной последовательности выбора синхронизированных действий отдельных объектов согласно лексикографически упорядоченным типовым критериям эффективности. Предполагается, что показатели качества оценивают: стабильность текущего состояния и/или процесса функционирования, достижение целевого терминального состояния, относительную эффективность функционирования. Координация взаимодействия подсистем осуществляется за счет распределения планирования по уровням организации, что возможно при согласованности информации. Качественным ограничением в данном случае выступают не только возможности и архитектура сети передачи данных, но и структура внутреннего представления информации. Текущая ситуация допускает различное описание в силу информационной ограниченности внешнего наблюдения и участников.

Рассматривается модель организации внутреннего представления информации, обеспечивающая согласование дискретно поступающих данных для устойчивого функционирования системы. Условия информированности каждого участника описываются системой отображений, определяющей порядок и приоритеты последовательного преобразования поступающих извне данных во внутреннее представление информации, включающее отношения порядка и эквивалентности объектов, которые детерминирует возможные действия. Ситуация и дискретный процесс формирования управленческих решений участниками моделируется в терминах внутреннего измеримого пространства сегментированных траекторий динамической системы с мерой, индуцированной вероятностными распределениями отдельных сегментов. Алгоритмы текущего поведения *участников* определяются на основе комбинации локальных сегментов $w =< u, v >$, $u = (p, o, e)\ /\ v = (q, a, r)$; параметризованных по кратности одинаковых операторов перехода $o, a \in O$, $p_1 = o(p)$. Описание состояния $p = (c, P/+/, P/-/) \in P$, $q = (c, Q/+/, Q/-/)$ объекта и окружения включает непрерывное положение c, центр области $S_o \subseteq R^2$, и индексы дискретных связей $P/o/, P/-/, P/+/$.

Достаточные условия устойчивости взаимодействия, как отдельных подсистем, так и систем между собой систем исследованы в терминах отношений порядка $e \in E$, $r \in R$ для случая, когда экстремальные критерии качества участников допускают согласование, а ограничения на поступающий ресурс интегральные.

Предложенная формализация применена для разработки программно-математического обеспечения моделирующего варианты прокладки маршрута совместного движения группы кораблей в различных условиях.

Conditions Sufficient for Interaction of Hierarchical Systems to be Stable under Uncertainty

Kruglikov S.V.

Institute for Mathematics & Mechanics, Urals Branch of Russian Academy of Sciences
Urals State Technical University-UPI, Yekaterinburg, Russia

Conditions for interaction of a couple of hierarchical systems to be stable are investigated under uncertainty. For each system the independent feed-back control based on the incomplete information is formed in accordance with the separation principle for the a priori control and estimation problems in guaranteed statement. The sufficient conditions of interaction stability are formulated in terms of quality induces and the structure of available information.

О ФУНКЦИОНАЛАХ ЛЯПУНОВА В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Лукоянов Н.Ю.

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, Россия

Рассматривается задача об управлении динамической системой в условиях неконтролируемых помех. Движение системы описывается нелинейными дифференциальными уравнениями с последействием. Качество процесса управления оценивается заданным показателем, который представляет собой функционал, определенный на траекториях системы и на реализациях управления и помехи. Мгновенные значения воздействий управления и помехи стеснены геометрическими ограничениями в виде компактных множеств соответствующих конечномерных арифметических пространств.

Формализация задачи опирается на функциональную трактовку систем с последействием [1] и проводится в рамках теоретико-игрового подхода [2–4]. Одним из основных в этом подходе является понятие оптимального гарантированного результата (ОГР). В данной задаче величина ОГР представляет собой функционал, определенный на историях движения. Если этот функционал обладает подходящими свойствами гладкости, например, является коинвариантно гладким [5], оптимальную стратегию управления, обеспечивающую результат, не худший, чем ОГР, можно строить по правилу экстремального сдвига в направлении его градиента. Однако в большинстве случаев величина ОГР не является гладкой. Поэтому используются более сложные конструкции экстремального сдвига или прицеливания (см., например, [2–4,6,7]).

В этой связи в докладе рассматривается конструкция построения стратегии управления [7], основанная на методе экстремального сдвига в направлении коинвариантных градиентов вспомогательных функционалов типа Ляпунова. Упомянутый метод представляет собой обобщение на случай систем с последействием метода [6] прицеливания в направлении квазиградиента функции цены. Приводятся и обсуждаются условия для системы и функционала Ляпунова, при которых рассматриваемый способ формирования управляющих воздействий решает задачу об управлении с оптимальным гарантированным результатом.

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда содействия отечественной науке, гранта Президента Российской Федерации МД-6133.2006.1 и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-01-00436).

Литература

[1] Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959.

[2] Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.

[3] Осипов Ю.С. Дифференциальные игры систем с последействием// Доклады АН СССР, 1971. Т.196. №4. С. 779-782.

[4] Красовский Н.Н. Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. М.: Наука, 1985.

[5] Kim A.V. Functional Differential Equations. Application of i-Smooth Calculus. Dordrecht: Kluwer, 1999.

[6] Гарнышева Г.Г., Субботин А.И. Стратегии минимаксного прицеливания в направлении квазиградиента// Прикладная математика и механика, 1994. Т.58. Вып.4. С. 5-11.

[7] Лукоянов Н.Ю. Стратегии прицеливания в направлении инвариантных градиентов// Прикладная математика и механика, 2004. Т.68. Вып.4. С. 629-643.

On Lyapunov Functionals in Control Problems of Nonlinear Systems with Aftereffect

Lukoyanov N.Yu.

Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of RAS, Ekaterinburg, Russia

For problems of control of nonlinear dynamical systems with aftereffect under conditions of disturbances, a control strategy constructed on the basis of extremal shift in direction of co-invariant gradients of auxiliary functionals of Lyapunov type is considered. Conditions are given for the system and Lyapunov functional under which the considered strategy solves the problem of control with optimal guaranteed result.

ДИНАМИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ УПРАВЛЕНИЙ В УРАВНЕНИИ ФАЗОВОГО ПОЛЯ

Максимов В.И.

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, Россия

Рассматривается задача устойчивого динамического восстановления неизвестных характеристик нелинейной распределенной системы, описываемой уравнениями фазового поля, введенными в 1986 году в работе [Caginalp G. Arch. Rat. Mech. Analysis. 1986. V. 92. P. 205–245] и имеющими вид

$$\frac{\partial\psi(t,\eta)}{\partial t} + l\frac{\partial\varphi(t,\eta)}{\partial t} = \Delta\psi(t,\eta) + u(t,\eta), \quad (t,\eta) \in Q = T \times \Omega, \quad T[0,\vartheta],$$

$$\frac{\partial\varphi(t,\eta)}{\partial t} = \Delta\varphi(t,\eta) + g(\varphi(t,\eta)),$$

$$\frac{\partial}{\partial n}\psi(t,\sigma) = \frac{\partial}{\partial n}\varphi(t,\sigma) = 0, \quad (t,\sigma) \in T \times \Gamma,$$

$$\psi(0,\eta) = \psi_0(\eta), \quad \varphi(0,\eta) = \varphi_0(\eta), \quad \eta \in \Omega.$$

Здесь $\Omega \subset R^n$ $(n = 2,3)$ — область с достаточно гладкой границей, $g(\varphi(t,\eta)) = a(t,\eta)\varphi(t,\eta) + b(t,\eta)\varphi^2(t,\eta) - c(\eta)\varphi^3(t,\eta) + \psi(t,\eta)$, Δ — оператор Лапласа, $\psi(t,\eta)$ описывает температуру среды, $\varphi(t,\eta)$ характеризует различие между твердой и жидкой подобластями Ω, $l > 0$ — константа, $a(t,\eta)$, $b(t,\eta) \in L_\infty(T \times \Omega)$ и $c(\eta) \in L_\infty$ — заданные функции, $c(\eta) \geq c > 0$ при п.в. $\eta \in \Omega$, $\psi_0(\eta)$ и $\varphi_0(\eta)$ — начальные состояния. В отличие от классической задачи Стефана, которая моделирует легко обнаруживаемое четкое взаимодействие твердой и жидкой фаз, уравнения фазового поля применимы для расплывчатой, кашеобразной области. В последние годы эти уравнения систематически изучались. Были доказаны теоремы существования и единственности классических и обобщенных решений, приведены достаточные условия их регулярности, рассмотрены методы численного решения, исследованы задачи оптимального программного управления и т.д. В то же время задачи реконструкции (называемые также обратными задачами динамики или задачами идентификации) для уравнений фазового поля практически не рассматривались. Цель данного сообщения заключается в описании устойчивых алгоритмов решения подобных задач для указанных уравнений. Предлагаемые алгоритмы основываются на конструкциях аппарата динамического обращения и разработанном в рамках теории позиционных дифференциальных игр методе экстремального сдвига.

Содержательно суть одной из рассматриваемых задач состоит в следующем. На систему действует ненаблюдаемое управление $u = u_*(\cdot)$. Диапазон допустимых управлений достаточно велик и описан заранее. (Будем предполагать, что множество допустимых управлений имеет вид: $P(\cdot) = \{u(\cdot) \in L_2(T;H) \colon u(t) \in P$ при п.в. $t \in [0,\vartheta]\}$, где $P \subset H$ — заданное выпуклое, ограниченное и замкнутое множество.) В дискретные достаточно частые моменты времени $\tau_i \in \Delta = \{\tau_i\}_{i=0}^m$ $(\tau_0 = 0,\ \tau_m = \theta,\ \tau_{i+1} = \tau_i + \delta)$ приближенно измеряется часть фазового состояния системы $\{\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)\}$. Результаты измерений — функции $\xi_i = \xi_i(\eta) \in L_2(\Omega)$ — удовлетворяют неравенствам $|\varphi(\tau_i) - \xi_i|_H \leq h$. Требуется указать алгоритм, позволяющий «синхронно» с развитием процесса осуществлять приближенное восстановление неизвестной координаты $\psi(\cdot)$, а также неизвестного входа $u = u_*(\cdot)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 07-01-00008) и Программы поддержки фундаментальных исследований Президиума РАН № 15 «Математические методы в нелинейной динамике».

Dynamic Identification of Controls in the Phase Field Equation

Maksimov V.I.

Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of RAS, Ekaterinburg, Russia

A problem of stable dynamical rebuilding of unknown characteristics of a nonlinear distributed system described by the phase field equations is considered.

ОБ ОПТИМАЛЬНЫХ ПО УСТОЙЧИВОСТИ ЗАКОНАХ УПРАВЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

Масина О.Н.

Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина, Россия

Рассмотрим управляемую динамическую систему $< X, T, \varphi, U >$, движение которой описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{dt} = g(x, u), u \in U,$$

где $u \in U$ – допустимый закон управления. Пространство выходных сигналов будем отождествлять с пространством состояний. Каждому конкретному выбору закона управления будет отвечать стационарная динамическая система $< X, T, \varphi_u >$, для которой $\varphi_u(t, x) = \varphi[t, x, u]$.

Теорема. *Пусть для кусочно-гладкой стационарной управляемой системы $< X, T, \varphi, U >$ выполнены условия*:

1) *существует расщепляющий управляемую систему гомеоморфизм $\gamma : X \to X^+ \oplus X^-$ такой, что состояние равновесия x_0 совпадает с началом координат пространства $X^+ \oplus X^-$*;

2) *при отсутствии управления начало координат порожденной гомеоморфизмом γ подсистемы $< X^{-1}, T, \varphi^{-1}, U >$ асимптотически устойчиво в целом и устойчиво относительно малых изменений правой части*;

3) *закон управления*

$$\hat{u}^+ : X^+ \to X, \hat{u}^+(x^+) ::= \hat{u}[\gamma^{-1}(x^+)]$$

является оптимальным по устойчивости для подсистемы $< X^+, T, \varphi^+, U >$ при всех $x^+ \in X^+$;

4) *оптимальный по устойчивости закон управления $\hat{u}^+$ либо стремится к нулю вместе с нормой $\|x^+\|$, либо приводит состояние x^+ области управляемости неустойчивой подсистемы к нулю в течение промежутка времени, после чего обращается в нуль.*

Тогда закон управления $\hat{u} \in U$ является оптимальным по устойчивости относительно состояния равновесия $x_0 \in X$.

В настоящем сообщении дано дальнейшее развитие результатов работы [1].

Литература

[1] Масина О. Н. К задаче обеспечения устойчивости управляемой системы // Качественное и численное исследование математических моделей динамических систем. М.: РГОТУПС, 2006. С. 95 – 97.

On the Optimum on Stability Laws of Control of Nonlinear Dynamic Systems

Masina O.N.

Eletsk State University named after I.A. Bunin, Russia

In the present work, with the help of splitting homeomorphisms notion and methods of system analysis, the optimum on stability laws of control of nonlinear dynamic systems are found.

ПОСТРОЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ НЕЛИНЕЙНЫХ СВЯЗАННЫХ СИСТЕМ

Мухарлямов Р.Г.

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

Решение задач динамики и управления системами различной физической природы сводится к построению систем обыкновенных дифференциальных уравнений относительно переменных, которые удовлетворяют заданным уравнениям связей. Непосредственное использование этой системы, построенной на основе принципов классической динамики, для численного моделирования приводит к неустойчивым разностным схемам решения. Стабилизация связей обеспечивается, если при составлении дифференциальных уравнений динамики учитывать возможные отклонения от уравнений связей. Общая структура соответствующих дифференциальных уравнений определяется из множества систем дифференциальных уравнений, первые или частные интегралы которых известны заранее. Правые части искомой системы дифференциальных уравнений содержат произвольные функции, выбором которых можно управлять движением по многообразию, соответствующему уравнениям связей, и в его окрестности. Это позволяет обеспечить устойчивость многообразия, распределение семейства траекторий в данной области, необходимую точность выполнения уравнений связей при численном решении и другие свойства решений системы.

Из множества систем дифференциальных уравнений, соответствующего заданной совокупности интегралов, можно выделить системы, обладающие дополнительными свойствами. Так, современные обратные задачи динамики предусматривают построение системы дифференциальных уравнений определенной структуры, по которой устанавливается выражение функционала, принимающего стационарное значение на ее решениях. В силу известных динамических аналогий указанными свойствами могут обладать и другие системы различной физической природы.

В докладе излагается метод решения задачи составления уравнений динамики требуемой структуры, допускающих заданные интегралы. Определяются условия, допускающие построение дифференциальных уравнений в форме уравнений Лагранжа и обеспечивающие стабилизацию связей. Рассматриваются некоторые прикладные задачи.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, код 06-01-00664.

The Construction of Dynamical Equations of Nonlinear Constrained Systems

Muharliamov R.G.

Peoples Friendship University of Russia, Moscow, Russia

The design method of the constrained mechanical systems dynamical equations is proposed. The stability of programmed manifold is obtained by construction of the corresponding constraint perturbation equations. The dynamical equations of a system with programmed constraints are set up in the form of Lagrange's equations in generalized coordinates. For the solution of these problems, the method of construction of differential equations by set integrals is used. Some applied problems are considered.

The work was supported by the Russian Foundation for Basic Research, project 06-01-00664.

РАСШИРЕНИЕ ИССЛЕДОВАНИЙ А.М. ЛЯПУНОВА НА ПРОБЛЕМУ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Орлов В.Б., Петров Ю.П.

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

Классические результаты исследований А.М. Ляпунова и его последователей ([1], [2] и др.) относятся к системам дифференциальных уравнений с неизменными коэффициентами. Однако у большинства объектов физики и техники их параметры — а, значит, и коэффициенты их математических моделей — не остаются идеально постоянными и могут отклоняться от расчетных значений.

Поэтому (в последнее время) все большее внимание уделяется исследованию систем, сохраняющих устойчивость при малых отклонениях коэффициентов и параметров от расчетных значений. Такие системы в последние годы называют «системами, параметрически устойчивыми».

Возникает важный вопрос: если для некоторой системы построена функция Ляпунова, производная которой «в силу системы» определенно отрицательна, и система поэтому безусловно устойчива, то сохранит ли она устойчивость, хотя бы при сколь угодно малых (и, значит, совершенно неизбежных на практике) отклонениях коэффициентов и параметров от расчетных значений?

К сожалению, ответ на этот вопрос — ранее рассмотренный в [3], [4] — отрицателен. Были приведены примеры систем дифференциальных уравнений (не в нормальной форме), для которых существует функция Ляпунова и которые ,тем не менее, теряют устойчивость при сколь-угодно малых отклонениях коэффициентов системы или параметров исследуемого объекта от расчетных значений.

Этот результат имеет существенное практическое значение, поскольку система устойчивая, но не параметрически устойчивая и способная терять устойчивость при сколь угодно малых, неизбежных на практике, вариациях параметров, ничуть не лучше системы неустойчивой и даже опаснее ее (см. [4]). Для возможности практического применения результатов А.М. Ляпунова и его последователей построения функции Ляпунова недостаточно. Её построение должно быть дополнено анализом преобразований исходной системы к нормальной форме, к системе n уравнений первого порядка. Если эти преобразования эквивалентны не только в классическом , но и в расширенном смысле (понятие, введенное в [3], [4]), и не изменяют корректности решаемой задачи, то существование функции Ляпунова гарантирует не только устойчивость, но и параметрическую устойчивость. В противном случае — никакой гарантии параметрической устойчивости нет, существование функции А.М. Ляпунова ничего практического не дает, и практического смысла не имеет.

Литература

[1] Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. Собрание сочинений, т.2, М., Изд. АН СССР, 1956

[2] Зубов В.И. Методы А.М.Ляпунова и их применение. Л., Изд. ЛГУ,1957, 241 с.

[3] Петров Ю.П., Сизиков В.С. Корректные, некорректные и промежуточные задачи с приложениями, СПб, «Политехника», 2003, 261 с.

[4]Петров Ю.П., Петров Л.Ю. Неожиданное в математике и его связь с авариями и катастрофами. 4-е изд.,«БХВ-Петербург», 2005, 224 с.

The Extension of A.M. Lyapunov Investigations on a Parametric Stability

Orlov V.B., Petrov Yu.P.

Saint Petersburg State University, Russia

It is shown that real functions of Lyapunov in an examined system do not guarantee their parametric stability. That is — it does not guarantee that stability will not be lost while there are infinitely small values and inevitable (in practice) deviations of real values in parameters from computed enter. In order that parametric stability be guaranteed it is necessary to make an analysis of equivalent transformations that have turned the initial system to a normal form.

АЛГОРИТМЫ ПОСТРОЕНИЯ ПРОГРАММНОГО И ПОЗИЦИОННОГО РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Павленок Н.С.

Белорусский государственный университет, Минск

Исследуется линейно-квадратичная задача оптимального управления (ОУ) с геометрическими ограничениями на управляющие воздействия. Пусть $T = [0, t^*]$, $0 < t^* < +\infty$, — промежуток управления. Функцию $u(t)$, $t \in T$, назовем а) *дискретной* (с периодом квантования h, $h = t^*/N$, N — натуральное число), если $u(t) = u(\tau)$, $t \in [\tau, \tau+h]$, $\tau \in T_h = \{0, h, ..., t^*-h\}$; б) *дискретно-особой*, если она 1) дискретна на неособых участках и непрерывна на особых участках; 2) границами особых участков являются моменты $\tau \in T_h$.

Поведение системы оптимизируется в классе ограниченных дискретно-особых управляющих воздействий по выпуклому квадратичному функционалу, определенному на состояниях системы:

$$\alpha^0 = \min \int_0^{t^*} \sum\nolimits_{i=1}^{k} d_i x_i^2(t) dt,\ \dot{x} = Ax + bu,\ x(0) = x_0,\ |u(t)| \le 1,\ t \in T,$$

где $x = x(t)$ — n–вектор состояния системы управления в момент t; $x_0 \in R^n$ — заданное начальное состояние системы управления; $u = u(t)$ — значение скалярного управляющего воздействия; A — $n \times n$-матрица, b — n-вектор; $d_i \in R$, $d_i > 0$, $i = \overline{1, k}$, $1 \le k \le n$.

Вводятся понятия оптимальной программы и оптимальной обратной связи (ООС). Поскольку построение ООС в явной форме (решение проблемы синтеза оптимальной системы в классической постановке) в данном случае представляет чрезвычайно сложную задачу, то вводится понятие *реализации* ООС, ориентированное на вычисление текущих значений ООС в реальном времени по ходу каждого конкретного процесса управления.

Ставится задача — построить алгоритм работы *оптимального регулятора*, осуществляющего ОУ физической системой в реальном времени. Для этого исходная линейно-квадратичная задача ОУ аппроксимируется кусочно-линейной задачей ОУ, которая решается методом последовательных линеаризаций. Аналогично [1], для получаемых линейных задач со специфическими промежуточными фазовыми ограничениями разработан быстрый двойственный алгоритм вычисления оптимальных программ. В зависимости от результата решения кусочно-линейной задачи строится (с помощью процедуры доводки) оптимальное релейное управляющее воздействие для исходной задачи или производится врезка особого участка. Предложен специальный тест на наличие режима Фуллера. При отсутствии последнего строится оптимальное релейно-особое управляющее воздействие. Каждая процедура базируется на методе Ньютона решения нелинейных уравнений. Далее на базе результатов по программным решениям строится метод ОУ в реальном времени. Полученные результаты иллюстрируются на примерах, частично рассмотренных в [2,3].

Л и т е р а т у р а

[1] *Балашевич Н.В., Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Алгоритмы программной и позиционной оптимизации линейных систем управления с промежуточными фазовыми ограничениями // ЖВМ и МФ. 2001. Т.41. № 10. С. 1485–1504.
[2] *Брайсон А., Ю-Ши Хо* Прикладная теория оптимального управления. Оптимизация, оценка и управление. М.: Мир, 1972.
[3] *Фуллер А.Т.* Оптимизация релейных систем регулирования по различным критериям качества // Труды I Международного конгресса IFAC. 1961. С. 584–605.

Construction of Algorithms for Program and Positional Solutions of a Linear-quadratic Optimal Control Problem

Pavlenok N.S.

Belorussian State University

A linear-quadratic optimal control problem with geometric constraints on the control actions is studied. Notions of optimal program and optimal feedback are introduced. An algorithm of an optimal regulator, carrying out the real time optimal control of a physical system is built.

ЗАДАЧИ РОБАСТНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ И СРАВНЕНИЕ СО СТОХАСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИЕЙ ЛЯПУНОВА

Пакшин П.В.

Арзамасский политехнический институт (филиал) Нижегородского государственного технического университета, Россия

В данной работе для класса задач робастной устойчивости и стабилизации развивается подход [1], основанный на сравнении со стохастической функцией Ляпунова. Пусть множество детерминированных нелинейных систем с неопределенными параметрами, описывается уравнениями

$$\begin{gathered}\dot{x}_t = f_i(x_t) + G_i(x_t)u_t + \sum_{l=1}^{N} \sigma_l(t)(f_{li}(x_t) + G_{li}(x_t)u_t),\\ z_t = c_i(x_t),\ t \geq t_0,\ i = 1,\ldots,\nu,\end{gathered} \tag{1}$$

где $\sigma_l(t),\ t \geq 0, l = 1,\ldots,N$ — неопределенные параметры, остальные обозначения стандартные. Рассмотрим следующую задачу *робастной одновременной стабилизации*: найти управление с обратной связью по выходу $u = -\varphi(z),\ \varphi(0) = 0$, обеспечивающее асимптотическую устойчивость в целом всех замкнутых систем из множества (2) при любых $\sigma_l(t)$, удовлетворяющих ограничениям $\mid \sigma_l(t) \mid \leq \delta_l,\ t \geq 0,\ l = 1,\ldots,N$.

Наряду с (1) рассмотрим систему стохастических уравнений Ито

$$\begin{gathered}dx_t = [\hat{f}(x_t, r_t) + G(x_t, r_t)u_t]dt + \sum_{l=1}^{N} \gamma_l[f_l(x_t, r_t) + G_l(x_t, r_t)u_t]dw_l,\\ z_t = c(x_t, r_t),\quad t \geq t_0,\end{gathered} \tag{2}$$

где r_t – марковская цепь с дискретным множеством состояний $\mathbb{N} = \{1,\ldots,\nu\}$; $\hat{f}(x,i) = f(x,i) + \alpha I x, x \in \mathbb{R}^n,\ i \in \mathbb{N};\ f(x,i) = f_i(x),\ f_l(x,i) = f_{li}(x), l = 1,\ldots,N, i \in \mathbb{N};\ w_l, l = 1,\ldots,N$ — независимые стандартные винеровские процессы.

Приведем результат для частного случая обратной связи по состоянию.

Т е о р е м а 1 *Предположим, что для системы (3) с управлением $u = -\varphi(x),\ \varphi(0) = 0$ существует квадратичная функция Ляпунова $V(x) = x'Px > 0$ такая, что $L_\varphi V(x) \leq 0$ и $\alpha - \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{N}\frac{\delta_l^2}{\gamma_l^2} > 0$, где L_φ - производящий дифференциальный оператор в силу (3) с $u = -\varphi(x)$. Тогда это управление одновременно стабилизирует все системы из множества (2) при любых неопределенностях параметров, удовлетворяющих ограничениям $\mid \sigma_l(t) \mid \leq \delta_l,\ t \geq 0,\ l = 1,\ldots,N$.*

Дается обобщение результатов. Для некоторых классов линейных и нелинейных систем результаты доводятся до алгоритмов, использующих эффективные современные решатели линейных матричных неравенств в среде MATLAB (SeDuMi/YALMIP). Приводятся примеры.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 05-01-00132а).

Л и т е р а т у р а

[1] *Pakshin P.V. and Pakshina N.A.* Dissipativity of Diffusion Processes with Markovian Switching and Robust Simultaneous Stabilization of Nonlinear Systems // Proc. 12th Int. IEEE Conference on Methods and Models in Automation and Robotics. TU Szczecin: 2006. P. 177–183.

Problems of Robust Stabilization and Comparison with Stochastic Lyapunov Function

Pakshin P.V.

Nizhny Novgorod State Technical University at Arzamas, Russia

The paper develops an approach to solution of robust stability and stabilization problems based on comparison with stochastic Lyapunov function.

СИНТЕЗ РОБАСТНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ НА ОКРЕСТНОСТЯХ ОГРАНИЧЕННЫХ МНОЖЕСТВ

Пилишкин В.Н.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Россия

Существенной особенностью многих систем является наличие ограничений и неопределенности. Важно уметь учитывать требования к робастности регулятора. Предлагаемая работа посвящена решению указанной проблемы. Рассматривается система:

$$\dot{x} = f(x,u,v), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \geq t_0, \quad x \in Q, \quad u \in U, \quad v \in V. \tag{1}$$

Требуется синтезировать закон управления с желаемой структурой, обеспечивающий фазовые ограничения на траекториях системы (1) $x(t)$ с учетом ограничений на значения u и v при любом $x(t_0) = x_0 \in Q$.

Фазовые ограничения считаются выполненными, если справедливо условие:

$$x(t) \in Q_\varepsilon \text{ при } t \geq t_0 \ \ \forall x(t_0) \in Q, \ \ Q_\varepsilon = \{x \in R^n : \rho(x) \leq \varepsilon\}, \tag{2}$$

ε — окрестность множества Q.

Скалярная неотрицательная функция $\rho(x)$ характеризует удаленность точки $x \in R^n$ от множества Q.

Вводится так называемая связанная фазовая плоскость с координатами $y = \rho(x)$ и $\dot{y} = (\nabla_x \rho, \dot{x}) = (\nabla_x \rho, f(x,u,v))$ рассматриваемыми на траекториях $x(t)$. Нетрудно доказать, что движение системы (1) является ограниченным на Q_ε, если выполняется равенство

$$\left. \frac{d\dot{y}}{dy} = \frac{d \ln \dot{y}}{dt} = \frac{(\nabla_x(\nabla_x \rho, f(\cdot)), f(\cdot))}{(\nabla_x \rho, f(\cdot))} = -\infty \text{ при } y = \varepsilon \ \right\} \tag{3}$$

Отсюда находится достаточное условие для синтеза робастного регулятора

$$\max_{v \in V} \left[\frac{d}{dt} (\ln \dot{y}) \right] = \begin{cases} -\infty, & \text{при } \ x = x^* \in \Gamma Q_\varepsilon \\ \neq -\infty, & \forall x \in \Gamma Q_\varepsilon \backslash x^*, \end{cases} \tag{4}$$

ΓQ_ε — граница множества Q_ε.

Можно показать, что для обеспечения данного условия должны выполняться соотношения

$$\dot{y} = \{0 \text{ при } y = \rho(x^*) = \varepsilon \text{ и } \neq 0 \text{ при } y = \rho(x) = \varepsilon \ \forall x \neq x^* \tag{5}$$

Отсюда следует, что x^* — экстремальная точка, и в ней также должно выполняться равенство

$$\lambda \nabla_x y + \nabla_x \dot{y} = 0, \ \ \lambda > 0. \tag{6}$$

Тогда, чтобы без учета возмущений $x(t) \in Q_\varepsilon$ при $x_0 \in Q$, достаточно выполнения соотношений

$$\left. \begin{array}{l} y = \varepsilon, \ \dot{y} = 0 \\ \lambda \nabla_x y + \nabla_x \dot{y} = 0, \ \lambda > 0 \end{array} \right\} \text{или} \ \left. \begin{array}{l} \rho(x) = \varepsilon, \ (\nabla_x \rho(x), f(x,u)) = 0 \\ \nabla_x^2 \rho \cdot f(\cdot) + (\nabla_x f + \lambda E) \nabla_x \rho = 0, \ \lambda > 0 \end{array} \right\} \tag{7}$$

При синтезе робастного регулятора с учетом действующих возмущений условия (5), (6) приводятся к виду

$$\left. \begin{array}{l} y = \varepsilon, \ \dot{y} = 0 \\ \lambda \nabla_x y + \nabla_x \dot{y} = 0, \ \lambda > 0 \end{array} \right\} \max_{v \in V} [\lambda y + \dot{y}], \ \lambda = -\frac{\partial \dot{y} / \partial x_i}{\partial y / \partial x_i}, \ \ i \in \overline{1,n}. \tag{8}$$

При этом максимум выражения $(\lambda y + \dot{y})$ по $v \in V$ обеспечивается на элементе $x^* \in \Gamma Q_\varepsilon$, удовлетворяющем трем первым уравнениям. Полученные соотношения позволяют эффективно решать поставленную задачу. Показано их применение для некоторых систем.

Synthesis of Robust Regulators for the Nonlinear Systems on the Bounded Sets Environments

Pilishkin V.N.

Bauman Moscow State Technical University, Russia

The task of synthesis of regulator for the nonlinear object with the presence of phase limitations is considered. The solution is based on the usage of the connected phase plane which is used for obtaining the second-order condition of the belonging of trajectories by the given set.

ЧИСЛЕННО-АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ С ВЕКТОРНЫМ КРИТЕРИЕМ НА ТРАЕКТОРИЯХ С МАКСИМУМОМ

Плотников В.А., **Кичмаренко О.Д.**

Одесский национальный университет им. И.И. Мечникова, Украина

Рассмотрим задачу оптимального управления динамической системой вида (1):

$$\dot{x}(t) = \varepsilon\Big[f(t, x(t), \max_{s\in[g(t),\gamma(t)]} x(s)) + A(x(t), \max_{s\in[g(t),\gamma(t)]} x(s))\varphi(t,u)\Big], \ \ x(0) = x_0, \tag{1}$$

где x – n-мерный фазовый вектор, $\varepsilon > 0$ – малый параметр, $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$, $L > 0$, $f\colon [0, L\varepsilon^{-1}]\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, $0 \le g(t) \le \gamma(t) \le t$, A – $n \times m$ матрица, $\varphi\colon [0, L\varepsilon^{-1}] \times U \to \mathbf{R}^m$, $u \in U \in comp(\mathbf{R}^r)$ – вектор управления, $\max\limits_{s\in[g(t),\gamma(t)]} x(s) = \Big(\max\limits_{s\in[g(t),\gamma(t)]} x_1(s), \ldots, \max\limits_{s\in[g(t),\gamma(t)]} x_n(s)\Big)$, с векторным критерием:

$$I[u] = \big(\Phi_1(x(T))\big),\ \Phi_2(x(T)), \ldots, \Phi_N(x(T)), \tag{2}$$

где $\Phi_i(x(T))$ – скалярные функции, удовлетворяющие условию Липшица с постоянной λ.

Очевидно, что при $g(t) = \gamma(t) = t - h$ из (1) получаем уравнения с постоянным запаздыванием, а при $g(t) = \gamma(t)$ – уравнения с переменным запаздыванием.

Задаче (1), (2) поставим в соответствие усредненную задачу на траекториях

$$\dot{y} = \varepsilon\Big[\bar{f}(y(t), \max_{s\in[g(t),\gamma(t)]} y(s)) + A(y(t), \max_{s\in[g(t),\gamma(t)]} y(s))v\Big], \ \ y(0) = x_0, \tag{3}$$

и векторным функционалом:

$$\bar{I}[v] = \big(\Phi_1(y(T))\big),\ \Phi_2(y(T)), \ldots, \Phi_N(y(T)), \tag{4}$$

где

$$\bar{f}(x,y) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T f(t,x,y)dt,\ v \in V = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T \varphi(t,U))dt, \tag{5}$$

v – новый вектор управления, интеграл в (5) понимается в смысле Аумана, сходимость в смысле метрики Хаусдорфа.

Для уравнений управляемого движения с максимумом (1) и (3) обосновано применение метода усреднения, если функции $f(t,x,y)$, $A(x,y)$, $\varphi(t,u)$ непрерывны по t, равномерно ограничены, удовлетворяют условию Липшица по x, y, u, функции $g(t)$ и $\gamma(t)$ равномерно непрерывны и $0 \le g(t) \le \gamma(t) \le t$, равномерно относительно x, y существует предел (5), решение уравнения (3) при $x_0 \in D' \subset D$ и любом допустимом управлении $v(t)$ вместе с ρ-окрестностью принадлежит области D.

Для уравнений управляемого движения (1) и (3) обоснован алгоритм соответствия управлений.

Для задач (1), (2) и (3), (4) представлено обоснование численно-асимптотического решения задачи оптимального управления с векторным критерием на траекториях с запаздыванием в форме максимума, если выполняются условия теоремы об усреднении, а также если функции $\Phi_i(x)$ удовлетворяют условию Липшица.

Numerically-Asymptotic Solution of Control Problem with Vectorial Criterion on Trajectories with Maximum

Plotnikov V.A., **Kichmarenko O.D.**

Odessa National I.I. Mechnikov University, Ukraine

The paper contains a substantiation of a numerically-asymptotic solution of optimal control problem with vectorial criterion on trajectories with delay in the form of maximum, which is based on the averaging method for the controlled differential equations with a maximum.

БЕСКОНЕЧНОМЕРНАЯ ЛЕММА ЯКУБОВИЧА-КАЛМАНА ДЛЯ НЕСТРОГИХ НЕРАВЕНСТВ

Проскурников А.В.

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

Лемма Якубовича-Калмана (частотная теорема) является одним из основных инструментов теории управления, находящим применение в исследовании динамики нелинейных систем, теории оптимального управления, робастном и адаптивном управлении и т.д. Данная лемма дает частотные условия разрешимости уравнений Лурье-Риккати, то есть условия существования для заданной линейной стационарной системы (с конечномерным пространством состояний) квадратичной функции Ляпунова со специальными свойствами. Важность леммы Якубовича-Калмана стала стимулом к ее обобщению на более широкие классы систем: нестационарные системы с периодическими коэффициентами, произвольные нестационарные системы, бесконечномерные системы. Доклад связан с последним направлением, начатым работами В.А. Якубовича и А.Л. Лихтарникова, В.А. Брусина, М.А. Нудельмана, Л. Пандольфи. Большинство известных бесконечномерных обобщений леммы Якубовича-Калмана относятся к так называемому невырожденному случаю, или случаю строгих частотных неравенств. Полного же обобщения леммы для случая нестрогих неравенств, а именно этот вариант необходим для целого ряда приложений, получено не было. В докладе приводится такое обобщение для наиболее распространенного случая, когда вход системы является конечномерным.

Основным результатом доклада является следующая теорема.

Теорема. Пусть X — комплексное гильбертово пространство и U — конечномерное комплексное пространство; A — линейный (вообще говоря, неограниченный) оператор на X с областью определения $D(A)$, генерирующий C_0-полугруппу и $B : U \to X$ — линейный оператор. Пусть $F(x, u)$ — непрерывная эрмитова форма на X^xU. Пусть $\Gamma = \Gamma^* : U \to U$ — оператор эрмитовой формы $F(0, u)$. Предположим, что система уравнений $x'(t) = Ax(t) + Bu(t)$, $x(0) = a$ при любом a имеет решение $x(t)$, $u(t)$, лежащее в классе $L_2[0; +\infty]$ (решение, как обычно, понимается в слабом смысле). Пусть выполнено *частотное условие*: для любого вещественного числа ω и любых векторов x, u, таких что $i\omega x = Ax + Bu$, справедливо неравенство $F(x, u) \geq 0$, причем хотя бы для одной такой тройки (ω, x, u) имеем $F(x, u) > 0$.

Тогда существуют ограниченные линейные операторы $h : X \to U, H = H^* : X \to X$, такие что

$$2\mathrm{Re}(Hx, Ax + Bu) + F(x, u) = |hx + \Gamma^{1/2}u|^2 \text{ при всех } x \text{ из } D(A),\ u \text{ из } U.$$

Указанный в теореме вид имеют многие практически значимые системы управления, в частности, системы, описываемые дифференциальными уравнениями с последействием, а также уравнениями в частных производных. Аналогичная частотная теорема справедлива и для бесконечномерных систем с дискретным временем, при этом теоремы для непрерывного и дискретного случаев сводятся друг к другу при помощи преобразования Кэли.

В докладе обсуждается также применение полученных результатов в некоторых задачах устойчивости нелинейных систем.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты 05-01-00238 и 05-01-00869, а также Института проблем машиноведения РАН.

Infinite-Dimensional Yakubovich-Kalman Lemma for Non-Strict Inequalities

Proskurnikov A.V.

Saint Petersburg State University, Russia

The Yakubovich-Kalman lemma ("frequency theorem") is one of principal tools of control theory, used in nonlinear systems dynamics investigation, optimal control theory, robust and adaptive control, etc. There were a number of efforts to generalize this result to infinite-dimensional systems, but most of such generalizations deal with the so-called "non-degenerate" case, when the strict frequency-domain inequality holds. In the present paper we give convenient generalization of the Yakubovich - Kalman lemma for the "degenerate" case, which appears to be essential for a numbers of applications. Some applications of the obtained result to nonlinear systems analysis are also discussed.

СИНТЕЗ СТАБИЛИЗИРУЮЩИХ УПРАВЛЕНИЙ ДЛЯ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Седова Н.О.

Ульяновский государственный университет, Ульяновск, Россия

Метод Ляпунова, широко применяемый для исследования устойчивости, получил распространение и в теории управления, в последние годы в виде так называемой контролирующей функции Ляпунова (КЛФ — от англ. CLF — control Lyapunov function, см., например, [3,4]). Если известна КЛФ, можно построить закон управления так, что положение равновесия управляемой системы будет глобально асимптотически устойчивым. В докладе предлагается обзор немногих известных результатов, касающихся особенностей применения КЛФ к уравнениям с запаздыванием, а также возможные пути развития этого метода в направлении ослабления требований к КЛФ.

В работе используются следующие обозначения: R^n — действительное n-мерное пространство с нормой $|\cdot|$, $r > 0$ — фиксированная постоянная, $\mathbf{C}$ — пространство $C([-r,0],R^n)$ функций φ с нормой $\|\varphi\| = \max_{-r\leqslant s\leqslant 0}|\varphi(s)|$. Если $a > 0$, $x \in C([-r,a),R^n)$ и $t \in [0,a)$, то $x_t \in \mathbf{C}$ определяется формулой $x_t(s) = x(t+s)$, $s \in [-r,0]$. Функция $\alpha \in C(R^+,R^+)$ принадлежит классу $\mathcal{K}$, если она строго возрастает и $\alpha(0) = 0$; α принадлежит классу $\mathcal{K}_\infty$, если вдобавок $\alpha(u) \to \infty$ при $u \to \infty$.

Рассматривается нелинейная система с запаздыванием вида

$$\dot{x}(t) = f(t,x_t) + g(t,x_t)u, \tag{1}$$

где $f,g \in C(R^+ \times \mathbf{C}, R^n)$, $u \in R$, $f(t,0) = 0$. Требуется построить управление в виде $u(t) = k(t,x_t)$ так, что решение $x = 0$ системы (1) (глобально) асимптотически устойчиво.

Рассмотрим функционал $V: R^+ \times \mathbf{C} \to R^+$ и предположим, что он инвариантно дифференцируем [2], то есть имеет непрерывные производные $\frac{\partial V}{\partial t}$, $\frac{\partial V}{\partial \varphi(0)}$ и инвариантную производную по функциональному аргументу $\partial_\psi V$. В этом случае производная V вдоль траекторий системы (1) равна $\dot{V}_{(1)}(t,\varphi) = \frac{\partial V(t,\varphi)}{\partial t} + \left(\frac{\partial V(t,\varphi)}{\partial \varphi(0)}\right)^\top \cdot \big(f(t,\varphi) + g(t,\varphi)\cdot u\big) + \partial_\psi V(t,\varphi) =: L_f V(t,\varphi) + L_g V(t,\varphi)\cdot u$.

Определение. Функционал $V: R^+ \times \mathbf{C} \to R^+$ называется *контролирующим функционалом Ляпунова-Красовского* (КЛКФ) для системы (1), если он инвариантно дифференцируем, и существуют функции $\alpha \in \mathcal{K}$, $\beta_1,\beta_2 \in \mathcal{K}_\infty$ такие что $\beta_1(|\varphi(0)|) \leqslant V(t,\varphi) \leqslant \beta_2(\|\varphi\|)$ и $L_g V(t,\varphi) = 0 \ \Rightarrow \ L_f V(t,\varphi) \leqslant -\alpha(|\varphi(0)|)$ для всех $t \in R^+$, $\varphi \in \mathbf{C}$.

Для уравнений с известным КЛКФ получены явные формулы стабилизирующих управлений, изучена задача «обратной оптимальности». Рассмотрены также знакопостоянные КЛКФ со знакопостоянной производной [1] и возможные проблемы, связанные с таким ослаблением требований.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 05-01-00765.

Литература

[1] Андреев А.С., Павликов С.В. Незнакоопределенные функционалы Ляпунова в задаче об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений с конечным запаздыванием // *Механика твердого тела*, Вып. 34, 2004, с.112–118.

[2] Ким А.В. *i-Гладкий анализ и функционально-дифференциальные уравнения*. Екатеринбург: УрО РАН, 1996.

[3] Jankovic M. Extension of control Lyapunov functions to time-delay systems // *Proceeding of the CDC*, Sydney, Australia, 2000, p. 4403-4408.

[4] Sontag E.D. A universal construction of Artstein's theorem on nonlinear stabilization // *Systems & Control Letters*, Vol. 13, 1989, p. 117-123.

Stabilizing Control Design for Non-Autonomous Systems with After-Effect

Sedova N.O.

Ulyanovsk State University, Russia

The problem on stabilization is considered for nonlinear non-autonomous delay-differential systems. The concept of control Lyapunov function is extended to non-autonomous time-delay systems in form of Control Lyapunov-Razumikhin function (CLRF) or Control Lyapunov-Krasovsky functional (CLKF). Some universal formulas apply to CLRF and CLKF to obtain control laws, which achieve asymptotic stability for the system as well as robustness properties.

СИНТЕЗ АСИМПТОТИЧЕСКИ СУБОПТИМАЛЬНОГО РОБАСТНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРИ НЕИЗВЕСТНЫХ ВЕСАХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Соколов В.Ф.

Отдел математики Коми научного центра УрО РАН, Россия

Рассматривается многомерный объект управления с дискретным временем

$$(\tilde{M}+\delta_y\Delta_y)y=(\tilde{N}+\delta_u\Delta_u)u+\delta_w w\,, \tag{1}$$

где y — последовательность выходов объекта и u — управление. $\tilde{M}(q^{-1})$ и $\tilde{N}(q^{-1})$ — несократимые слева полиномиальные матрицы, размеров $n_y\times n_y$ и $n_y\times n_u$ соответственно, от оператора сдвига назад q^{-1} ($q^{-1}x(t):=x(t-1)$), $\det\tilde{M}(0)\neq 0$. Δ_y и Δ_u — нелинейные (или линейные нестационарные) операторные возмущения, удовлетворяющие неравенствам

$$|(\Delta_y y)(t)|_\infty\le\sup_{t-\mu\le s<t}|y(s)|_\infty\,,\quad |(\Delta_u u)(t)|_\infty\le\sup_{t-\mu\le s<t}|u(s)|_\infty\quad\forall\, t\in\mathbb{N}\,, \tag{2}$$

где $|x|_\infty:=\max_k|x_k|$ для вектора x и μ — память возмущений. Внешнее возмущение w удовлетворяет неравенству

$$\sup_t\ |w(t)|_\infty\le 1\,. \tag{3}$$

Веса возмущений $\delta_y,\delta_u,\delta_w$ предполагаются неизвестными и должны оцениваться по данным измерений. Показатель качества замкнутой системы управления, включающей объект (1) и регулятор

$$u=Ky\,,$$

где K — передаточная матрица регулятора, имеет вид

$$J(K,\delta_w,\delta_y,\delta_u)=\sup_{w,\,\Delta_y,\,\Delta_u}\ \limsup_{t\to\infty}\ |y(t)|\,.$$

Ставится задача построения по данным измерений асимптотически оптимального регулятора K, минимизирующего показатель качества J.

Пусть $y_0^t=(y(0),\dots,y(t))$ — выход объекта на промежутке $[0,t]$ при выбранных управляющих воздействиях $u_0^{t-1}=(u(0),\dots,u(t-1))$. Обозначим через W_t множество троек весов $(\delta_y,\delta_u,\delta_w)$, согласованных с данными измерений y_0^t,u_0^{t-1} и неравенствами для возмущений (2) и (3). Построение асимптотически оптимального управления основано на приближенном решении задач

$$K_t=\operatorname*{argmin}_K\ \min_{(\delta_w,\delta_y,\delta_u)\in W_t}\ J(K,\delta_w,\delta_y,\delta_u) \tag{4}$$

и выборе управления $u(t)=(K_t y)(t)$. При этом оптимальное значение показателя качества J в задаче (4) играет роль своеобразной функции Ляпунова, монотонно возрастающей с ростом t. Приближенное решение задач (4) сводится к решению семейства задач дробно-линейного программирования [1].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 05-01-00851).

Литература

[1] *Sokolov V.F.* Control-Oriented Model Validation and Errors Quantification in the ℓ_1 setup // IEEE Trans. Autom. Control, 2005, Vol. 50. N. 10. P. 1501-1508.

Suboptimal Steady-State Robust Synthesis under Unknown Upper Bounds of Perturbations

Sokolov V.F.

Department of Mathematics, Komi Science Center, RAS, Syktyvkar, Russia

The paper addresses a problem of approximately optimal steady-state robust regulation for linear time-invariant discrete-time MIMO plant under coprime factor perturbations. Upper bounds of perturbations and exogenous disturbance are assumed to be unknown to controller designer. Estimation of upper bounds is based on treating the control criterion as the identification criterion.

МЕТОД БИЛИНЕЙНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Срочко В.А.

Иркутский государственный университет, Россия

Рассматривается обыкновенная задача оптимального управления без фазовых и терминальных ограничений. Целевой функционал и динамическая система линейно зависят от управления, которое ограничено с помощью компактного множества. В качестве аппроксимации функционала используется фазовая вариация с нестандартной сопряженной системой. Процедура варьирования формируется на основе обобщенной выпуклой комбинации управлений с нормировкой в пространстве L_1 [1]. В результате вспомогательная задача предлагаемого метода носит билинейный характер относительно пары «управление, состояние» и решается в некоторой «игольчатой» окрестности исходного управления. В целом, рассматриваемый подход к численному решению является современной реализацией технологии «методов доверительной области» [2] в рамках задач оптимального управления.

Задача определяется следующими соотношениями:

$$\Phi(u) = \phi(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} F(x,u,t)dt \to \min\,,\ u \in V\,,$$

$$\dot{x} = f(x,u,t)\,,\ x(t_0) = x^0\,,\ t \in T = [t_0, t_1]\,,$$

$$V = \left\{ u \in L_\infty^{(r)}(T) :\ u(t) \in U\,,\ t \in T \right\}\,.$$

Фазовая вариация функционала на паре управлений $u, w \in V$ конструируется в виде билинейной модели

$$\delta\Phi(u,w) = \langle \phi_x(x(t_1)), y(t_1)\rangle + \int_T \left(\langle F_x(x(t),w(t),t), y(t)\rangle + \langle F_u(x(t),t), w(t)-u(t)\rangle\right) dt\,,$$

$$\dot{y} = f_x(x(t),w(t),t)y + f_u(x(t),t)(w(t)-u(t))\,,\ y(t_0) = 0\,.$$

Процедура варьирования связана с параметром $\alpha \in [0,1]$ и формализуется следующим образом

$$w_\alpha(t,v,\chi) = u(t) + \chi(t)(v(t)-u(t))\,,\ t \in T\,,\ v \in V\,,\ \chi \in X_\alpha\,,$$

$$X_\alpha = \left\{ \chi \in L_\infty(T) :\ \chi(t) = 0 \vee 1\,,\ \int_T \chi(t)dt = \alpha(t_1 - t_0) \right\}\,.$$

Очередное приближение формируется в результате решения вспомогательной задачи

$$\delta\Phi(u, w_\alpha) \to \min\,,\ v \in V\,,\ \chi \in X_\alpha\,.$$

Литература

[1] Срочко В.А. Итерационные методы решения задач оптимального управления / В.А. Срочко. – М.: Физматлит, 2000. – 160 с.
[2] Измаилов А.Ф. Численные методы оптимизации / А.Ф. Измаилов, М.В. Солодов. – М.: Физматлит, 2005. 304 с.

Method of Bilinear Approximations for Optimal Control Problems

Srochko V.A.

Irkutsk State University, Russia

The optimal control problem without phase and terminal constraints is considered. Non-standard variation is used as an approximation of the cost functional. The auxiliary subproblem has a bilinear character with respect to the pair "control, state" and it is solved in the special neighborhood of nominal control.

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ СТОХАСТИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ С КВАДРАТИЧНЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА

Станжицкий А.Н.

Киевский национальный университет имени Т. Шевченко, Украина

Рассматривается следующая задача оптимального управления

$$\begin{aligned} &dx = [f(t,x) + B(t)u]dt + \varepsilon[g(t,x) + D(t)u]dW(t) \\ &x(s) = y \\ &J(s,y,u) = E\left\{\psi(\tau, x(\tau)) + \int\limits_s^\tau \big(\varphi(t,x(t)) + (N(t)u(t), u(t))\big)dt\right\} \to \inf, \end{aligned} \tag{1}$$

$t \in [0,T]$, $x \in R^n$, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $W(t)$ — одномерный процесс Винера, $Q_0 = (0,T) \times R^n$, Q — ограниченная подобласть с гладкой границей ∂Q. $(s,y) \in Q$, τ — момент первого выхода $(t, x(t))$ из Q. φ и ψ — неотрицательные гладкие функции. f и g такие, что удовлетворяют условиям существования и единственности сильного решения до момента выхода из Q. $N(t)$ — непрерывная положительно определенная матрица.

Теорема. При выполнении написанных выше условий $\exists \varepsilon_0 > 0$, что при $\varepsilon < \varepsilon_0$ задача (1) имеет решение $u_\varepsilon^* = u_\varepsilon^*(t,x)$, причем $u_\varepsilon^*(t,x) \to u_0^*(t,x)$, $\varepsilon \to 0$ равномерно по $(t,x) \in Q$.

Доказательство теоремы проводится методом динамического программирования Беллмана.

Optimal Control of the Stochastic Systems with Quadratic Criterion of Quality

Stanzhitskiy A.N.

Kiev National University named by T. Shevchenko, Ukraine

The existence of optimal control in the form of the control with feedback loop is proved for the nonlinear stochastic systems with quadratic criterion of quality.

ИНТЕРВАЛЬНАЯ ЛИНЕАРИЗАЦИЯ В ЗАДАЧЕ МЕДИАННОГО МОДАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Сударчиков С.А., Ушаков А.В.

Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, Россия

Пусть исходный нелинейный динамический объект (НДО) задается модельным представлением вида

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + Bu(t); \quad x(0); \quad y(t) = Cx(t), \tag{1}$$

где x, y, u — соответственно векторы состояния, выхода и управления, $f(x)$ — нелинейная векторная функция от вектора, $f(0) = 0$; B, C — матрицы управления и выхода; x, $f(x) \in R^n$; $u \in R^r$; $y \in R^m$; $B \in R^{n\times r}$, $C \in R^{m\times n}$. Ставится задача построения интервально линеаризованного представления (ИЛП) нелинейного объекта (1) в форме

$$\dot{x}(t) = [A]x(t) + Bu(t); \quad x(0); \quad y(t) = Cx(t), \tag{2}$$

где $[A] = \lfloor \underline{A}, \overline{A} \rfloor$ — интервальная матрица состояния объекта, угловые значения $\underline{A}_{ij}$, $\overline{A}_{ij}$ угловых $\underline{A}$, $\overline{A}$ компонентов которой строятся на основе представления векторной функции от вектора $f(x)$ в векторно-матричной форме

$$f(x) = A(x)x, \tag{3}$$

где $A(x)$ конструируется [1] в форме

$$A(x) = col\left\{row\left\{\frac{f_i(x)}{\|x\|^2}x_j;\ j = \overline{1,n}\right\} i = \overline{1,n}\right\}, \tag{4}$$

при этом $\|x\|$ — евклидова векторная норма. Интервальная линеаризация исходного объекта (1) в форме (2) с использованием (3), (4) осуществляется в сфере $S_x\colon \|x\| \le d_s$ на основе соотношений $\underline{A}_{ij} = \min\limits_{x\in S_x}(A(x))_{ij}$, $\overline{A}_{ij} = \max\limits_{x\in S_x}(A(x))_{ij}$.

Если в ИЛП (2) НДО (1) матрицу состояния представить в виде суммы медианного и интервального компонентов $[A] = A_0 + [\Delta A] = A_0 + \lfloor \underline{\Delta A}, \overline{\Delta A} \rfloor$, то методами медианного модального управления [2] в форме $u(t) = -Kx(t)$, можно выбрать матрицу связей K, которая одновременно доставит ИЛП (2) НДО (1) требуемую динамику на основе назначения желаемой структуры мод медианного компонента $F_0 = A_0 - BK$ интервальной матрицы $[F] = F_0 + [\Delta F] = F_0 + [\Delta A]$ состояния системы и значение оценки относительной интервальности этой матрицы, удовлетворяющее неравенству $\delta F_I = \|[\Delta A]\|/\|F_0\| \le \delta_{IR}$.

Литература

[1] Акунов Т.А., Сударчиков С.А., Ушаков А.В. Синтез фотоэлектрической следящей системы на основе интервальных модельных представлений. Ч.I.Построение интервальной модели компонентов системы // Изв. вузов. Приборостроение. 2004. Т.47, № 1.

[2] Никифоров В.О., Ушаков А.В. Управление в условиях неопределенности: чувствительность, адаптация, робастность. СПб: СПбГИТМО(ТУ), 2002.

Interval Linearization in a Problem of Median Modal Management

Sudarchikov S.A., Ushakov A.V.

Saint Petersburg University of Information Technologies, Mechanics and Optics, Russia

A problem of construction of the interval linearized representation for a nonlinear dynamical object is investigated.

УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

Терлецкий В.А.

Иркутский государственный университет, Россия

Рассматривается задача оптимизации, в которой связь между управлением и состоянием описывается гиперболической системой полулинейных (линейный дифференциальный оператор, нелинейная правая часть) многомерных (число пространственных переменных не менее двух) дифференциальных уравнений. Как известно (см., например, [1], стр. 305), в этом случае, вообще говоря, не существует оценки роста решения в точках области независимых переменных относительно входных параметров начально-краевой задачи. В то же время, для исследования задачи оптимального управления методом приращений такая, как говорят, поточечная оценка роста решения необходима. Для решения этой проблемы вводится новое понятие обобщенного решения гиперболических систем многомерных дифференциальных уравнений. Суть этого подхода заключается в следующем. Вначале для исходной гиперболической системы вводится континуальное семейство инвариантных систем. Параметром этого семейства является вектор направлений, имеющий ту же размерность, что и вектор пространственных переменных. На основе инвариантного семейства получена интегро-дифференциальная система, эквивалентная на гладких решениях исходной дифференциальной системе. К сожалению, интегро-дифференциальная система в общем случае еще содержит производные от инвариантов решения по пространственным переменным. Однако, найден специальный способ усреднения такой системы, который позволяет перейти от производных по пространственным переменным к производным по направлениям. Он заключается в аппроксимации интегро-дифференциальной системы семейством интегральных систем, решения которых являются приближенными решениями интегро-дифференциальной системы. Для приближенных решений удается установить искомую поточечную оценку роста, а также абсолютную непрерывность их инвариантов вдоль соответствующих бихарактеристик. Далее доказывается, что приближенные решения сходятся при стремлении к нулю параметра усреднения к обобщенному решению в некоторой подобласти области независимых переменных. При этом мера подобласти сколь угодно мало отличается от заданной области независимых переменных. Данное свойство обобщенного решения может быть положено в основу аппроксимации задачи оптимального управления и использования для ее решения метода последовательных приближений, например, по схеме работы [2].

Литература

[1] Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. - М.: Наука, 1983. - 424 с.

[2] Васильев О.В., Срочко В.А., Терлецкий В.А. Методы оптимизации и их приложения. Ч.2. Оптимальное управление. - Новосибирск: Наука, 1990. - 151 с.

Optimality Conditions and Numerical Methods in Hyperbolic Systems Control Problems

Terletskii V.A.

Irkutsk State University, Russia

An optimization problem is considered in which the relation between control and state is described by a hyperbolic set of semi-linear multi-dimensional differential equations. A new concept of a generalized solution for hyperbolic multi-dimensional differential equations is introduced.

РЕЛАКСАЦИЯ В НЕВЫПУКЛЫХ ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Толстоногов А.А.

Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск, Россия

В сепарабельном гильбертовом пространстве рассматривается задача минимизации интегрального функционала с невыпуклым по управлению интегрантом на решениях управляемой системы, описываемой нелинейным эволюционным уравнением, с невыпуклыми, зависящими от фазовой переменной, ограничениями на управление. Эволюционный оператор, входящий в систему, является субдифференциалом собственной, выпуклой полунепрерывной снизу функции. Наряду с исходной задачей рассматривается релаксационная задача с овыпукленным по управлению интегрантом и с овыпукленными ограничениями на управление. Под решением системы понимается пара «траектория-управление». Доказано, что релаксационная задача имеет решение и для любого оптимального решения существует минимизирующая последовательность исходной задачи, сходящаяся по траекториям и функционалу к оптимальному. Справедливо и обратное утверждение. Подобный результат для управляемых систем является аналогом классической теоремы Н.Н. Боголюбова в вариационном исчислении. В качестве приложения рассмотрена векторная параболическая управляемая система, описывающая фазовые переходы в многокомпонентных средах. В основу доказательств положены теоремы релаксации для непрерывных селекторов многозначных отображений с невыпуклыми значениями, принадлежащие автору.

Relaxation in Non-Convex Optimal Control Problems

Tolstonogov A.A.

Institute for System Dynamics and Control Theory, Siberian Branch of RAS, Irkutsk, Russia

The problem is considered of minimizing an integral functional with integrand that is not convex in the control, on solutions of a control system described by nonlinear evolution equation in a separable Hilbert space. Evolutions operators are subdifferential of a proper convex lower semicontinuous function depending on time. The constraint on the control is given by depending on variable states multivalued function with non-convex values. Along with the original problem we consider the relaxation problem in which the integrand and the constraint on the control are convexified. Our goal is to establish an interrelation between the solutions of the original and relaxation problems.

СИНТЕЗ РЕГУЛЯТОРА ПЕРВОГО ПОРЯДКА ДЛЯ СТАБИЛИЗАЦИИ ДВОЙНОГО ПЕРЕВЕРНУТОГО МАЯТНИКА

Федюков А.А.

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Россия

Одной из классических задач в теории управления является задача стабилизации перевернутого маятника по состоянию, т.е. случай, когда состояние маятника доступно измерению. В прикладных задачах наоборот, часто размерность измеряемого выхода ниже, чем размерность состояния системы. В этом случае для стабилизации маятника можно использовать динамический регулятор. В докладе рассматривается задача стабилизации двойного перевернутого маятника с помощью линейного динамического регулятора пониженного порядка по измеряемому выходу. Объект описывается уравнениями:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx, \end{aligned} \tag{1}$$

где $x \in R^4$ — состояние системы, $u \in R^1$ — управление, $y \in R^2$ — измеряемый выход системы, а матрицы A, B_1, B_2 имеют следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Требуется построить линейный динамический регулятор k-го порядка по принципу обратной связи по измеряемому выходу y в виде:

$$\begin{aligned} \dot{x}_r &= A_r x_r + B_r y \\ u &= C_r x_r + D_r y, \end{aligned} \tag{2}$$

где $x_r \in R^k$ — состояние регулятора, обеспечивающего асимптотическую устойчивость замкнутой системы (1), (2).

Задача сводится [1] к решению невыпуклой задачи, а именно к поиску двух взаимообратных матриц $X = X^T > 0$ и $Y = Y^T > 0$, т.е. таких, что $XY = I$, удовлетворяющих двум линейным матричным неравенствам. Для ее решения используется Q-алгоритм поиска взаимообратных матриц.

Вычислительные эксперименты проводились в системе MATLAB. Требовалось синтезировать динамический регулятор первого порядка.

Точность решения задачи оптимизации была выбрана равной $\varepsilon = 10^{-5}$. В результате было получено, что искомый регулятор описывается уравнениями:

$$\begin{aligned} \dot{x}_r &= -8.47770x_r - 3.8599y_1 + 11.3614y_2 \\ u &= -22.7817x_r - 21.4799y_1 + 40.8038y_2. \end{aligned}$$

Матрица замкнутой системы имеет собственные значения:

$$\lambda_1 = -7.0975,\ \lambda_{2,3} = -0.2964 \pm 2.6608i,\ \lambda_4 = -0.7098,\ \lambda_5 = -0.0770,$$

лежащие слева от мнимой оси.

Литература

[1] Баландин Д.В., Коган М.М. Синтез регуляторов на основе решения линейных матричных неравенств и алгоритма поиска взаимообратных матриц // Автоматика и телемеханика 2005. №1. С 82-99.

First Order Regulator Synthesis for the Stabilization of a Double Reversed Pendulum

Fedyukov A.A.

Nizhny Novgorod State University named by N.I. Lobachevsky, Russia

In this talk, a problem of stabilization of a double reversed pendulum using a linear dynamical regulator with reduced order over the measured output is studied.

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДИФФУЗИОННЫМИ ПРОЦЕССАМИ С ИНФОРМАЦИОННЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ ПРИ НАЛИЧИИ ВОЗМУЩЕНИЙ МАТРИЦЫ СИСТЕМЫ, ПОГРЕШНОСТЕЙ УПРАВЛЕНИЯ И ИЗМЕРЕНИЯ ВЕКТОРА СОСТОЯНИЯ

Хрусталёв М.М., Румянцев Д.С.

Московский авиационный институт (технический университет), Россия

Исследуется задача оптимального управления стохастической линейной по состоянию системы управления с коэффициентами диффузии, зависящими как от вектора состояния, так и от управления. Динамический процесс описывается системой уравнений Ито:

$$dx_i(t) = [A_{is}(t)x_s + B_{i\alpha}(t)u_\alpha]\,dt + [G_{ils}(t)x_s + F_{il\alpha}(t)u_\alpha + C_{il}(t)]\,dw_l(t), \quad i,s=\overline{1,n},\quad \alpha=\overline{1,m},\quad l=\overline{1,\nu}. \tag{1}$$

Для процессса (1) установлен квадратичный критерий качества управления

$$J = \int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{R^n} \left[\tfrac{1}{2}D_{ij}(t)x_ix_j + S_{\alpha i}(t)x_iu_\alpha + \tfrac{1}{2}E_{\alpha\beta}(t)u_\alpha u_\beta\right] p(t,x)dxdt + \int\limits_{R^n} \left[\tfrac{1}{2}Q_{ij}x_ix_j\right] p(t_1,x)dx \to \min,$$

где $p(t,x)$ – плотность распределения состояния в момент t, $x=(x_1,\ldots,x_n)^T$.

Предполагается, что измеряется лишь часть компонент вектора состояния системы. С использованием метода Ляпунова–Лагранжа и результатов работы [1] предложены условия оптимальности для отыскания стратегии управления, зависящей от известных компонент вектора состояния. Проблема синтеза управления сводится к решению краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений типа Риккати.

Полученные условия решают задачу оптимального управления стохастической линейной системой управления, в матрице которой имеются случайные не измеряемые возмущения, что достигается путем перемещения случайных величин из коэффициентов сноса в коэффициенты диффузии.

В случае, когда динамическая система (1) управляется неточно и при реализации состояния системы имеются случайные ошибки измерения, предложенная теория позволяет найти решение такой задачи за счет введения дополнительных переменных в исходную систему (1). К преобразованной системе применимы полученные условия оптимальности.

Литература

[1] Румянцев Д.С., Хрусталев М.М. Оптимальное управление квазилинейными системами диффузионного типа при неполной информации о состоянии // Изв. РАН. Теория и системы управления. - 2006. - N 5.

Optimal Control of Diffusive Processes with Information Restrictions under Conditions of System Matrix Perturbations, Control and State Vector Measurements Errors

Khrustalev M.M., Rumyantsev D.S.

Moscow Aviation Institute, Russia

A problem of optimal control of a stochastic linear system with diffusion coefficients depending on both state vector and control is investigated.

МАКСИМАЛЬНАЯ КОРРЕЛЯЦИЯ И СТАТИСТИЧЕСКАЯ ЛИНЕАРИЗАЦИЯ

Чернышев К.Р.

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия

Решение задачи идентификации стохастических систем всегда основано на применении тех или иных мер зависимости случайных величин (процессов). При этом главным недостатком мер зависимости, основанных на «традиционной», линейной, корреляции, является, как известно, возможность их обращения в нуль даже в случае существования детерминированной зависимости между парой исследуемых переменных. Именно на преодоление этого недостатка направлено использование в задачах идентификации состоятельных, по терминологии А.Н. Колмогорова, мер зависимости, то есть обращающихся в нуль тогда и только тогда, когда переменные из данной пары являются стохастически независимыми. Такие меры всегда нелинейны. Особое значение подобные меры зависимости представляют для задач нелинейной идентификации, в том числе — статистической линеаризации. В данном контексте обращают на себя внимание работы [1, 2], где рассматривается одно «обобщение» метода статистической линеаризации. Кавычки в данном случае использованы постольку, поскольку задача собственно линеаризации не решается, а заменяется аппроксимацией исходного объекта некоторой нелинейной моделью из заданного класса [3]. Модели такого класса названы в [1, 2] полулинейными. Исходя из этого, и сам метод естественнее было бы называть «статистическая полулинеаризация» Здесь необходимо отметить, что определение компонент модели носит сугубо декларативный характер и не вытекает собственно из представленных в [1, 2] критериев «линеаризации» (первый — совпадение математических ожиданий выхода объекта и выхода модели, и совпадение функциональных автокорреляционных функций выхода объекта и выхода модели; второй — минимум среднеквадратической ошибки). Следует отметить среди прочего и неопределенность формулировки первого критерия линеаризации (поскольку не указано условия выбора собственно функциональных преобразований), а доказательства соответствующих утверждений отсутствуют [3].

В настоящей работе представлен подход к статистической линеаризации входо-выходного отображения нелинейной дискретно-временной стохастической системы с белошумным гауссовским входным процессом, основанный на применении максимальной корреляционной функции. При этом критерием статистической линеаризации являются условие совпадения математических ожиданий выходных процессов системы и модели и условие совпадения взаимных максимальных корреляционных функций выходного и входного процессов системы и выходного и входного процессов модели. Получены явные выражения для коэффициентов весовой функции линеаризованной модели, предложен подход к исключению влияние внешних ненаблюдаемых аддитивных возмущений на выходе системы в условиях, когда имеется априорная информация о виде их распределения.

Литература

[1] Пащенко Ф.Ф. Определение и моделирование закономерностей по экспериментальным данным // В кн. «Системные законы и закономерности в электродинамике, природе и обществе». М.: Наука, 2001. Гл. 7. С. 411-521.
[2] Пащенко Ф.Ф. Введение в состоятельные методы моделирования систем / Учеб. пособие: В 2-х ч. Ч. 1. Математические основы моделирования систем. М.: Финансы и статистика, 2006. 328 с.
[3] Чернышев К.Р. Эссе о некоторых заблуждениях в идентификации систем // Труды II Международной конференции «Идентификация систем и задачи управления» SICPRO '03. Москва, 29-31 января 2003 г. М.: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2003. С. 2660-2698.

Maximal Correlation and Statistical Linearization

Chernyshov K.R.

V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences, Moscow, Russia

The paper presents an approach to the statistical linearization of the input/output mapping of a non-linear discrete-time stochastic system driven by a white-noise Gaussian process. The approach is based on applying the maximal correlation function. At that, the statistical linearization criterion is the condition of coincidence of the mathematical expectations of the output processes of the system and model, and the condition of coincidence of the joint maximal correlation functions of the output and input processes of the system and the output and input processes of the model. Explicit expressions for the weight function coefficients of the linearized model are obtained; an approach to eliminate the influence unobservable output additive disturbances under conditions when a priori information on the type of their probability distribution is available is proposed.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ВЯЗКОСТИ НА НЕЛИНЕЙНЫЕ ОСЦИЛЛЯЦИИ ЗАРЯЖЕННОЙ СТРУИ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОЙ ЖИДКОСТИ

Ширяева С.О., Волкова М.В.

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Россия

Исследование осцилляций и устойчивости заряженных струй вязкой жидкости представляет интерес в связи с многочисленными академическими, техническими и технологическими приложениями феномена распада струй на капли. Но если три десятка лет назад значительная часть исследований как экспериментальных, так и теоретических была ориентирована на разработку способов получения потоков монодисперсных капель жидкости, то последние полтора десятка лет приоритет сместился в сторону исследования закономерностей электростатического полидиспергирования жидкости. В основе явления электростатического полидиспергирования жидкости лежит феномен неустойчивости заряженной поверхности жидкости по отношению к давлению электрического поля: когда локальное давление электрического поля на свободную поверхность жидкости поля превысит локальное лапласовское давление заряженная поверхность жидкости выбрасывает струйку жидкости, которая разбивается на отдельные сильно заряженные капельки. Этот феномен реализуется для плоской заряженной поверхности жидкости, для заряженных капель свободно падающих во внешних электрических полях, для капель, осевших на твердую поверхность во внешнем электрическом поле, и для менисков жидкости. В зависимости от физико-химических свойств жидкости и геометрии электрического поля насчитывается около десятка различных режимов электростатического полидиспергирования жидкости, наблюдаемых экспериментально. Теоретическое же истолкование этого обстоятельства находится в начальной стадии в виду математической сложности проблемы.

Из множества возможных причин многообразия экспериментально реализующихся режимов электродиспергирования можно указать на многообразие начальных условий, способствующих возбуждению неосесимметричных мод осцилляций, закономерности реализации неустойчивости которых изучены пока недостаточно полно. Согласно результатам работ, посвященных теоретическому аналитическому исследованию линейных и нелинейных осцилляций неосесимметричных мод, инкременты их неустойчивости в зависимости от вязкости и электропроводности жидкости могут превышать инкременты неустойчивости осесимметричных мод и определят картину полидисперсного распада струи. Закономерности переноса энергии между резонансно взаимодействующими модами указывают на наличие определенной асимметрии в направлении переноса энергии между осесимметричными и неосесимметричными модами. Нелинейные поправки к частотам осцилляций неосесимметричных мод на разных участках реальной струи с формой, отличающейся от цилиндрической и имеющей на различных участках различную плотность поверхностного заряда, могут иметь разный знак и будут по разному влиять на устойчивость различных участков струи. Более того, все проведенные к настоящему времени аналитические исследования нелинейных осцилляций струй вязкой жидкости выполнены для приближения «тонкой струи», когда радиальное распределение поля скоростей течения жидкости в струе, связанное с ее осцилляциями, считается однородным (независящим от радиальной переменной). В таком приближении радиальная компонента поля скоростей течения жидкости равна нулю и уравнение баланса заряда на поверхности струи не может быть выписано строго. В связи со сказанным в настоящем рассмотрении проводится строгий нелинейный асимптотический анализ нелинейных осцилляций струи вязкой жидкости, когда пренебрегать неоднородностью радиального распределения поля скоростей нельзя.

The Analytical Investigation of a Viscosity Influence on Charged Thick Jet of Conductive Liquids Nonlinear Oscillations

Shiryaeva S.O., Volkova M.V.

Yaroslavl Demidov State University, Russia

The analytical solution of the nonlinear oscillation of a thick jet of a viscous conductive liquids problem is derived.

ЗАДАЧИ АДАПТИВНОГО МИНИМАКСНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССОМ СБЛИЖЕНИЯ–УКЛОНЕНИЯ В ДИСКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Шориков А.Ф.

Уральский государственный экономический университет, Россия

В данном докладе рассматриваются задачи адаптивного минимаксного управления процессом преследования-уклонения с неполной информацией (см. [1-4]) для нескольких управляемых объектов. Динамика всех объектов I_i, $i \in \overline{1,n} = \{1, 2, \ldots, n\}$ и объекта II (управляемых n преследователями P_i и уклоняющимся E соответственно) описываются линейными или нелинейными дискретными рекуррентными векторными уравнениями. Предполагается, что каждый преследователь P_i знает значения прошлых реализаций управляющего воздействия на объект I_i, управляемый им. Каждому преследователю P_i также известны значения прошлых реализаций соответствующего ему информационного сигнала об объекте II, измеряемого с ошибкой, который генерируется дискретным векторным уравнением, зависящим линейно от фазовых векторов объекта II, и через матрицу, определяющую линейное преобразование, зависит от реализаций фазовых векторов объекта I_i. Предполагается, что каждому преследователю P_i известны множества, ограничивающие изменение всех априори неопределенных параметров в уравнениях, описывающих динамику объектов I_i и II, и поступление соответствующего ему информационного сигнала. Каждое из этих множеств является выпуклым многогранником или компактом в соответствующем конечномерном векторном пространстве. В рассматриваемом процессе предполагается также, что существует преследователь P — координатор общего процесса преследования, которому известна вся информация доступная для каждого преследователя P_i, $i \in \overline{1,n}$ и в любой допустимый момент времени он может передавать каждому из них все данные о значениях фазовых векторов объекта II, которыми он располагает в этот момент времени. При сделанных предположениях в работе приводится формализация и общие схемы решения задач адаптивного минимаксного управления процессом преследования-уклонения для рассматриваемых систем.

Полученные в данной работе результаты основываются на исследованиях [1-5] и могут быть использованы при компьютерном моделировании реальных динамических процессов и проектировании оптимальных навигационных и управляющих приборов для различных транспортных систем.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 07-01-00008.

Литература

[1] Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
[2] Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.
[3] Черноусько Ф.Л., Меликян А.А. Игровые задачи управления и поиска. М.: Наука, 1978.
[4] Шориков А.Ф. Минимаксное оценивание и управление в дискретных динамических системах. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 1997.
[5] Ho, Y.C., Bryson, A.E., Jr., and Baron, S., Differential Games and Optimal Pursuit-Evasion Strategies, IEEE Trans. Automat. Control, 1965. Vol. 10, No. 4. P. 385-389.

Problems of Adaptive Minimax Control for Pursuit-Evasion Process in Discrete-Time Dynamical Systems

Shorikov A.F.

Urals State University of Economics, Ekaterinburg, Russia

In this report we consider the problems of adaptive minimax for the pursuit-evasion process with incomplete information in the classes of linear and nonlinear discrete dynamical systems consisting of several controlled objects. To realize the minimax pursuit control in a chosen family of admissible strategies of adaptive controls, we propose a finite recurrent algorithm, each step of which is based on the realization of a process of posterior minimax nonlinear filtration and on solving some problems of linear and convex programming. The results obtained in this report can be used in the computer modeling of real dynamical process and in the optimal design of navigation and control devices for different transportation systems.

КЛАССИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
CLASSICAL MECHANICS

ON CONDITIONS OF FLUTTER ONSET FOR ELONGATED PLATE IN SUPERSONIC GAS FLOW

Loginov B.V., Makeev O.V.

Ulyanovsk State Technical University, Russia

The considered problem is described by the nonlinear equation [1]

$$\frac{\gamma}{g}\frac{\partial^2 w}{\partial t}+\varepsilon\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{D}{h}\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{w''}{(1+w'^2)^{3/2}}\right)=\frac{1}{h}p_0\mathcal{K}(w',M,æ)+$$
$$+\frac{Eh}{a(1-\nu^2)}w''\int_0^a[(1+w'^2)^{1/2}-1]dx \qquad (1)$$

for two types of boundary conditions I. $w(0,t)=0$, $w''_{xx}(0,t)=0$, $w(a,t)=0$, $w''_{xx}(a,t)=0$ (hingely fastened edges); II. $w(0,t)=0$, $w'_x(0,t)=0$, $w(a,t)=0$, $w'_x(a,t)=0$ (both edges are rigidly fixed), where w is the deflection of the plate, h – its thickness, a – its width, $D=\frac{Eh^2}{12(1-\nu^2)}$ the stiffness, E the Young module, ν is the Poisson coefficient, ε the linear damping coefficient, γ is the density of the plate; M is the Mach number, p_0 – the pressure and æ – the polytropic exponent, g – the acceleration of gravity; $\mathcal{K}(w',M,æ)$ is nonlinear differential operator describing the aerodynamic action.

According to Lyapounov-Schmidt method for dynamic bifurcation [2] the linearized equation (1) in dimensionless variables is reduced to the problem $u^{(4)}(x)+\sigma u^{(1)}(x)-\alpha^2\frac{A}{\chi^2}=0$ for complex-valued function $u(x)$ with boundary conditions of the type I and II ($a=1$, σ is proportional to M). It is shown that the boundary condition determinants have simple roots and the rank of the relevant matrices is equal to 3. Consequently the existence of oscillatory solutions for the problem (1) is equivalent to the existence of simple pure imaginary eigenvalues $\pm i\alpha$.

References

[1] Vol'mir A.S. Stability of deformated systems. Moscow, GIFML. 1964

[2] Loginov B.V. Determination of the branching equation by its group symmetry – Andronov-Hopf bifurcation. Nonlinear Analysis TMA 28, no. 12, 2033–2047 (1997).

EXPERIMENTS ON STABILITY OF MECHANICAL SYSTEMS

Mailybaev A.A.*, Seyranian A.P.*, Yabuno H.**

** *University of Tsukuba, Japan*
* *Moscow State Lomonosov University, Russia*

The paper deals with experimental study of stability of equilibrium position of mechanical systems excited by periodically varying forces. It is emphasized that previous experiments including the works by Kapitsa (1951) and Chelomei (1983) were mostly of qualitative nature. Nonlinear behavior of a physical pendulum with vibrating suspension point is studied both theoretically and experimentally. Instability conditions for lower vertical position of the pendulum are found. Periodic motions for various parameters, corresponding to swinging of the pendulum, are obtained and their stability depending on parameters is investigated. The frequency-response curve for periodic motion with small amplitude is obtained. A good agreement between theoretical and experimental results is reported.

Straight elastically supported beams of variable width under the action of periodic axial forces are considered. Two shape optimization problems for reducing parametric resonance zones are studied. In the first problem, the minimal (critical) amplitude of the excitation force is maximized. In the second problem, the range of resonant frequencies is minimized for a given parametric resonance zone and a fixed amplitude of excitation. It is shown that optimal designs depend only on the natural modes involved in the parametric resonance and boundary conditions. Optimal beam shapes are found for different boundary conditions and resonant modes. Experiments for uniform and optimal simply supported elastic beams have been conducted demonstrating a very good agreement with theoretical predictions.

One of the experiments demonstrates how the buckled beam is stabilized by the axial excitation force, pulsating with the high frequency, and the deflection of the beam is returned to the initial straight position. Also, the bifurcation diagram is described and the nonlinear characteristics are experimentally investigated under high-frequency excitation.

All the experiments are shown by video tape.

PERIODIC MOTIONS OF COUPLED OSCILLATORS WITH DRY FRICTION

Madeleine Pascal

IBISC, FRE 2873, Universite d'Evry Val d'Essonne, France

Vibrating systems excited by dry friction are frequently encountered in technical applications. These systems are strongly non linear and they are usually modeled as spring-mass oscillators. They have been the subject of several investigations [1]. In the case of multi degrees of freedom systems [2], only numerical approaches have been used. In this work, our attention is focused on the analysis of a self excited 2-degrees of freedom oscillator with dry friction.

The system consists of two masses m_1, m_2, connected by linear springs k_1, k_2. These two masses are in contact with a driving belt moving at a constant velocity v_0. Friction forces F_1, F_2 act between the masses m_1, m_2, and the belt.

This 2-degrees of freedom oscillator is governed by the following differential system:

$$M\ddot{X} + KX = R, \quad X = (x_1 x_2)^t, \quad R = (F_1 F_2)^t$$

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Here, F_1, F_2 are the contact friction forces obtained from Coulomb's law, in which are the friction forces when slip motion occurs ($v_0 - \dot{x}_i \neq 0$, $i = 1, 2$), while F_{r1}, F_{r2} are the static friction forces. ($F_{si} < F_{ri}$).

Let us assume that at $t = 0$, $\dot{x}_1(0) < v_0$, $\dot{x}_0(0) = v_0$, $k_2(x_2(0) - x_1(0)) = F_{r2}$.

By using the method already presented in [3] for a coupled oscillator with impact, periodic motions with stick-slip oscillations are obtained by analytical methods. This motion involves a first part of time duration τ related to a slip motion of the first mass and a stick motion of the second mass. The second part of the motion, of time duration T, involves a slip motion for the both masses. The time durations τ and T are obtained in analytical form together with the corresponding initial conditions.

References

[1] C.S. Liu, W.T. Chang. "Frictional behavior of a belt-driven and periodically excited oscillator J. of Sound and Vibration, 258, n°2, 247–268, 2002.

[2] J. Awrejcewicz, L. Dzyubak, C. Grebogi. "Estimation of chaotic and regular (Stick-Slip and Slip-Slip) oscillations exhibited by coupled oscillators with dry friction Nonlinear Dynamics, 42, 383–394, 2005.

[3] M.Pascal. "Dynamics and stability of a two degrees of freedom oscillator with an elastic stop J. of Computational and Nonlinear Dynamics, 1, n°1, 94–102, 2006.

SOME RESULTS CONCERNING THE LOCALIZATION OF COMPACT INVARIANT SETS OF ONE CLASS OF LASER SYSTEMS

Starkov K.E.

CITEDI-IPN, Mexico

In this paper we examine equations

$$\begin{aligned}\dot{x} &= k + xz/2 - ayz/2 + my,\\ \dot{y} &= -mx + axz/2 + yz/2,\\ \dot{z} &= -2gz - (1+2bz)(x^2+y^2-1),\end{aligned} \tag{1}$$

of a single mode semiconductor laser subjected to the optical injection, see [Banerjee et al, 2004]. Here x and y are a real and an imaginary part respectively of the complex electric field; z is the population inversion; k is the injected field strength; a is the linewidth enhancement factor; m is the detuning of the electric field from the solitary laser frequency; g is the damping rate and b is the cavity lifetime. In this work a localization of compact invariant sets of the laser system is studied. Here by a localization we mean a description of a set containing all compact invariant sets of the laser system in terms of equalities and inequalities defined in the state space $\Re^3 = \{(x,y,z)^T\}$. Our approach is based on using the first order extremum conditions, see e.g. [Krishchenko, 1997] and [Krishchenko and Starkov, 2006].

Let $0 < b < g < b + 1/4b$.
Then we define the set

$$K_1 = \left\{(x,y,z)^T \in \Re^3 | x^2 + y^2 + \frac{z}{2b} \le c := \frac{4bg - 4b^2 - 4b^2k^2 - 1}{4b(4bg - 4b^2 - 1)(g-b)}\right\} \tag{2}$$

Further, if $g > b + 1/4b > 0$
then we define the set

$$K_1 = \{(x,y,z)^T \in \Re^3 | x^2 + y^2 + z/2b \ge c\}. \tag{3}$$

Also, we define the set

$$K_2 = \{(x,y,z)^T \in \Re^3 | -1/2b \le z \le 1/2(g-b)\}. \tag{4}$$

Now we are in position to establish

Theorem 1. All compact invariant sets of the laser system (1) are contained in the set $K_1 \cap K_2$ with K_1 defined in (2) or in (3) and K_2 defined in (4).

Further, it is shown that the lower bound in (4) for the case $0 < b < g < b + 1/4b$ can be essentially improved with help of the iteration theorem, [Krishchenko, 1997].

Next result is obtained for the laser system (1) with help of using cylindrical coordinates $x = r\cos\theta$; $y = r\sin\theta$; $z = z$. Let $V = \{\Re^2 - \{x_j > 0\}\} \times \Re^1 \subset \Re^3 = \{(x,y,z)^T\}$ with $j = 1$ or 2. We establish the following assertion.

Theorem 2. Each compact invariant set of the laser system (1) located in V is contained in the set $\{x^2 + y^2 \le k^2 m^{-2}(1+a^2)\exp(4a^{-1}\pi)\}$ as well.

Finally, we compare our bounds for different values of parameters and give conditions of the nonexistence of compact invariant sets contained in the set V.

References

Banerjee S, Saha P, Roy Chowdhury A. [2004] "Optically injected laser system: characterization of chaos, bifurcation and control", Chaos 4, 347–357.

Krishchenko A.P. [1997] "Estimations of domain with cycles", Computers and Mathematics with Applications 34, 2–4, 325-332.

Krishchenko A.P. and Starkov K.E. [2006] "Localization of compact invariant sets of the Lorenz system" Physics Letters A 353, 383–388.

EXPONENTIAL STABILITY FOR STRONGLY DAMPED NON-LINEAR WAVE EQUATIONS OF KIRCHHOFF TYPE

Takeshi Taniguchi

Department of mathematics, Kurume University, Miimachi, Kurume, Japan

Recently many authors have been considered asymptotic behavior of weak solutions to nonlinear wave equations. In this talk we discuss the exponential stability for strongly damped non-linear wave equations of Kirchhoff type by using Lyapunov function.

LYAPUNOV FUNCTIONALS FOR 1D RADIATIVE AND REACTIVE VISCOUS HEAT-CONDUCTING GAS FLOWS

Zlotnik A.A.

Russian State Social University, Moscow, Russia

The following compressible 1d Navier–Stokes system of quasilinear differential equations

$$\eta_t = v_x,\ v_t = \sigma_x + g,\ \sigma = \nu\rho v_x - p(\eta,\theta),\ \rho = 1/\eta,$$
$$e(\eta,\theta)_t = (\kappa(\eta,\theta)\rho\theta_x)_x + \sigma v_x + \lambda f(\rho,\theta,z)z^m,$$
$$z_t = (d\rho^2 z_x)_x - f(\rho,\theta,z)z^m,$$

with the state functions $p(\eta,\theta) = R\eta^{-1}\theta + (a/3)\theta^4$, $e(\eta,\theta) = c_V\theta + a\eta\theta^4$, describes one–dimensional flows of a viscous, heat–conducting, radiative and reactive gas. The unknown functions $\eta > 0$, v, $\theta > 0$ and $0 \le z \le 1$ are the specific volume, the velocity, the absolute temperature and the concentration of unburned gas; $(x,t) \in (0,M)\times(0,\infty)$ are the Lagrangian mass coordinates. The pressure $p(\eta,\theta)$ and the internal energy $e(\eta,\theta)$ include the perfect polytropic and the Stefan–Boltzmann radiative law contributions. The heat conductivity $\kappa(\eta,\theta)$ behaves itself like $(1+\theta)^q$ for some $q \ge 2$. The function $f(\rho,\theta,z)z^m$ expresses the rate of chemical reaction and, in the case of the Arrhenius–type law, has the form

$$f(\rho,\theta,z)z^m = \begin{cases} c_0\rho^{m-1}\theta^r e^{-c_1/(\theta-\theta_I)}z^m & \text{for } \theta > \theta_I, \\ 0 \ \text{ for } 0 \le \theta < \theta_I, \end{cases}$$

where $m \ge 1$ is the kinetics order, $\theta_I \ge 0$ is the ignition temperature (for $\theta_I = 0$, ignition is ignored) as well as $c_0 > 0$, $c_1 > 0$ and $r \ge 0$ are other constants. ν, R, a, c_V, λ and d are also given positive physical constants, and $g = g(x)$ is a given body force.

For the associated initial–boundary value problems with arbitrarily large initial data, a collection of global in time bounds for solutions including those in the Sobolev space $H^{2,1}(Q)$ is derived, and the existence and the uniqueness of the global strong solution are proved.

Furthermore, a stabilization of the solution to a non–homogeneous stationary one as $t \to \infty$ is studied. The stabilization rate bounds are established that are of the exponential type in the case $m = 1$ or of the power one in the case $m > 1$. Also the results depend essentially on whether $\theta_\Gamma \ge \theta_I$ or $\theta_\Gamma < \theta_I$, where θ_Γ is the given outer temperature; in the latter case, the duration of the chemical reaction is finite in spite of the presence of unburned gas. In addition in the case $m > 1$, the effect of faster equaling of the values of the concentration z in space is detected. The study is accomplished by means of constructing and analyzing of new nontrivial Lyapunov functionals for the problem. The results are fully stated and proved in [1,2].

The work is supported by RFBR, projects no. 06-01-00187, 07-01-00279 and 07-01-00557.

References

[1] B. Ducomet, A. Zlotnik. Lyapunov functional method for 1D radiative and reactive viscous gas dynamics, Arch. Ration. Mech. Anal. (2005) **177**, 185–229.

[2] B. Ducomet, A. Zlotnik. On the large-time behavior of 1D radiative and reactive viscous flows for higher-order kinetics, Nonl. Anal. Theory, Meth. and Appl. (2005) **63**, 1011–1033.

УСТОЙЧИВОСТЬ И СТАБИЛИЗАЦИЯ ДВИЖЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕКОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ

Агафонов С.А.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Россия

Представлено решение двух задач устойчивости. Первая посвящена исследованию устойчивости механических систем с n степенями свободы общего вида, т.е. систем, находящихся под действием диссипативных, гироскопических, потенциальных и позиционных неконсервативных сил. Предполагается, что матрица, характеризующая потенциальные силы, является отрицательно определенной. При этом для устойчивости необходимо присоединить позиционные неконсервативные силы, а число степеней свободы механической системы должно быть четным. В противном случае, система общего вида неустойчива. Заметим, что асимптотически устойчивая система общего вида при отрицательно определенной матрице потенциальных сил, становится неустойчивой при увеличении диссипативных сил.

Показано, что в этих системах доминирующими (при полной диссипации) являются гироскопические силы, т.е. при увеличении скалярного параметра, являющегося множителем при матрице гироскопических сил и при выполнении одного условия, система становится асимптотически устойчивой. С помощью построения функции Ляпунова получено условие асимптотической устойчивости. Для класса нелинейностей достаточно общего вида найдена оценка области притяжения. Полученные результаты дополняют анализ устойчивости таких систем, представленный в работе автора (ПММ, Т. 67, N 2, 2003).

Во второй задаче рассматривается гироскопическая система с двумя степенями свободы, устойчивость которой достигнута за счет гироскопической стабилизации. Решена задача о стабилизации (до асимптотической устойчивости) системы посредством присоединения нелинейных диссипативных и позиционных неконсервативных сил. Первые определяются с помощью функции Рэлея, задаваемой однородной формой четвертого порядка, а вторые определяются с помощью кососимметрической матрицы с элементами, представляющими собой квадратичную форму координат. В терминах коэффициентов, входящих в эту квадратичную форму, получены условия асимптотической устойчивости, представляющие собой оценки снизу и сверху на эти коэффициенты. Отмечены случаи, когда эта стабилизация невозможна, т.е. устойчивость гироскопической системы разрушается при действии нелинейных диссипативных и позиционных неконсервативных сил.

Теоретические положения применяются к задаче стабилизации стационарного движения неуравновешенного гироскопа в кардановом подвесе.

On the Stability and Stabilization of Mechanical Systems of General Type

Agafonov S.A.

Bauman Moscow State Technical University (BMSTY), Russia

Two Problems of Stability are considered. In the first problem the stability of mechanical system of general type is investigated. The stability is analyzed in case when the potential energy has maximum in origin. The condition for asymptotic stability in terms of system using the Lyapunov function is obtained. In the second problem stabilization of the gyroscopic system by means of non-linear dissipative and positional non-conservative forces in solved. Stability of gyroscopic system with two degrees of freedom is attained with the help of gyroscopic stabilization.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ, ОТВЕЧАЮЩЕЙ МНОГОКРАТНОМУ ЛУЧЕВОМУ ОТРАЖЕНИЮ АТОМОВ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА ОТ СТЕНОК КАНАЛА

Аксенова О.А., Халидов И.А.

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

Анализируется аналитически и численно эффект неустойчивости внутренних свободномолекулярных течений разреженного газа, моделируемых нелинейной динамической системой вида $x_{n+1} = f(x_n)$, $n = 0, 1, \ldots$ [1]. Предполагается, что скорость атомов газа после отражения от поверхности однозначно определяется скоростью падения атомов на поверхность, причем отражение отличается от зеркального (лучевая модель). При использовании тригонометрических локальных аппроксимаций коэффициентов обмена импульсом на стенках канала, возможность применения которых к внутренним течениям обоснована в [2], функция $f(x_n)$ — дробно-рациональная. Установлено, что в соответствующей итерационной схеме, порождаемой последовательными отражениями атомов разреженного газа от стенок канала, возникают аттракторы и бифуркации различных типов, включая каскад бифуркаций Фейгенбаума. Проведенные численные расчеты показали, что изученный аналитически эффект сохраняется при изменении формы канала и параметров взаимодействия газа с поверхностью. В практических приложениях это означает, что неустойчивость течения газа, которую можно наблюдать в виде резкого изменения режима течения при очень малом изменении параметров, может сохраняться в различных течениях. Найдены области изменения параметров, соответствующие различным видам аттракторов (стационарных притягивающих точек, предельных циклов, бесконечных каскадов бифуркаций и хаотического аттрактора). Результаты могут быть применены как к разреженным потокам в каналах, щелях и соплах космических летательных аппаратов, так и к течениям в очень узких каналах, интерес к которым в настоящее время определяется практической значимостью микроэлектромеханических систем и фильтрующих устройств.

Литература

[1] Аксенова О.А., Халидов И.А. Шероховатость в аэродинамике разреженного газа: фрактальные и статистические модели. Изд-во ВВМ С.-Петербургского университета, 2004, 120 с.

[2] Мирошин Р.Н., Халидов И.А. Локальные методы в механике сплошных сред. Изд-во С.-Петербургского университета, С.-Петербург, 2002, 303 с.

On the Stability of Nonlinear Dynamic System Corresponding to Multiple Ray Reflection of Rarefied Gas Atoms from Channel Walls

Aksenova O.A., Khalidov I.A.

Saint Petersburg State University, Russia

Rarefied gas flow in a channel is considered as a sequence of multiple reflections of gas atoms from the walls. The velocity of reflected atoms is uniquely determined by the velocity of incident gas atoms, but the reflection is different from specular one (ray model of scattering). The stability of the flow by increasing number of gas atoms reflections from the surface is described by nonlinear dynamic system. Asymptotic analysis shows that bifurcations of different types appear (including Feigenbaum cascade of bifurcations). Corresponding regions of the parameters are found.

ОБ ОДНОЙ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ ВИБРОКОНСОЛИДАЦИИ НЕОДНОРОДНЫХ ГРУНТОВ

Алтынбеков Ш., Иманбаев Н.С., Ниязымбетов А.Д.

Шымкентский институт Международного казахско-турецкого универстета им. Х.А. Ясави, Казахстан

В работе исследован вопрос о разрешимости следующей задачи виброконсолидации неоднородных грунтов

$$\frac{\partial H}{\partial t} = C_{vn}(x,t,H)L(H) - C_{1n}(x,t,H)\left\{\int_{\tau_1}^{t} f(\tau,H)K_s(t,\tau,H)d\tau + \right. \left. + f(t,H)K_s(t,t,H)\right\} + C_{2n}(x,t,H),\ \ x=(x_1,x_2,x_3),\ t \in Ц_T \tag{1}$$

$$\begin{aligned} &H(x,\tau_1) = H_0(x), \quad x \in \bar{D} \\ &\pm X_s^{(\alpha)}(x,t)\frac{\partial H}{\partial x_s} + X_s^{(\alpha+1)}(x,t)H|_\Gamma = \psi(x,t)_\Gamma \end{aligned} \tag{2}$$

$$\tau < t < T < \infty,\ \ s=1,2,3;\ \ \alpha = 1,2,3, \tag{3}$$

где

$L = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_s}\left(K_{\phi s}\frac{\partial}{\partial x_s}\right)$, $K_1(t,\tau,H) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial(t,\tau,H)}{\partial \tau}\right)$, $K_2(t,t,H) = \frac{\partial(t,\tau,H)}{\partial\tau}|_{\tau=t}$,

$\bar{Ц}_T = \bar{D}x(\tau \le t \le < \infty)$, $\bar{D} = (-l_1 \le x_1 \le l_1,\ -l_1 \le x_2 \le l_1,\ 0 \le x_3 \le h)$

$C(t,\tau,H) = A_c\varphi(\tau,H),(t-\tau)^{m_c}(Ba^{n_c}+1)$, $\varphi(\tau,H) = C_\sigma + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_k}{\tau^k + B_kH}$,

A_c и m_c — параметры ползучести, a, B — амплитуда и параметр колебаний.

Изложен в виде теоремы метод итерации для решения начально-краевой задачи (1)–(3).

Теорема: Пусть $C_{vn}(x,t,H)$, $C_{1n}(x,t,H)$, $C_{2n}(x,t,H)$, $K_{\phi n}(x,t,H)$ и $H(x,t)$ функции класса $C^2(x \in D_\phi,$ $0 < \tau_1 \le t \le T) \cap C(\bar{Ц}_t)$ и положительны, функция $H_0(x)$ содержится в области определения оператора L, функция $H(x,t)$ есть решение задачи (1)–(3), и $H_k(x,t)$ $(k=1,2,\ldots)$ — решение дифференциального уравнения

$$\frac{\partial H_k}{\partial t} = C_{vn}(x,t,H_{k-1})\angle(H_k) - C_{1n}(x,t,H_{k-1})\left\{\int_{\tau}^{t} f(\tau,H_{k-1})K_1(t,\tau,H_{k-1})d\tau + \right. \left. + f(t,H_{k-1})K_2(t,t,H_{k-1})\right\} + C_{2n}(x,t,H_{k-1}),\ k=1,2,\ldots$$

удовлетворяющее начально–краевым условиям (2)–(3), причем $H > H_1$. Тогда последовательность $\{H_k\}$, $(k = 1,2,\ldots)$ сходится к единственному решению $H(x,t)$ задачи (1)–(3) или $k \to \infty$.

Пользуясь идеями локально–одномерной схемы (ЛОС) и методами итерации, к задаче (1)–(3) поставлена конечно-разностная краевая задача. Исследованы погрешность, устойчивость и равномерная сходимость ЛОС.

Обоснован метод прогонки для решения конечно–разностной краевой задачи. Оценены решения разностной задачи при помощи формул прогонки.

About One Quasi-Linear Problem of Non-Uniform Ground Vibroconsolidation

Altynbekob S., Imanbaev N.S., Nijazymbetov A.D.

Shymkent Institute of the International Kazakh-Turkish University named after H.A. Jasavi, Kazakhstan

In this work the question of resolvability of quasi-linear problems of non-uniform ground vibroconsolidation is investigated, and methods of their solution — a method of iteration, a method of total approximation, a method of prorace are proved. Accuracy, stability and uniform convergence of the locally-one-dimensional scheme are investigated. The solution of different problems by means of formulas of prorace is estimated.

НАКОПЛЕНИЕ ДЕФОРМАЦИЙ МАЛЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРИ БЕСПОРЯДОЧНЫХ ДВИЖЕНИЯХ ЖИДКОЙ СРЕДЫ

Антонов В.А., Баранов А.С.

Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория РАН, Россия

С накоплением последовательных независимых случайных деформаций малых элементов несжимаемой среды приходится встречаться, в частности, в связи с анализом турбулентности. Математически задача представляет собой обобщение суммирования многих случайных величин, в исследовании которого имеется весьма крупная заслуга А.М. Ляпунова, на объединение случайных матриц.

Из многих возможных и фактически изучающихся схем объединения случайных матриц мы выбираем следующую. Из задуманной совокупности трехмерных унимодулярных матриц $a_1, a_2, \ldots, a_n$ каждый раз выбирается наудачу какая-либо одна $A_\nu = a_1, a_2, \ldots, a_n$ с соответствующими ненулевыми вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Вопрос стоит об асимптотическом поведении произведений $L_\nu = A_\nu A_{\nu-1} \ldots A_2 A_1$.

Предполагаем отсутствие детерминированного объекта, инвариантного по отношению ко всем $a_1, a_2, \ldots, a_n$, следующих видов: а) эллипсоид; б) плоскость; в) ось; г) тройка некомпланарных осей. Тогда при любом ν, превосходящем некоторое ν_0, можно указать матрицу типа L_ν, переводящую сферу в иглообразный эллипсоид с отношениями полуосей A/B и B/C больше произвольно заданного заранее k. После введения вероятностей это поведение оказывается типичным, то есть осуществляется с вероятностью, стремящейся к 1 при $\nu \to \infty$. Это есть обобщение закона больших чисел. Сложнее в данных условиях вопрос с обобщением центральной предельной теоремы. Некоторые численные примеры наводят на мысль, что среднее отклонение может расти быстрее, чем по обычному закону: $\sqrt{\nu}$.

Accumulation of Small Elements Deformations at Chaotic Motions of the Liquid Medium

Antonov V.A., Baranov A.S.

Central astronomical observatory of RAS (Pulkovo), Saint-Petersburg, Russia

The problem concerning a multiplication of random matrices has been studied at weak restrictions on the smoothness of their distribution. The absence of determined invariant objects of the special form is only required. The proved variant of the law of large numbers predicts the progressive stretching of a small element of the liquid medium into a needle.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ МАЯТНИКОВЫХ ДВИЖЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА В СЛУЧАЕ БОБЫЛЕВА – СТЕКЛОВА

Бардин Б.С.

Московский авиационный институт, Россия

Рассматривается движение тяжелого твердого тела с одной закрепленной точкой. Геометрия масс тела соответствуют случаю Бобылева – Стеклова. В работе исследуется орбитальная устойчивость плоских периодических движений тела, отвечающих маятниковым колебаниям и вращениям относительно одной из главных осей инерции тела, сохраняющей неизменное горизонтальное положение в пространстве.

Для решения указанной задачи применялась методика, разработанная в [1]. В частности, задача об устойчивости указанных периодических движений сводится к эквивалентной задаче об устойчивости неподвижной точки отображения сохраняющего площадь. Выполняется нормализация отображения до членов третьего порядка включительно. На основании известных критериев теории устойчивости гамильтоновых систем по коэффициентам нормализованного преобразования делаются выводы об устойчивости. Результаты исследования представлены в виде диаграмм устойчивости в плоскости параметров задачи: амплитуды колебаний (или угловой скорости вращений) и инерционного параметра, представляющего собой отношение двух главных моментов инерции тела. Несмотря на то, что нормализация отображения проводилась численно, границы областей устойчивости колебаний удалось получить в аналитической форме.

Автор благодарит профессора Маркеева А.П. за полезные обсуждения и замечания. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 05–01–00386) и гранта Президента Российской Федерации для поддержки ведущих научных школ № НШ – 7944.2006.1.

Литература

[1] Маркеев А.П. Об одном способе исследования устойчивости положений равновесия гамильтоновых систем// Изв. РАН МТТ. 2004 № 6 С. 3–12.

On the Stability of Pendulum Motions of a Solid Body in the Bobylev – Steklov Case

Bardin B.S.

Moscow Aviation Institute, Russia

Motion of a solid heavy body with one fixed point is considered. Body mass geometry corresponds to the Bobylev-Steklov case. Orbital stability of flat periodical motions is studied.

ДИНАМИКА КАЧЕЛЕЙ

Беляков А.О., Сейранян А.П.

Институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Россия

Исследуется динамическое поведение невесомого стержня с сосредоточенной массой, скользящей вдоль оси стержня по периодическому закону. Это простейшая модель детских качелей. Найдены и исследованы периодические и хаотические движения системы при различных значениях параметров, соответствующие раскачиванию качелей.

Dynamics of the Swing

Belyakov A.O. and Seyranian A.P.

Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University, Russia

Dynamic behavior of a weightless rigid rod with a mass sliding along its axis according to periodic law is considered. This is the simplest model of children's swing. Periodic and chaotic motions of the system with a change of problem parameters are found and investigated.

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ МЕТОДАМИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ И ФАКТОРИЗАЦИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Беркович Л.М.

Самарский государственный университет, Россия

Рассматриваются различные автономные и неавтономные нелинейные динамические системы 2-го, 3-го и более высоких порядков.

Пусть дана связанная автономная динамическая система, являющаяся обобщением классической лиувиллевой системы [1]

$$y_i'' + \left(k\frac{f_i^*(y_i)}{f_i(y_i)}y_i' + m\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{g(y)}\frac{\partial g}{\partial y_j}y_j'\right)y_i' + r_{i1}f_i^{-k}(y_i)g^{-m}(y)\varphi_i(y_i)y_i' +$$

$$+f_i^{-2k}(y_i)g^{-2m}(y)\varphi_i(y_i)(r_{i0}\int\varphi_i(y_i)dy_i + c_i/\beta_i) = 0, \tag{1}$$

$$i = 1,\dots,n,$$

где $y_i = y_i(x),\ g(y) = g(y_1,\dots,y_n),\ r_i, r_{i0}, c_i, \beta_i = const, (^*) = d/dy_i$.

Преобразованием

$$z_i = \beta_i\int\varphi_i(y_i)dy_i,\ dt_i = f_i^{-k}(y_i)g^{-m}(y)\varphi(y_i)dx,\ i = 1,\dots,n$$

система (1) приводится к линейной несвязанной системе

$$\frac{d^2z_i}{dt_i^2} + r_{i1}\frac{dz_i}{dt_i} + r_{i0}z_i + c_i = 0,\ i = 1,\dots,n.$$

Путем исключения переменных от связанной системы уравнений 1-го порядка во многих важных случаях можно перейти к несвязанной нелинейной системе уравнений более высокого порядка. Так, например, система

$$\dot{x} = pyz,\ \dot{y} = qxz,\ \dot{z} = rxy,$$

описывающая при различных соотношениях между p, q, r либо случай Эйлера-Пуансо в задаче о гироскопе, либо случай триплета в системе гидродинамического типа, может быть приведена к системе уравнений 3-го порядка

$$y_i''' - \frac{1}{y_i}y_i'y_i'' + b_iy_i'y_i^2 = 0,\ i = 1,2,3,\ y_i = y_i(t),\ b_i = const,$$

которая линеаризуется подстановками $z_i = y_i^2,\ ds_i = y_idt$ в систему $z_i'''(s_i) + b_iz_i'(s_i) = 0$.

Применение метода факторизации можно проиллюстрировать на примере уравнения ангармонического осциллятора

$$y'' + b_1y' + b_0y + by^n = 0,\ y = y(x),$$

которое допускает факторизацию через нелинейные дифференциальные операторы 1-го порядка при условии $(n+1)^2b_0 = 2(n+1)b_1^2$.

Литература

[1] Л.М. Беркович. Факторизация и преобразования дифференциальных уравнений. Методы и приложения. М.: НИЦ. "РХД 2002.

Study of Dynamical Systems by Methods of Transformation of Variables and Factorization of Differential Operators

Berkovich L.M.

Samara State University, Russia

We consider autonomous and nonautonomous nonlinear dynamical systems of the second, the third and higher orders. The methods autonomization, an exact linearization and also a factorization of differential operators allow in some important cases for applications to reduce initial systems in more simple forms.

ПРИБЛИЖЕННОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ГИПЕРЗВУКОВОГО ОБТЕКАНИЯ ТОНКОГО КРЫЛА

Богатко В.И.*, Колтон Г.А., Потехина Е.А.***

**Санкт-Петербургский государственный университет, Россия*
***Санкт-Петербургский государственный горный институт, Россия*

Рассматривается задача определения параметров течения газа за фронтом головной ударной волны, образующейся при нестационарном гиперзвуковом движении тонкого крыла переменной формы. При этом предполагается, что толщина, размах и хорда крыла имеют порядок $O(\varepsilon)$, $O(\sqrt{\varepsilon})$, $O(1)$ соответственно, где ε — малый параметр, характеризующий отношение плотностей газа на фронте головной ударной волны. Задача решается методом тонкого ударного слоя [1] в постановке, аналогичной [2]. Система координат выбирается так, что поверхность крыла мало отличается от плоскости xOz. Вектор скорости движения крыла зависит от времени и лежит в плоскости xOy.

Течение газа в ударном слое описывается системой нелинейных уравнений в частных производных (системой уравнений газовой динамики) с граничными условиями на фронте головной ударной волны и поверхности крыла. Головная ударная волна считается присоединенной к передней кромке крыла хотя бы в одной точке. Получены системы уравнений для определения предельного течения и поправок первого приближения. Для случая, когда скорость движения крыла слабо зависит от времени, а также для случая, когда проекцию скорости движения крыла на ось Oy можно считать медленно меняющейся, решение выписано в квадратурах. При этом система уравнений для определения поправок первого приближения расщепляется таким образом, что два уравнения могут быть решены независимо от остальных и одно из них может быть записано в дивиргентном виде. Введение новой функции (аналога функции тока) позволило свести решение задачи к интегрированию нелинейного уравнения второго порядка в частных производных. Для построения решения было использовано преобразование, при котором за одну из независимых переменных выбирают частную производную от вновь введенной функции (преобразование Эйлера-Ампера). Полученное решение зависит от двух произвольных функций и неизвестной формы фронта. Для нахождения этих трех функций построена интегро-дифференциальная система уравнений. Для окончательного решения поставленной задачи предлагается полуобратный метод, заключающийся в том, что задается вид одной из функций и уравнение передней кромки крыла, а форма обтекаемого тела отыскивается в процессе решения указанной выше интегро-дифференциальная системы уравнений.

В случае крыла конечного размаха толщина, размах и хорда крыла будут иметь порядок $O(\varepsilon)$, $O(1)$, $O(1)$, и приближенное аналитическое решение задачи удается построить в конечном виде.

Литература

[1] Черный Г.Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М.: Физматгиз, 1959.
[2] Богатко В.И., Гриб А.А., Колтон Г.А. Обтекание тонкого крыла переменной формы гиперзвуковым потоком газа. Изв. АН СССР Мех. жидк. и газа. 1979. № 4. С. 94-101.

Approximate Analytical Solution of Three-Dimensional Unsteady Problem of Hypersonic Flow Near a Thin Wing

Bogatko V.I.*, Kolton G.A., Potekhina E.A.***

**Saint Petersburg State University, Russia*
***Saint Petersburg State Mining Institute (Technical University)*

The thin shock layer method and the Euler-Amper transformation are applied to the problem under consideration. A vector of the wing velocity depends on the time and a form of thin wing depends on the time too. The head shock wave is considered to be joined to the front edge of the wing. The solution was written in form of the integrals.

УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ СИСТЕМ ТВЕРДЫХ ТЕЛ В ИЗБЫТОЧНЫХ КВАЗИКООРДИНАТАХ И КВАЗИСКОРОСТЯХ

Бячков А.Б., Иванов В.Н.

Пермский государственный университет, Россия

Рассматривается проблема классификации форм уравнений динамики систем твердых тел в избыточных квазикоординатах и квазискоростях (псевдоскоростях).

В историческом обзоре появления и развития терминов квазикоординаты и квазискорости выделяются две задачи:

— во-первых, задача учета дополнительно наложенных связей, ставшая актуальной в полной мере при зарождении неголономной механики, привела к появлению упомянутых терминов и породила значительное разнообразие уравнений движения в квазикоординатах и квазискоростях;

— во-вторых, задача поиска более постой структуры записи уравнений динамики в голономных координатах привела к появлению понятия импульсов Пуассона (которые авторы также рассматривают как частный вид квазискоростей) и уравнений Гамильтона.

Возникшая позднее новая задача механики — проблема формирования уравнений динамики систем твердых тел (в общем случае с большим числом степеней свободы) неизбежно содержит следующие требования:

— использование квазискоростей, как правило, необходимо, поскольку квазискорости являются естественными кинематическими характеристиками твердых тел, входящих в систему. Кроме того, эти кинематические характеристики часто являются искомыми величинами при решении задач моделирования реальных технических объектов.

— критерии оптимальности структуры уравнений, прежде всего с точки зрения вычислительной эффективности, ориентированности уравнений на компьютерное моделирование, выходят на передний план.

Решение задачи формирования уравнений динамики систем твердых тел при выполнении указанных требований приводит к идее записи уравнений с сохранением большего числа переменных, в качестве которых используются обобщенные координаты, квазискорости (и соответствующие им, может быть неявно, квазикоординаты), квазискорости специального вида — обобщенные импульсы Пуассона. Избыточность переменных состояния порождает многообразие выбора форм записи уравнений для систем твердых тел. В качестве критериев выбора рассматриваются показатели вычислительной эффективности: количество операций, временные затраты при численном моделировании. Особенностью исследования является то, что вычислительные затраты рассматриваются по разделам: затраты на формирование, на разрешение, на интегрирование получаемых уравнений. Исследуется зависимость показателей эффективности от размерности уравнений, топологической структуры моделируемой механической системы.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 06–01–00381–а, № 07–01–97611–р_офи).

Multibody Systems Dynamics Equations in Redundant Quasi-Coordinates and Quasi-Velocities

Byachkov A.B., Ivanov V.N.

Perm State University, Russia

We discuss the problem of classification of the multibody systems dynamics equations in redundant variables: generalized coordinates, quasi–velocities, generalized Poisson's impulses. As criteria we study the measure of computing effectiveness: the quantity of computations, time costs of numeric modeling.

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В АЭРОУПРУГОСТИ

Вельмисов П.А.

Ульяновский государственный технический университет, Россия

Построены математические модели в задачах о динамике вязкоупругих элементов, обтекаемых дозвуковым потоком жидкости (или газа), таких классов тонкостенных конструкций, как тонкие профили, защитные экраны, проточные каналы. Математические модели представляют собой связанные системы (как линейные, так и нелинейные) интегро-дифференциальных уравнений с частными производными для потенциала скорости жидкости и деформаций элементов.

В случае, когда потенциал скорости определяется из уравнения Лапласа, на основе методов теории функций комплексного переменного (с использованием формул Шварца, Сохоцкого и Келдыша-Седова), а также метода Фурье разработана методика решения обратных краевых задач аэрогидромеханики, позволяющая исключить потенциал скорости и свести решения задач к исследованию замкнутых систем (как линейных, так и нелинейных) интегро-дифференциальных уравнений (СИДУ) с частными производными для деформаций вязкоупругих элементов.

Разработано несколько методов исследования устойчивости решения указанных СИДУ с частными производными:

а) аналитический метод, связанный с построением функционалов Ляпунова для СИДУ с частными производными, позволяющий получить области устойчивости на плоскости двух параметров, характеризующих механическую систему;

б) численный метод, реализованный на ЭВМ, основанный на сведении СИДУ с частными производными с помощью метода Бубнова-Галеркина к системе обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений (СОИДУ), последующим приведением СОИДУ к векторному уравнению Вольтерра 2 рода, и его решением методом последовательных итераций;

в) численно-аналитический метод, основанный на исследовании асимптотической устойчивости галеркинских приближений с помощью сведения полученной СОИДУ к интегральной системе и применения для нее неравенств Гронуолла-Беллмана.

Исследованы: а) вопрос корректности постановки задач (выведены условия, при которых решение задач существует, единственно, устойчиво и непрерывно зависит от начальных данных и параметров задачи), б) вопрос сходимости созданного численного метода.

Stability Investigation of Solutions of one Class Initial-Boundary Value Problems for Systems of Integro-Differential Equations in Aeroelasticity

Velmisov P.A.

Ulyanovsk State Technical University, Russia

Mathematical models of aeroelastic constructions are built-up, allowing for investigation of linked partial integro-differential equations systems (PDES). Several methods for stability investigations of indicated PDES are elaborated: a) analytical method based on Lyapounov functionals construction; b) numerical method based on Bubnov-Galerkin and successive approximation methods for Volterra vectorial equation of the second kind, c) numerical-analytic method, based on the reducing of the indicated PDES to system of integral equations with subsequent application of Gronvwall-Bellman inequality.

ЧАСТОТНЫЙ КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ С ИРРАЦИОНАЛЬНЫМИ ЗВЕНЬЯМИ

Волошинова Т.В., Ершов Б.А.

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

Сформулированы две формы частотного критерия устойчивости, позволяющие исследовать системы, содержащие иррациональные звенья. Подобные системы рассматриваются в проблемах гидроаэроупругости, а также при изучении различных диффузионных и тепловых объектов, линий связи с потерями, с распределенными сопротивлениями и емкостями и т.д.

The Frequency Stability Criterion for Mechanical Systems with Irrational Links

Voloshinova T.V., Ershov B.A.

Saint Petersburg State University, Russia

Two forms of the frequency stability criterion, which make it possible to investigate the systems containing irrational links, are formulated. Similar systems are usually considered in the problems of hydroelasticity, as well as in studying different diffusion and heat transfer objects, communication links with dissipation, the objects with distributed resistances and capacities, etc.

ТЕНЗОРНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ В МЕХАНИКЕ

Вуйичич В.А.

Математический институт САНУ, Белград, Сербия

Ньютон: «Дело математиков найти такую силу, которая в точности удерживала бы заданное тело в движении по заданной орбите с данной скоростью, и наоборот, найти тот криволинейный путь на который заданною силою будет отклонено тело, вышедшее из заданного места с заданной скоростью».

Гамильтон: «Задача математической динамики для систем n точек заключается в том, чтобы проинтегрировать систему

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}; \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad (p,q) \in T^*M^n \tag{1}$$

$6n$ обычных дифференциальных уравнений первого порядка».

Следовательно: по Ньютону определим и силу и путь, методом Гамильтона (1) — только траекторию на многообразии T^*M^n и путь на M^n.

Тензорные дифференциальные уравнения движения систем, относительно обобщенных независимых координат $q \in M^n$,

$$\frac{Dv^i}{dt} = \frac{dv^i}{dt} + G^i_{jk}\frac{dq^k}{dt} = Q^i \tag{2}$$

выражают, как видно, с помощью стандартных дифференциалов dv^i или с помощью абсолютных дифференциалов Dv^i, $v^i \in TM^n$. Стандартная операция интегрирования, знак которой $\int$, относится к обыкновенным дифференциалам координат тензоров или дифференциалов компонент векторов dv^i. Между тем известно, что этот интеграл нарушает природу тензорных объектов. Из-за этого необходимо искать и использовать тензорный или ковариантный интеграл, знак которого $\hat{\int}$.

Самое простое предположение, что $Q^i = 0$, показывает, что из (2) следует: 1. невозможность интегрирования

$$v^i + \int G^i_{jk}(q)v^j dq^k = C^i = const$$

в общем виде, и 2. получаются интегралы $\hat{\int} Dv^i = v^i - g^{ij}A_j = 0$, где A_j — ковариантно постоянные компоненты тензора.

В докладе будет приведен более конкретный пример — проблема двух тел. На основании аксиом Ньютона происходит формула силы взаимодействия двух тел на расстоянии $\rho(t)$, в виде

$$F = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\frac{\dot\rho^2 + \rho\ddot\rho + v_{0r^2}}{\rho},$$

которая, при условиях законов Кеплера, порождает известную формулу силы

$$F = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(\ddot\rho - \rho\dot\theta^2) = \frac{4\pi^2 a^3}{(m_1+m_2)T^2}\frac{m_1 m_2}{\rho^2} = f\frac{m_1 m_2}{\rho^2},$$

и следовательно, дифференциальные уравнения движения

$$\frac{D\dot\rho}{dt} = -f\frac{m_1+m_2}{\rho^2}, \quad \frac{D\dot\theta}{dt} = 0.$$

Тензорным интегрированием следуют первые тензорные интегралы

$$\hat{\int} \dot\rho D\dot\rho = \frac{1}{2}\dot\rho^2 = f\frac{m_1+m_2}{\rho} + A, \quad \hat{\int} D\dot\theta = \dot\theta - \frac{C}{\rho^2}.$$

В конце будет показано, как разрешена вековая проблема парадокса траектории Луны.

Tensorial Integration in Mechanics

Vujichich V.A.

Institute of Mathematics, Beograd, Serbia

A problem of tensorial differential equations integration is considered. A two-body problem is studied as an example.

НЕЛИНЕЙНЫЙ АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ОСЦИЛЛЯЦИЙ ЗАРЯЖЕННОЙ КАПЛИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Григорьев А.И., Жаров А.Н., Жарова И.Г.

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Россия

Аналитические исследования нелинейных осцилляций заряженных капель начались около двух десятилетий назад, и их библиография насчитывает уже более полусотни работ, но все проведенные к настоящему времени исследования выполнены лишь в приближении идеальной жидкости. Очевидная причина такого положения — значительная громоздкость расчетов нелинейных осцилляций капли вязкой жидкости. Тем не менее, нелинейные осцилляции заряженной капли вязкой жидкости вполне доступны для аналитического анализа в рамках простого асимптотического метода прямого разложения по амплитуде начальной деформации, по крайней мере, в квадратичном по амплитуде начальной деформации приближении.

В настоящей работе путем прямого разложения по амплитуде многомодовой начальной деформации равновесной сферической формы капли во втором порядке малости найдена форма образующей нелинейно осесимметрично осциллирующей заряженной капли вязкой несжимаемой электропроводной жидкости. Показано, что форма капли как функция времени представлена бесконечным рядом по корням дисперсионного уравнения и конечной суммой по номерам изначально возбужденных мод. Проведенный анализ показал, что в вязкой жидкости доля энергии, перекачиваемой за счет нелинейного взаимодействия из моды, определяющей начальную деформацию, в нелинейно с ней взаимодействующие, передается не мгновенно, как было в идеальной жидкости, но этот процесс занимает конечный интервал времени: амплитуды нелинейно возбуждающихся мод вначале растут от нулевого значения, а затем экспоненциально затухают за счет влияния вязкости. В маловязких жидкостях это происходит колебательным образом, а сильно вязких апериодически. Наибольшее расхождение между амплитудными коэффициентами поправок второго порядка малости коэффициентами, вычисленными для случая маловязкой жидкости и идеальной жидкости наблюдаются для основной моды. Это связано с присутствием в маловязкой жидкости элементарных вихрей, которые, для малых номеров мод медленно затухают, и потому оказывают существенное воздействие на границу капли, искривляя ее поверхность.

В случае сильновязких жидкостей, так же как и в случае маловязких жидкостей, наибольшие численные значения амплитудного коэффициента поправки второго порядка малости наблюдаются для основной моды. При этом максимальное значение данного коэффициента сильно увеличивается с увеличением поверхностной плотности заряда. Отметим также, что в случае сильновязких жидкостей точность асимптотического выражения для формы капли зависит от поверхностной плотности заряда. С увеличением которой точность асимптотического выражения увеличивается.

Для слабозаряженной капли сильно вязкой жидкости, когда основная мода, а значит и вся капля устойчивы по отношению к собственному заряду, а амплитуды мод, определяющих начальную деформацию, убывают экспоненциально со временем. При закритическом заряде, когда основная мода теряет устойчивость, а все более высокие моды ее сохраняют, картина временной эволюции формы капли усложняется. Показатели экспонент, в которые входит квадрат частоты основной моды, меняют свой знак, и соответствующее слагаемое начинает экспоненциально со временем возрастать, тогда как остальные компоненты продолжают уменьшаться со временем. И по прошествии некоторого интервала времени исходная деформация капли исчезнет, а ее форма определится основной модой, т.е. капля будет эволюционировать к фигуре, близкой к вытянутому сфероиду.

The Asymptotical Analysis of Nonlinear Oscillations of a Charged Drop of a Viscous Liquid

Grigor'ev A.I., Zharov A.N., Zharova I.G.

Yaroslavl Demidov State University, Russia

The analytical solution of the nonlinear oscillation of a charged drop of a viscous conductive liquids problem is derived.

ОБ ОДНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ МОДЕЛИ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА ПО МОРСКИМ ГАЗОПРОВОДАМ

Груничева Е.В., Курбатова Г.И., Попова Е.А.

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия
Санкт-Петербургский государственный горный институт, Россия

Работа является продолжением исследований авторов по созданию математической модели морских газопроводов в северных морях.

В предыдущих работах была предложена математическая модель установившегося течения газа, которая использовалась при проектировании морских газопроводов в Балтийском и Баренцевом морях (в частности, Северо–Европейского газопровода в Балтийском море и газопровода от Штокмановского газоконденсатного месторождения до Териберки в Баренцевом море).

Суточные, сезонные и другие изменения режимов эксплуатации морских газопроводов, не говоря уже об аварийных ситуациях, требуют решения задачи в нестационарной постановке.

В наших предыдущих работах рассмотрена стационарная модель и получена оценка погрешности перехода от двумерного описания процессов к одномерному при расчете основных характеристик течения. В настоящей работе рассмотрена одномерная нестационарная постановка задачи о течении смеси природного газа в морских газопроводах постоянного сечения, проложенных по дну северных морей.

Существует ряд работ, в которых решаются похожие задачи для газопроводов, проложенных по суше. Большинство этих работ основано на модели Васильева О.Ф., Бондарева Э.А., Воеводина А.Ф., Каниболотского М.А. (ВБВК). Отметим отличия рассмотренной нами математической модели от модели ВБВК. Сверхвысокие давления на входе (порядка 23 МПа) потребовали уточненного описания уравнения состояния смеси газов, в связи с чем было выбрано уравнение состояния Редлиха–Квонга. Уравнение баланса внутренней энергии и калорическое уравнение записаны в форме, согласованной с этим уравнением состояния. Использованные граничные условия позволяют отразить специфику задачи: условия контакта с грунтом и возможность оледенения газопровода.

Для подобных нестационарных задач эффективны численные методы интегрирования, основанные на неявных разностных схемах. Выбранная разностная схема является одной из модификаций схемы Годунова. Схема имеет первый порядок аппроксимации по времени и второй — по пространственной переменной. Расчеты проводились для случая плавно изменяющихся течений, возникающего при суточных или недельных изменениях отбора газа. Система разностных уравнений замыкалась соответствующими граничными условиями с привлечением дополнительных соотношений. На новом временном слое система нелинейных алгебраических уравнений решалась итерационным методом, а линеаризованная система — методом прогонки.

В качестве примера приводится расчет характеристик течения в морском газопроводе с неизменными во времени давлением и температурой на левом конце и изменяющимся во времени расходом на правом конце. Проведен анализ результатов расчетов.

On a Non-Stationary Model of a Gas Flow in Marine Pipelines

Grunicheva E.V., Kurbatova G.I., Popova E.A.

Saint Petersburg State University, Russia
Saint Petersburg State Mining University, Russia

The work is a part of authors' research on a creation of a gas flow in north sea pipelines mathematical model.

A one-dimensional non-stationary model of a gas mixture flow in marine constant section pipelines is presented in this work. A numerical method which is based on an implicit difference scheme was used. Flow parameters in the case of a time constant pressure and temperature at the beginning and a time varying consumption at the end were calculated as an example. The results were analyzed.

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА ГИБКОГО СЖАТОГО СТЕРЖНЯ С ПОДВИЖНОЙ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ ОПОРОЙ

Гуськов А.М.[*], Пановко Г.Я.[**]

[*]*МГТУ им. Н.Э. Баумана, Россия*

[**]*ИМАШ РАН им. А.А. Благонравова, Россия*

Исследуется математическая модель нелинейной динамики гибкого стержня с начальными несовершенствами и подвижной промежуточной опорой. Стержень сжат периодически изменяющейся силой (рис. 1). Промежуточная опора служит для возбуждения и поддержания устойчивых нелинейных поперечных колебаний стержня. Данная расчетная схема находит применение в ряде технологических задач обработки резанием глубоких отверстий.

Кроме практической направленности, исследование динамики рассматриваемой системы представляет интерес с точки зрения анализа возникающих сложных нелинейных движений и возможности их управления. Имеются два мощных источника возбуждения: подвижная опора и сжимающая сила, переменность которой вызвана осевыми вибрациями конца стержня, где осуществляется резание металла с изменяющейся толщиной срезаемого слоя. В настоящей работе процесс резания схематизируется известным периодическим законом изменения продольной сжимающей силой. Промежуточная опора также осуществляет периодические осцилляции около среднего положения, которое может быть выбрано произвольно по длине стержня. Целью такого устройства подвижной опоры является создание оптимальных условий для дробления стружки обрабатываемого материла, с последующим его удалением без вывода инструмента из отверстия.

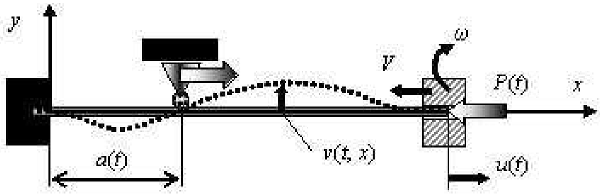


Рис. 1 Рассматриваемая расчетная схема.

Математическое моделирование динамики распределенных упругих систем с подвижными двусторонними связями представляет определенные трудности. В данной работе предлагается вариант сведения уравнения поперечных колебаний стержня к интегральному уравнению и построению функции Грина, учитывающей влияние подвижной связи. Последующая дискретизация осуществляется методом конечных сумм с автоматизированным выбором числа степеней свободы дискретной системы.

В работе показано, что при возбуждении в первой зоне главного параметрического резонанса возможна реализация устойчивых нелинейных колебаний стержня на половинной частоте вибрации опоры. Частота изменения продольной силы в ряде случаем оказывается несоизмеримой с частотой вибраций опоры. Предварительные исследования показывают, что режимы синхронизации являются предпочтительными для практических приложений. Исследуется влияние управляющих параметров на спектр вибраций стержня и амплитуду колебаний подвижного конца стержня. Численно установлены оптимальные положения, частота и амплитуда вибраций промежуточной опоры.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 05-01-08062.

Flexibal Beam with Mobil Support Nonlinear Dynamics

Gouskov A.M.[*], Panovko G.Ya.[**]

[*]*Bauman Moscow State Technical University, Russia*

[**]*Blagonravov Mechanical Engineering Research Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

The employment of the long slender drill bit results in a considerable limitation of process productivity due to the high flexibility of the tool and the necessity of thin segmented chip formation for its removal from the cutting region. One method of chip segmentation is applying the axial vibrator or excitation of the tool axial vibration due to the regeneration mechanism of chip formation. The boundary problem are reduced to the integral Fredholm equation consider the auxiliary boundary problem. The considered scheme of the vibratory drilling realization occurs to be efficient if the parameters corresponds to the operation in the region of the main parametric resonance of the beam lateral vibrations.

К ВОПРОСУ О ГИДРОДИНАМИТЧЕСКОЙ ТЕОРИИ СМАЗКИ ПОДШИПНИКОВ СКОЛЬЖЕНИЯ

Завьялов О.Г.

Уральский социально-экономический институт, Россия

Развитие машиностроения и приборостроения приводит к непрерывному увеличению числа оборотов вала в опорах скольжения и ставит специфические вопросы динамики рассматриваемой сложной механической системы. Поэтому в настоящее время настоятельно требуется изучение нестационарного пространственного течения смазки с включением в уравнения движения тонкого вязкого слоя жидкости между двумя твердыми стенками тех дополнительных членов, которые не учитывались в классических работах по гидродинамической теории смазки. Повышение скоростей вала на смазочном слое опор скольжения требует решения вопросов стабилизации равновесного положения уравновешенного ротора или периодического движения неуравновешенного ротора. Для того чтобы решить эти проблемы, требуется решение следующих задач гидродинамической теории смазки:
а) развитие гидродинамической теории смазки быстроходных роторов в спорах скольжения с учетом нестационарного пространственного течения смазки при любом движении шипа в подшипнике;
б) выяснение структуры сил смазочного слоя при нестационарном течении смазки и учет упругих, демпфирующих, гироскопических и инерционных сил смазочного слоя, а также нестационарных расходов смазки в опоре;
в) разработка метода синтеза опор скольжения с учетом принципов гидродинамической теории смазки и с заданными интегральными характеристиками слоя смазки.

При решении этих задач необходимо рассмотреть замкнутую систему дифференциальных нелинейных уравнений движения ротора и дополнительных уравнений, которые появляются при решении задач гидродинамической теории смазки. На основе замкнутой системы уравнений решается проблема стабилизации движения ротора в опоре.

Hydrodynamic Theory Lubrication Tasks of a Sliding Bearing

Zavyalov O.G.

Ural Social Economic Institute, Chelyabinsk, Russia

Development of mechanical and instrument engineering are leading to increase number of revolutions shaft in support of sliding and puts specific questions of dynamics, which research complex mechanical system. At present it is important to research non-stationary spatial stream of lubricant with inclusion equations of movement with a thin viscous layer of a liquid between two firm walls of those additional members which were not regarded in classical works.

Increasing speeds of a shaft on a lubricant layer of sliding support demands the decision of stabilization in equilibrium position of the counterbalanced rotor or periodic movement of the unbalanced rotor. To solve these problems it demands the decision following tasks of the hydrodynamic theory of lubricant:
a) Development the hydrodynamic theory of lubricant high-speed rotors in sliding support taking into account non-stationary spatial current of lubricant at any movement of a thorn in the bearing;
b) Finding out the structure forces of a lubricant layer at non-stationary current lubricant and the account elastic damping, gyroscopic and inertial forces of a lubricant layer, and also non-stationary charges of greasing in a support;
c) Development works of different the methods of sliding support synthesis support in view of the principles of the greasing hydrodynamic theory and with the given integrated characteristics of a greasing layer.

The decision of these problems allows to write down the closed system of the differential nonlinear equations movement of a rotor and the additional equations which appear at the decision problems of the lubricant hydrodynamic theory. On the basis of the closed system of the equations the problem of thorn movement stabilization in a support is solved.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ТРУБОПРОВОДА, ВОЗБУЖДАЕМЫХ ВОЛНАМИ ДАВЛЕНИЯ ВО ВНУТРЕННЕЙ ЖИДКОСТИ

Зарипов Д.М.

Институт механики Уфимского научного центра РАН, Россия

Рассматриваются изгибные колебания горизонтальной и вертикальной труб, заполненных жидкостью. В жидкости распространяется гармоническая волна давления. Средняя скорость движения жидкости в трубе принимается равной нулю. На концах ставятся граничные условия шарнирного закрепления или защемления. Предполагается, что прогиб трубы мал по сравнению с его длиной, угол поворота поперечного сечения мал по сравнению с единицей, поперечное сечение трубы при ее изгибе не изменяет своей геометрии. Механизм возникновения колебаний обусловлен взаимодействием изменения во времени внутреннего давления и изменением кривизны упругой линии трубы. Нелинейность системы обусловлена взаимодействием продольного усилия в трубе и также кривизны упругой линии.

Для решения поставленной задачи разработана итерационная процедура, для которой доказана сходимость с любого начального приближения, сводящая решение исходной нелинейной задачи к последовательности линейных задач с постоянными коэффициентами. Это позволило на каждой итерации выписывать решение в виде ряда по собственным функциям оператора четвертой производной, подчиненного соответствующим однородным краевым условиям задачи. Разработана программа, реализующая итерационную процедуру решения задачи для обоих типов краевых условий.

Определены условия возникновения нелинейного резонанса. Установлено, что при резонансных частотах изменения давления колебания могут иметь характер биений, что объясняется взаимодействием нелинейных вынужденных и параметрических колебаний. Определена критическая величина внутреннего давления, при превышении которой возникают дополнительные положения равновесия, причем промежуточное положение равновесия является неустойчивым.

Проведен параметрический анализ влияния амплитуды и частоты волны давления на характер возникающих колебаний трубы. Показано существование различных режимов колебаний: периодических, квазипериодических, хаотических при изменении частоты или амплитуды волны давления. Установлено, что при величине давления, существенно меньшей критического значения, при любых частотах возбуждения наблюдаются лишь периодические колебания малой амплитуды. Колебания большой амплитуды, в том числе и хаотические, возникают, когда внутреннее давление превышает критическое значение. Причем для возникновения хаотических колебаний необходимо, чтобы частота волны давления была согласована с частотой свободных колебаний трубы.

Разработана программа, позволяющая прослеживать динамику колебаний трубы при различных входных параметрах. Кроме того, программа позволяет проводить анализ характера колебаний в различных пространствах варьируемых параметров на основе тех или иных характеристик динамических систем, выявлять области периодических и хаотических колебаний. В частности, получены данные, иллюстрирующие степень хаотичности колебаний на основе величины размерности Хаусдорфа при варьировании каких-либо двух параметров системы. Построены карты режимов колебаний трубопровода, проводя анализ которых можно подобрать параметры для безопасных режимов колебаний.

Исследованы сценарии перехода к хаотическим колебаниям при постепенном изменении одной из величин: среднее давление, амплитуда или частота изменения давления. Показано, что переход к хаосу может осуществляться через бифуркацию удвоения периода, бифуркацию Хопфа, а также через обе схемы одновременно.

Mathematical Modeling of the Pipeline Vibrations under the Action of Pressure Waves in Internal Fluid

Zaripov D.M.

Institute of Mechanics, Ufa Branch of Russian Academy of Sciences, Russia

Bending vibrations of a pipeline are considered under the action of pressure waves travelling in internal fluid. An iterative method is developed for solving the nonlinear hyperbolic equation describing pipe vibrations. Algorithms and code for numerical calculations are developed on the basis of this iterative method. The analysis of the pressure wavelength influence on the vibration character is conducted. The dependence of free vibrations on the initial deflection position is investigated. When the pressure in fluid exceeds a critical value, the character of vibrations changes qualitatively depending on the initial deflection position. The mentioned factors and the actions of pressure waves are the reason of complex vibrations including periodic and chaotic ones. Excitation conditions of forced and parametric vibrations are found for small amplitudes of variable pressure wave.

КРИТЕРИИ АБСОЛЮТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ И УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Зевин А.А.

Институт транспортных систем и технологий НАН Украины

Рассматривается векторное интегральное уравнение Вольтерра

$$x(t) = u(t) + \int_0^t W(t,s) f(x(s-\tau(s)), s) ds, \tag{1}$$

$$x \in R^n, \quad W(t,s) = [w_{ik}(t,s)]_{i,k=1}^n, \quad \|u(t)\| \le C \exp(-\alpha t)$$

Нелинейная функция $f(x,t)$ либо ограничена по норме ($\|f(x,t)\| \le k\|x\|$), либо имеет скалярные компоненты, удовлетворяющие неравенствам $|f_i(x_i,t)| \le k_i|x_i|$ (нелинейность второго типа характерна для систем управления, состоящих из линейного блока с нелинейными обратными связями [1]).

К уравнению (1) сводятся, в частности, дифференциальные и другие эволюционные системы, состоящие из линейной и нелинейной частей; при этом $W(t,s)$ — эволюционный оператор линейной части. Известные критерии устойчивости таких систем установлены, главным образом, методом функций или функционалов Ляпунова (см. обзор [2]). В данной работе излагается новый подход, основанный на оценках решений уравнения (1) [4].

Получено достаточное условие абсолютной экспоненциальной устойчивости уравнения (1), выраженное непосредственно с помощью $W(t,s)$, k и k_i; это условие справедливо при любой кусочно-непрерывной ограниченной функции запаздывания $\tau(t)$. Указаны случаи, когда найденное условие не только достаточно, но и необходимо. В частности, последнее имеет место, если матрица $W(t,s)$ неотрицательна либо симметрична; при этом границы областей устойчивости достигаются на линейных функциях $f(x,t)$ и $f_i(x_i,t)$, а соответствующие критические значения параметров k и k_i не зависят от запаздывания $\tau(t)$. В случае скалярного уравнения (1) ($n = 1$) найденное условие также необходимо, при этом в случае знакопеременной функции $W(t,s)$ граница устойчивости достигается при «пилообразном» запаздывании. На основе полученных результатов установлены точные критерии устойчивости некоторых нелинейных механических и управляемых систем. В частности, решена обобщенная задача Лурье для произвольной неавтономной линейной системы с неизвестным запаздыванием в нелинейной обратной связи [3] (эта задача сводится к скалярному уравнению (1)). Найдены критерии устойчивости механической системы, описываемой векторным дифференциальным уравнением второго порядка с ограниченной по норме нелинейностью, содержащей произвольное запаздывание.

Литература

[1] Воронов А.А. Устойчивость, управляемость, наблюдаемость. М.: Наука, 1979.
[2] Richard J.-P. Automatica, 2003, Vol. 39, pp.1667–1694.
[3] Зевин А.А. Доклады РАН, 2005, Т.72, № 1, с. 645–648.
[4] Зевин А.А. Доклады РАН, 2006, Т.410, № 5.

Absolute Stability Criteria for Non-Linear Mechanical and Control Systems with a Time Lag

Zevin A.A.

Institute of Transport Systems and Technologies, Dnepropetrovsk, Ukraine

Systems including a prescribed linear part and uncertain norm bounded nonlinearities with an arbitrary time-varying delays are considered. Sufficient delay-independent conditions for global exponential stability are obtained. For some systems, these conditions are also necessary.

ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕГОЛОНОМНЫХ СВЯЗЕЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Зегжда С.А., Солтаханов Ш.Х., Юшков М.П.

Санкт-Петербургский госуниверситет, Россия
Чеченский госуниверситет

Приводится динамический анализ движения спутника Земли при наличии неголономных связей высокого порядка. Показывается, что плавный переход спутника с одной круговой орбиты на другую может быть осуществлен за счет наложения неголономной связи третьего порядка.

Рассматривается также движение спутника с постоянным по модулю ускорением. Оно обеспечивается наложением нелинейной неголономной связи второго порядка.

Сравниваются два подхода к решению этой задачи. Первый подход основан на применении обобщенного принципа Гаусса. В этом случае при любом эксцентриситете исходной эллиптической орбиты спутник асимптотически выходит на прямолинейное движение с постоянным ускорением. При втором подходе используется классический принцип Гаусса. Это приводит к движению между двумя концентрическими окружностями.

The Dynamic Analysis of High-Order Non-Linear Non-Holonomic Constraints

Zegzhda S.A., Soltakhanov Sh.Kh., Yushkov M.P.

Saint Petersburg State University, Russia
Chechnya State University

The paper presents the dynamic analysis of the Earth satellite motion in the case of high-order non-holonomic constraints. It is shown that the smooth satellite passage from one circular orbit to another can be done by a third-order non-holonomic constraint application.

Here is also considered the satellite motion with the modulo constant acceleration. It is provided by a second-order nonlinear non-holonomic constraint application.

Here we compare two approaches to the problem resolving. The first one is based on the generalized Gauss principle application. In this case having any kind of excentricity of the initial elliptical orbit the satellite proceeds asymptotically to rectilinear motion with constant acceleration. In the second approach the classic Gauss principle is used. This results in the motion between two concentric circumferences.

ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ РАЗРЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМ СВЯЗАННЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Иванов В.Н.

Пермский государственный университет, Россия

Для формирования уравнений движения (УД) многомассовых систем твердых тел со структурой дерева нередко используются общие уравнения динамики, уравнения Лагранжа I рода и уравнения в избыточных квазикоординатах [1,2]. Это связано с тем, что при данном подходе существуют алгоритмы разрешения уравнений движения относительно реакций, множителей Лагранжа и ускорений, в которых число арифметических операций (вычислительная трудоемкость) растет линейно в зависимости от количества тел в механической системе. Например, при использовании алгоритмов нуль-пространства система линейных алгебраических уравнений относительно множителей Лагранжа и ускорений может быть приведена к ленточной структуре, и при ее разрешении можно применять методы прогонки. С этой точки зрения методы, основанные на использовании избыточных переменных, оказываются более эффективными по сравнению с алгоритмами формирования уравнений движения в обобщенных координатах.

С другой стороны, точные алгоритмы разрешения уравнений движения, основанные на методах кинетостатики или преобразования уравнений движения к ленточной структуре, включают в себя дополнительные матричные операции. В результате оказывается, что хотя общая трудоемкость алгоритмов растет линейно, но коэффициент пропорциональности получается достаточно большим, и эффективность этих методов начинает проявляться только тогда, когда число тел в механической системе приближается к ста.

В докладе представлены два итерационных алгоритма формирования и разрешения относительно ускорений УД систем связанных твердых тел без явного формирования матрицы системы. Алгоритмы представляют собой модификации одного метода переменной метрики безусловной минимизации и решения систем нелинейных уравнений с симметричной положительно определенной матрицей Якоби — схемы, основанной на симметричной одноранговой формуле пересчета Пауэлла-Бройдена. Модификации направлены на использование разреженности структуры системы. В первом методе решение системы достигается за конечное число итераций при отсутствии сходимости приближений к матрице Якоби. Во втором алгоритме последовательности приближений коэффициентов матрицы системы и ускорений сходятся к их точным значениям, однако скорость сходимости только сверхлинейна.

В докладе на примерах показано, что использование этих алгоритмов позволяет расширить применимость методов формирования уравнений движения в избыточных переменных для механических систем с небольшим числом тел. Повышение эффективности достигается за счет возможности использования решений, найденных на предыдущих шагах интегрирования в качестве начальных приближений, а также за счет уменьшения числа итераций, требуемых только для уточнения малых возмущений в матрице системы.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 06–01–00381а).

Литература

[1] Попов Е.П., Верещагин А.Ф., Зенкевич С.Л. Манипуляционные роботы: динамика и алгоритмы. М.: Наука, 1978. 400 с.

[2] Шимановский В.А., Иванов В.Н. Формирование уравнений движения механических систем в обобщенных координатах // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамич. системы: межвуз. сб. науч. тр./ Перм. ун-т. Пермь, 2005. Вып. 37. С. 188–201.

Application of Iterative Methods for the Solution of the Multibody System Equations

Ivanov V.N.

Perm State University, Russia

A new iterative methods for solving of symmetrical positive definite linear systems are considered in the report. These methods could be used for modeling of dynamic systems. It is shown that they are the modification of Powell-Broyden method. The main properties of the offered methods are considered. Comparative efficiency of the methods is shown on the examples.

ОЦЕНКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ВИБРОЗАЩИТЫ ПРИБОРНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Иванов С.Е.

Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий механики и оптики (ИТМО), Россия

Рассматривается нелинейная голономная механическая система с двумя степенями свободы, установленная на вибрирующей платформе посредством амортизаторов и демпферов с нелинейными полиномиальными характеристиками. Предполагается что приведенный коэффициент инерции по одной координате существенно больше приведенного коэффициента инерции по второй координате. Методом многочленных преобразований выделяются существенные постоянные параметры механической системы, определяющие качество установившихся и переходных процессов. Приводятся примеры.

Также рассматриваются нелинейные колебания системы с одной степенью свободы с полиномиальными характеристиками, для которой выполняется многочленное преобразование.

Evaluations of a Nonlinear Vibroprotection of Instrument Mechanical System with Two Degrees of Freedom

Ivanov S.E.

Saint Petersburg State University of Information Technologies of Mechanics and Optics, Russia

The nonlinear holonomic mechanical system with two degrees of freedom, installed on a vibrating platform by means of dampers with nonlinear polynomial characteristics is considered. The reduced coefficient of inertia on one coordinate is essentially more than the reduced coefficient of inertia on the second coordinate. The method of polynomial transformation selects significant fixed parameters of mechanical system, defining quality steady state and transient behavior. Examples are given. Also nonlinear oscillations of a system with one degree of freedom with polynomial characteristics are considered. For this system polynomial transformation is carried out.

К УСТОЙЧИВОСТИ УСТАНОВИВШИХСЯ ДВИЖЕНИЙ СВЯЗАННЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Красинский А.Я.

МГУ прикладной биотехнологии, Москва, Россия

Рассматриваются механические системы, стесненные дифференциальными интегрируемыми или неинтегрируемыми связями. Неинтегрируемые связи могут быть однородными или неоднородными. Система может находиться под действием произвольных обобщенных сил, причем предполагается, что эти силы и кинетическая энергия не нарушают условий теорем существования и единственности дифференциальных уравнений. Установившиеся движения связанных систем зачастую оказываются расположенными на многообразиях тех или иных размерностей. Последнее обстоятельство приводит к большому разнообразию возможных постановок задач об устойчивости и, для управляемых систем, — о стабилизации. В связи с этим при постановках соответствующих задач необходимы строгость и полнота формулировок (какая — устойчивость рассматривается — асимптотическая или неасимптотическая, всего многообразия или отдельной его точки, по отношению к каким конкретно переменным и при каких именно начальных возмущениях).

В данной работе анализируются и уточняются как ранее рассмотренные задачи об устойчивости и стабилизации конкретных систем (например, [1,2,3]), так и приводятся постановки, в том числе достаточно общие, задач устойчивости и стабилизации, в частности, стационарных движений, отличные от известных [4], а также обсуждаются полученные в них результаты. При этом, в силу усложнения задачи (например, выяснения возможности сохранения асимптотической по части переменных устойчивости после проведения замен теории критических случаев) возникает проблема получения уравнений движения в форме, допускающей анализ структуры нелинейных членов с точки зрения свободного вхождения критических переменных. В работе систематически используются векторно-матричные уравнения возмущенного движения [5] в переменных Лагранжа, Рауса, Гамильтона, причем анализируются преимущества использования переменных различных типов в зависимости от рассматриваемых классов задач.

Обсуждаются вопросы автоматизации предлагаемого метода исследования.

Литература

[1] Мартыненко Ю.Г. Устойчивость неуправляемых движений одноколесного мобильного робота с маховичной системой стабилизации. В сб.: Проблемы механики современных машин. Матер. межд. конф. Улан-Удэ. 2000, т. 1. с. 96 - 101.

[2] Zenkov D.V., Bloch A.M., Marsden J.E. The Lyapunov-Malkin Theorem and Stabilization of the Unicycle with Rider// Systems and Control Letters. -2002.-Vol. 46. -P. 293-300.

[3] В.И. Каленова, В.М. Морозов, Е.Н. Шевелёва. Устойчивость и стабилизация движения одноколёсного велосипеда// Изв. РАН. МТТ. - 2001.-№ 4.- С. 49 - 58.

[4] Каленова В.И., Карапетян А.В., Морозов В.М., Салмина М.А. Неголономные механические системы и стабилизация движения// Фундаментальная и прикладная математика - М.: Центр новых информационных технологий МГУ, Издательский дом «Открытые системы» - 2005 - Т.11. № 7 - С. 117-158

[5] Красинский А.Я. Об уравнениях движения в задачах устойчивости состояний равновесия неголономных систем// Известия вузов Узбекистана. - 2003. № 1-2. -С. 9-24.

[6] Красинский А.Я. Об одном методе исследования устойчивости и стабилизации неизолированных установившихся движений механических систем// Избранные труды VIII Международного семинара «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления». Москва, Институт проблем управления им. В.А.Трапезникова РАН. 2-4 июня 2004 г. Электронное издание. С. 97-103.

On the Stability of Steady Motions of Constrained Mechanical Systems

Krasinskiy A.Ya.

Moscows university of applied biotechnology, Russia

Mechanical systems with differential (integrable or nonholonomic) constraints are considered. The method of the solving of stability and stabilization problems is based on systematic use of obtained vector-matrix equations of the perturbed motion with evident type of linear and nonlinear members. The problems of the application of this method are discussed.

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ЗАКОНЫ ПОТЕРЬ ИМПУЛЬСА И ЭНЕРГИИ КАПИЛЛЯРНОЙ СТРУИ В ПРОЦЕССЕ ЕЕ РАСПАДА

Кротов В.В.

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

При рассмотрении регулярного, в отсутствие внешней среды, распада на капли струи жидкости, вытекающей (горизонтально, для определенности — слева направо) со скоростью $\vec{v}_0$ из цилиндрического отверстия радиуса r, выделим систему маркированных материальных точек струи, находящуюся внутри мысленного цилиндра, следующим образом движущегося вместе со струей: левый торец пересекает цилиндрическую часть струи, то есть движется со скоростью $\vec{v}_0$, правый же движется между любыми, однако раз выбранными, отделившимися каплями (последние после отделения от сплошной части струи совершают осесимметричные колебания, скорость центров инерции капель $\vec{v}$). Суммирование уравнений движения Ньютона для всех материальных точек системы дает уравнение, совпадающее по форме с уравнением движения центра масс твердого тела, $d\vec{P}_C/dt = \vec{F}_C$, где $\vec{P}_C$ — импульс системы, а $\vec{F}_C$ — действующая на систему внешняя сила. Сплошную часть системы разделим мысленно на квазицилиндрическую (ее правый торец имеет фиксированное в лабораторной системе координат положение) и зону распада, у которой фиксированы (в лабораторной системе) и левая, и правая границы (правая — после усреднения по периоду распада).

Убывание импульса квазицилинрической части маркированной системы определяется, очевидно, соотношением $-\pi r^2 \rho v_0 \vec{v}_0$, а рост импульса ее капельной части — соотношением $nm\vec{v}$, где ρ — плотность жидкости, m — масса капли, n — частота образования капель. Учитывая, что усредненный импульс зоны распада неизменен, а $\vec{F}_C = -\pi r\sigma \vec{v}_0/v$, где σ — поверхностное натяжение, получим первый универсальный (не содержащий физических параметров) закон капиллярного распада: $\Delta V = 1/V_0$, где $\Delta V \equiv V_0 - V$, $V_0 \equiv v_0/v_{0\,min}$, а $v_{0\,min} = (\sigma/\rho r)^{1/2}$ — минимально возможная, уже на границе регулярного рассада, скорость вытекания цилиндрической струи. Этот закон можно записать и в виде уравнения $\Delta P = 1/P_0$ где $\Delta P \equiv P_0 - P$, а P_0 и P — удельные импульсы цилиндрической и капельной частей струи, измеренные в единицах минимального удельного импульса цилиндрической струи.

Сходным образом получены [1]:

— Закон для потерь поступательной кинетической энергии

$$\Delta E' \equiv E'_0 - E' = 2 - 1/E'_0,$$

где $E'_0 = (v_0^2/2)/(v_{0\,min}^2/2)$, $E' = (v^2/2)/(v_{0\,min}^2/2)$ (закон применим и в случае, когда струя, кроме поступательного движения, исходно вращается как целое вокруг своей оси);

— Закон для потерь полной энергии

$$\Delta E \equiv E_0 - E = 2,$$

где E_0 и E — полные удельные энергии жидкости до и после распада, измеренные в минимальной удельной поступательной энергии цилиндрической струи $v_{0\,min}^2/2$;

— Закон для потерь внутренней энергии жидкости при распаде струи следует непосредственно из двух последних законов.

Литература

[1] Кротов В.В. Доклады Академии Наук, 2006, Т. 408, № 1, С. 71-74.

Universal Laws of the Losses of Momentum and Energy of Capillary Jet in the Breakup Process

Krotov V.V.

Saint Petersburg State University, Russia

НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В ВАКУУМНОМ ДИОДЕ С ПУЧКОМ ЭЛЕКТРОНОВ

Кузнецов В.И., Эндер А.Я.

ФТИ им. А.Ф. Иоффе РАН, Санкт-Петербург, Россия

В работе рассматриваются нестационарные состояния вакуумного диода плоской геометрии, в котором моноэнергетический поток электронов с малой размазкой функции распределения по скоростям (ФР) поступает с эмиттера и движется без столкновений между электродами, замкнутыми через внешнюю цепь. При достаточно больших величинах плотности тока j в диоде развиваются нелинейные колебания виртуального катода. На основе преобразования энергии этих колебаний в СВЧ излучение созданы генераторы огромной мощности (в десятки ГВт) с широким спектром — виркаторы, редитроны и др. [1]. Эти устройства работают при токах выше порогового и поэтому, в принципе, имеют неограниченную мощность. Несмотря на успехи в технике создания таких генераторов механизм колебаний, развивающихся в диоде, изучен слабо. Более того, не получено даже дисперсионное уравнение для изучения устойчивости стационарных решений. Связано это с большой математической сложностью задачи. Колебания развиваются в режиме, когда в межэлектродном промежутке формируются распределения потенциала с отрицательным минимумом, высота которого превосходит энергию электронов на эмиттере — виртуальным катодом. В результате часть электронов отражается от виртуального катода, и возникает сложное многопотоковое движение. Адекватное описание таких процессов без знания деталей ФР частиц по скоростям невозможно.

Нестационарная задача сводится к решению системы уравнений Власова, состоящей из кинетического уравнения для электронов и уравнения Пуассона, с граничными условиями для ФР электронов и потенциала. Для расчета ФР используется численный код (Е,К-код) [2], который позволяет с почти аналитической точностью строить ФР электронов, вылетающих с границы и движущихся в известном нестационарном электрическом поле.

Высокая точность кода позволила из расчетов развития малых возмущений определить собственные значения главной моды — инкремент и частоту. Обнаружено, что существует порог по плотности тока j, ниже которого все стационарные решения устойчивы. Выше порога области устойчивых и неустойчивых решений чередуются, а процесс развития неустойчивости завершается выходом на решения с периодическими нелинейными колебаниями виртуального катода. Показано, что выше порога такие решения существуют при всех величинах j даже в областях, где стационарные решения устойчивы относительно малых возмущений. Вблизи порога решения с нелинейными колебаниями являются единственными решениями, а при больших значениях j могут существовать несколько устойчивых нестационарных решений с различными амплитудами и периодами колебаний.

Изучены физические эффекты, характерные для нелинейных колебаний. В частности, обнаружено появление резких скачков на распределении концентрации электронов, которые возникают правее виртуального катода и движутся к коллектору. Когда такой скачок достигает коллектора, на зависимости конвекционного тока от времени появляется резкий всплеск. Подробно изучено также поведение долгоживущих электронов — частиц, достигающих окрестности виртуального катода и совершающих вместе с ним колебания в течение нескольких периодов. Выяснена причина появления таких электронов, построена ФР и оценено их количество.

Литература

[1] А.Е. Дубинов, В.Д. Селемир. Радиотехника и электроника. **47**, с. 645–672 (2002).
[2] В.И. Кузнецов, А.Я. Эндер. ЖТФ, **53**, с. 2329–2338 (1983).

Non-Linear Oscillations in a Vacuum Diode with an Electron Beam

Kuznetsov V.I., Ender A.Ya.

Ioffe Institute of RAS, Saint-Petersburg, Russia

This work treats time-dependent states of a planar vacuum diode, in which a monoenergetic electron flow with a small spread of distribution function in terms of velocities enters the diode region at the emitter and moves with no collision between the electrodes connected via external circuit. In the first time, the stability of the stationary solution is studied in a regime with electron reflection from a virtual cathode. It is revealed that, under certain threshold value of a current density j, all the solutions are stable, above this threshold, the domains of stable and unstable solutions are intermittent, and a development of instability terminates in the solutions with periodical non-linear oscillations of the virtual cathode. It is shown that above the threshold, such solutions exist at all j values even in the domains where the stationary solutions are stable relative to small perturbations. It is proved, that, near the threshold, the oscillatory solutions are unique, and, at larger j, several stable non-stationary solutions can exist with different amplitudes and oscillation periods. Physical effects relevant for the non-linear oscillations are studied.

ОБ АВТОМОДЕЛЬНОЙ ВОЛНЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ОДНОМЕРНОГО НЕСТАЦИОНАРНОГО АДИАБАТНОГО ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОГО ГАЗА

Кусюмов А.Н., Макарова Л.А.

Казанский государственный технический университет им. А.Н. Туполева, Россия

При аналитических исследованиях волновых газодинамических процессов наиболее часто рассматриваются решения в виде бегущей волны и автомодельные волны. Хорошо известно, что наличие у уравнений газовой динамики решений подобного вида связано с выполнением условий инвариантности уравнений относительно непрерывных групп преобразований: переноса по независимым переменным (для бегущей волны) и растяжения-сжатия (для автомодельной волны). Выполнение же условий инвариантности зависит, в частности, от условий действия гравитационной силы, режима течения газа, вида термодинамического процесса. В настоящей работе рассматривается система из двух уравнений для одномерного вязкого нестационарного турбулентного течения газа с учетом действия силы тяжести [1]. Для замыкания системы используется уравнение состояния адиабатного процесса.

Рассматриваемая система уравнений в общем случае не допускает группы преобразований растяжения-сжатия и, следовательно, для нее невозможно построить решение в виде автомодельной волны. Однако, для рассматриваемой системы существуют автомодельные волны при условии, что газ является невязким.

При исследовании групповых свойств уравнений с малым параметром можно использовать методы приближенного группового анализа. Наиболее известными подходами в приближенном групповом анализе являются подход с использованием приближенных инфинитезимальных операторов (Н.Х. Ибрагимовым, В.А. Байковым, Р.К. Газизовым и др.), и подход с использованием уравнений, линеаризованных по малому параметру около некоторого опорного решения (В.И. Фущич и др.).

Рассматриваемая система уравнений содержит малый параметр входящий в слагаемое, учитывающее вязкость газа (величина, обратно пропорциональная числу Рейнольдса) и может быть исследована средствами приближенного группового анализа. В настоящей работе используется второй подход: система уравнений линеаризуется около невязкого автомодельного решения. Полученная линеаризованная система, в свою очередь, допускает группу преобразований растяжения сжатия и для нее можно построить решение в виде автомодельной волны.

Литература

[1] Термогидродинамика систем добычи и транспорта газа/Бондарев Э.А., Васильев В.И., Воеводин А.Ф. и др. – Новосибирск: Наука. Сиб. отделение, 1988. – 272 с.

A Self-Similar Wave for Equations of a One-Dimensional Non-Stationary Adiabatic Viscous Gas Flow

Kusyumov A.N., Makarova L.A.

A.N. Tupolev State Technical University of Kazan, Russia

The system of a one-dimensional non-stationary turbulent flow of viscous adiabatic gas influenced by gravity is considered. Since the considered system of equations contains a small parameter, which is inversely proportional to the Reynolds number, the system can be investigated with the help of the approximate group analysis. The origin equations system is linearized near the inviscid self-similar solution. For the linearized system the solution in the form of a self-similar wave is obtained.

ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ЦИЛИНДРОВ В ПОТОКЕ И ВЛИЯНИЯ ДИСКА ПЕРЕД ТОРЦОМ ЦИЛИНДРА НА КОЛЕБАНИЯ

Лущенко И.В.

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

В настоящей работе исследовались колебания цилиндров в потоке в дозвуковой аэродинамической трубе (АТ-12 НИИММ СПбГУ). Кроме того, исследовалось влияние диска, установленного перед торцом цилиндра, на колебания, проводилась видеозапись эксперимента, для снятия значений амплитуды и частоты колебаний, и решались уравнения движения цилиндров в потоке, таким образом появилась возможность прогнозировать поведение цилиндров в потоке при различных скоростях и углах атаки. Было экспериментально показано, что установка диска перед торцом цилиндра стабилизирует тело в потоке, и колебаний в этом случае не возникает. Более того, это состояние является устойчивым положением равновесия. Для описания колебаний цилиндра в потоке была использована математическая модель, предложенная в [1].

На рисунке представлена схема установки для исследований колебаний в потоке.

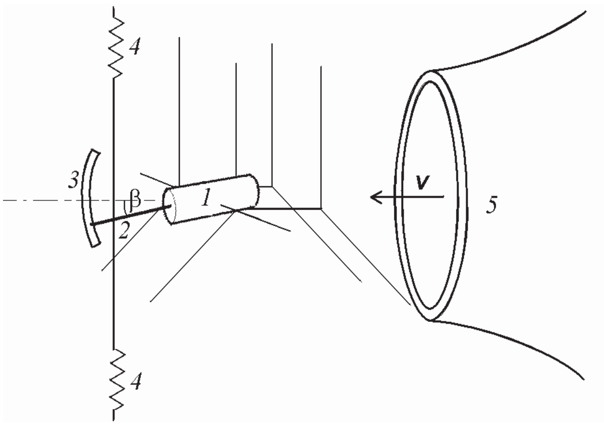


Рис.: 1 — модель, 2 — державка со стрелкой, 3 — шкала, 4 — пружины, 5 — аэродинамическая труба

В заключение можно отметить, что результаты данного исследования можно использовать на практике, устанавливая диск для стабилизации буксируемых тел. Например при буксировке грузов судами или вертолетами.

Литература

[1] Рябинин А. Н. Некоторые задачи аэродинамики плохообтекаемых тел. Изд. СПбГУ, 1997.

Investigation of Cylinder Oscillations in a Flow, and the Effect of the Disc Established before Cylinder on These Oscillations

Lushchenko I.V.

Saint Petersburg State University, Russia

In this work oscillations of cylinders in a flow were studied experimentally. The work contains the description of experiment, the mathematical model of oscillations, the solution of motion equation and the investigation of the effect of the disc, established before cylinder, on cylinder oscillations in a flow.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ВОЗДУШНОГО ЗМЕЯ

Любимцев Р.С., Рябинин А.Н.

НИИ математики и механики им. акад. В.И. Смирнова СПбГУ, Россия

Излагается математическая модель катания на буксире за воздушным змеем (кайтинг). Рассматривается простейшая схема управления змеем (кайтом) с помощью двух буксировочных лееров. Каждый леер связан с половиной крыла. Подтягивая один из лееров, пилот изменяет угол крена кайта. Получены кинематические соотношения, связывающие угол атаки с углами, описывающими ориентацию змея. При этом учитывается, что кайт всегда ориентируется таким образом, чтобы угол скольжения был равен нулю. Принимается, что пилот движется по поверхности по прямолинейной траектории. Учитывается сила трения при взаимодействии с поверхностью и сила аэродинамического лобового сопротивления, действующая на пилота. Для описания движения системы кайт — пилот получена система обыкновенных дифференциальных уравнений, в которую входят два уравнения второго порядка и два уравнения первого порядка. В число уравнений входит уравнение, описывающее действия пилота, направленные на удержание кайта на определенной высоте. Предполагается, что аэродинамические коэффициенты лобового сопротивления и подъемной силы можно представить функциями угла атаки.

Система уравнений движения кайта и пилота решается методом Рунге-Кутты четвертого порядка. Математическое моделирование позволяет анализировать поведение кайта в таких случаях, как внезапный порыв ветра или преодоление участка рыхлого снега с большим коэффициентом трения лыжи — снег, сравнивать характеристики движения кайтов с различными профилями.

Kite Motion Simulation

Lubimtsev R.S., Ryabinin A.N.

Smirnov Institute of mathematics and mechanics, Saint Petersburg State University, Russia

The motion of the kite and pilot is described with the system of the ordinary differential equations. The system includes the pilot operation equation. The system of equations is numerically solved in some practically important cases.

ОЦЕНИВАНИЕ СОСТОЯНИЯ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Маликов А.И., Везденецкий Э.Е., Яфасов Ф.И.

Казанский государственный технический университет им. А.Н. Туполева, Россия
Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН, Россия

Рассматриваются электромеханические системы с машинами переменного тока. Учитываются неконтролируемые возмущения с неизвестными характеристиками, которые являются ограниченными. В процессе функционирования в системе возможны изменения режимов, неисправности. Начальное состояние системы точно не известно, известно, что оно принадлежит заданному множеству. Информация о выходных параметрах состояния измеряется датчиками с некоторой погрешностью.

Математическая модель системы задана не точно. Проблема заключается в том, чтобы по математическому описанию системы с учетом ограничений на неопределенности начального состояния, внешних возмущений, погрешностей измерений и результатов измерений ее выходных параметров получить оценки текущего состояния системы, то есть указать множество, которому будет принадлежать текущее состояние системы. Знание этих оценок позволяет предсказать возможные варианты развития процессов в системе. Сопоставление получаемых оценок с областями нормального функционирования можно контролировать функционирование системы, а также выявлять изменение режимов функционирования, обнаруживать и распознавать неисправности в работе системы в процессе функционирования, сопоставляя получаемые оценки с областями, определенными для соответствующих режимов.

Для оценивания состояния электромеханических систем применяются матричные системы сравнения. Предложены способы и алгоритмы построения матричных систем сравнения и эллипсоидальных оценок состояния для непрерывных и дискретных электромеханических систем управления с неопределенностями.

С учетом особенностей уравнений динамики электромеханических систем с машинами переменного тока получена модификация алгоритмов оценивания применительно к электромеханической системе с асинхронным двигателем. Их апробация показала, что предложенные алгоритмы позволяют получить оценки сопоставимые по точности с известными способами при меньших затратах времени, что обосновывает их использование в системах реального времени.

Выполнена программная реализация в пакете MatLab алгоритмов применительно к электромеханической системе с асинхронным двигателем. С помощью разработанных алгоритмов и программ получены оценки состояния указанной системы с учетом неопределенностей и результатов измерений.

Реализованы различные способы построения оценок по методу эллипсоидов, проведен их сравнительный анализ.

Алгоритмы гарантированного оценивания состояния электрической машины по результатам текущих измерений, полученные с применением матричных неравенств, развиты для контроля технического состояния, обнаружения и распознавания неисправностей. Предлагается алгоритм и методика функционального диагностирования машины, которые реализованы в виде комплекса программ для ПЭВМ и апробированы на экспериментальной установке. Получены оценки переходных процессов, возникающих при характерных изменениях состояния — запуск АД при подаче напряжения; малые колебания частоты сети; изменение сопротивления статорной обмотки и др.

State Estimation and Functional Diagnosis for Electromechanical Control Systems

Malikov A.I., Vezdenetskiy Y.E., Yafasov F.I.

Kazan State Technical University named by A.N. Tupolev, Russia
Institute of mechanics and Engineering Kazan Science Center RAS, Russia

The observers for state estimation of electromechanical control system are constructed. These observers are used for fault detection of sensors and actuators. For the system with induction motor the fault detection and isolation procedures are suggested. The state estimation and fault diagnosis results are obtained for the system with induction motor on experimental unit in real time.

МЕТОДЫ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ ТЕНЗОРОВ ИНЕРЦИИ И ЦЕНТРОВ МАСС ТВЕРДЫХ ТЕЛ НА АНТИСИММЕТРИЧНЫХ ПРОГРАММНЫХ ДВИЖЕНИЯХ В УСЛОВИЯХ ДИССИПАЦИИ

Мельников В.Г.

Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, Россия

Рассматривается голономная стационарная система с одной степенью свободы, состоящая из электропривода, подвеса с закрепленным на нем телом. Она входит в робастную систему управления, способную осуществлять программное движение тела в ограниченной или произвольной угловой зоне. Предложены кинематические уравнения программных вращательных движений, содержащие этап ускоренного вращения в положительном направлении и антисимметричного этапа вращения в обратном направлении в той же угловой зоне, повторяющий в обратном порядке основной этап. Предполагается, что значения мощности диссипативных сил на обратном движении повторяются. Для антисимметричного движения получены аналоги теоремы об изменении кинетической энергии и уравнение Лагранжа, в которых мощность, работа и обобщенная сила системы диссипативных сил выражены через мощность, работу и обобщенную силу на обратном антисимметричном движении.

На основании этих уравнений, примененных на угловом интервале и его частях, получены расчетные формулы, определяющие моменты инерции тестируемого тела относительно различных осей вращения и тензор инерции в точке тела и координаты центра масс тела.

Поддержан грантом РФФИ 06-08-01338

Литература

[1] Мельников В.Г. Способ определения тензора инерции тела.// Патент РФ на изобр. № 2262678, выдан 20 октября 2005

[2] Гернет М.М., Ратобыльский В.Ф. Определение моментов инерции. - М.: Машиностроение, 1969. - 248 с.

Identification of Inertia Tensors and Centers of Gravity of Rigid Bodies on Systems with High Dissipation Using Antisymmetric Program Motions

Melnikov V.G.

Saint-Petersburg State University of Information Technologies, Mechanics and Optics, Russia

This paper presents a new method for identifying the tensor of inertia of a rigid body. A holonomic stationary system with one degree of freedom is considered. A robust control algorithm is applied to carry out program motions in a limited angular zone. The kinematic equations of the program motion with a stage of accelerated rotation in a positive direction and a stage of antisymmetric rotation in the opposite direction performed at the same angular interval are offered. For the introduced class of program motions the analogues of the work-energy principle and Lagrange equation are received. These equations are applied to full angular intervals and their parts to obtain design formulas for the moments of inertia and tensor of inertia of a rigid body and the coordinates of its center of gravity.

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАССЕЯНИЯ АТОМОВ ГАЗА ПОВЕРХНОСТЬЮ МЕТОДОМ МОМЕНТОВ

Мирошин Р.Н.

Санкт-Петербургский государственный университет,
НИИ математики и механики им. акад. В.И. Смирнова, Россия

Метод моментов — мощное аналитическое средство, в развитие которого определяющий вклад внесли П.Л. Чебышев, А.А. Марков, А.М. Ляпунов. В докладе освещаются результаты использования метода моментов при построении функции рассеяния атомов газа по скоростям после столкновения их с поверхностью, если известны (например, из эксперимента) коэффициенты обмена, которые определенным образом связаны со степенными моментами искомой функции рассеяния. Так как эта функция зависит от трехмерной переменной, прогресса удалось добиться с помощью метода разделения переменных. Построено несколько моделей функции рассеяния, имеющих ясный физический смысл и некоторые экстремальные свойства. Одна из них — лучевое отражение — обобщает известную с 60-х годов прошлого столетия и широко используемую в аэродинамических расчетах в газах малой плотности лучевую модель и устраняет ее недостатки. Часть результатов опубликована в следующих статьях автора:

1. О лучевой модели взаимодействия атомов разреженного газа с поверхностью // Вестн. С.-Петербург. ун–та. Сер. 1. 1997. Вып. 4. № 22. С. 74–79.
2. О построении моделей функции рассеяния атомов газа поверхностью по коэффициентам обмена // Аэродинамика: Сб. статей. СПб.: ВВМ, 2004. С. 114–125.

The Moment Method Investigation of Gas-Surface Scattering

Miroshin R.N.

Smirnov Scientific Research Institute of Mathematics and Mechanics, Saint Petersburg University, Russia

We consider the gas-surface interaction in the aspect of rarefied gas dynamics. It is derived the scattering function model with both method of separation of variables and moment one. Moments of this function are determined with gas-surface exchange coefficients. Results are illustrated with some physical models of gas-surface interaction.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЛОКАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛОГИХ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ В МОДЕЛЯХ ТИМОШЕНКО И КИРХГОФФА-ЛЯВА

Михеев А.В.

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

Для решения задач о потере устойчивости тонких пологих оболочек под воздействием безмоментных начальных усилий рядом авторов [1–4] применялся так называемый «локальный подход». Его суть заключается в том, что коэффициенты системы уравнений устойчивости считаются постоянными («замораживаются»), а граничные условия игнорируются. Этот подход применим, когда деформация при потере устойчивости носит локальный характер, а закрепление края не является слабым [5].

В данной работе исследуется вопрос потери устойчивости пологой ортотропной оболочки, находящейся на упругом винклеровском основании. Получены уравнения устойчивости и выражения для параметра нагружения как в модели Кирхгоффа-Лява, так и в модели Тимошенко. Это позволяет провести сравнение критической нагрузки для обеих моделей и оценить величину относительной погрешности, вносимой игнорированием поперечного сдвига. Полученные теоретические результаты проиллюстрированы двумя конкретными примерами — оболочки из стеклопластика и оболочки, армированной двумя системами малорастяжимых нитей.

Литература

[1] Товстик П.Е. Устойчивость тонких оболочек. М., Наука, 1995.
[2] Товстик П.Е. Локальная устойчивость пластин и пологих оболочек на упругом основании// Известия РАН. 2005. Вып.1 С. 147–160.
[3] Haseganu E.M., Smirnov A.L., Tovstik P.E. Buckling of thin anisotropic shells// Trans. CSME. 2000 v. 24 no. 1B P. 169–178.
[4] Михеев А.В. Влияние сдвига на локальную устойчивость пологих оболочек на упругом основании// Асимптотические методы в механике деформируемого твердого тела. Сборник трудов, посвященных 70-летию профессора П.Е. Товстика. СПб. ВВМ, 2006.
[5] Товстик П.Е. Потеря устойчивости тонких оболочек, связанная со слабым закреплением края// Вестник Ленингр. университета. Серия матем., мех., астр. 1991. № 3. стр. 76–81.

Study of Local Stability of Shallow Orthotropic Shells on the Elastic Base in Kirchgoff-Love and Timoshenko Models

Miheev A.V.

Saint-Petersburg State University, Russia

To solve the task of local stability of thin shallow shells under momentless initial forces many authors considered so called "local approach". Its essence is "freezing" the coefficients of equations of shell's stability and ignoring boundary conditions. This approach is suitable in cases where shell's deformation has local character and boundary conditions are not weak. In this work we consider the question of stability loss of shallow orthotropic shell on elastic Winkler base. Equations of stability and expression of load parameter are obtained. We compare the critical load in Kirchgoff-Love and Timoshenko models. The results obtained are illustrated by two numerical cases: shells made of glass-fiber material and shells reinforced by two systems of fibres.

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ОПРЕДЕЛЕННОГО КЛАССА

Морозов В.М., Каленова В.И., Соболевский П.М.

Институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Россия

Рассматривается специальный класс механических систем, линеаризованные уравнения которых относятся либо к классу нестационарных систем, приводимых к стационарным при помощи конструктивного преобразования Ляпунова, либо к системам, близким к указанным.

Традиционный способ исследования устойчивости линейных нестационарных систем (ЛНС) $\dot{x} = A(t)x$ состоит в представлении матрицы системы в виде двух слагаемых, одно из которых A_0 — постоянно, а другое в некотором смысле мало. Из свойств устойчивости стационарной системы с матрицей A_0 при выполнении определенных условий можно сделать выводы об устойчивости исходной ЛНС.

Предположим, что возможно иное разбиение матрицы коэффициентов системы $A(t) = \widetilde{A}_0(t) + \widetilde{A}_1(t)$ такое, что матрица $\widetilde{A}_1(t)$ мала, а система $\dot{x} = \widetilde{A}_0(t)$ приводима путем конструктивного преобразования Ляпунова. Тогда исходная система приводится к виду $\dot{y} = (B_0 + B_1(t))y$, где $B_0 = const$, а матрица $B_1(t)$ мала. При этом для анализа устойчивости системы применимы известные теоремы об устойчивости линейных систем с почти постоянной матрицей. Информация о динамическом объекте, содержащаяся в матрице $A(t)$, при таком методе декомпозиции используется более полно, что, естественно, отражается в более точных выводах об устойчивости.

Как известно, систему уравнений движения голономных механических систем, линеаризованных в окрестности некоторого программного движения, можно представить в виде

$$N_1(t)\ddot{x} + N_2(t)\dot{x} + N_3(t)x = 0, \tag{1}$$

где $x(n \times 1)$ — вектор состояния, $N_i(t)(n \times n)$ $(i = 1, 2, 3)$ — матрицы с непрерывно дифференцируемыми элементами на интервале $[t_0, \infty)$.

Рассматриваются механические системы, матрицы которых представляются в форме $N_i(t) = N_i^0(t) + \varepsilon R_i(t, \varepsilon)$. Матрицы $N_i^0(t)$ удовлетворяют уравнениям вида $\dot{A}(t) = CA(t) - A(t)C$, где $C_{(n\times n)} = const$; $\varepsilon > 0$ — малый параметр; элементы матриц $R_i(t, \varepsilon)$ являются непрерывными ограниченными функциями. Преобразование $x = \exp(Ct)y$ приводит систему (1) к виду

$$L^0 y = -\varepsilon L^1 y, \tag{2}$$

где $L^0 y = M\ddot{y} + G\dot{y} + Ky$, $M = N_{10}$, $G = 2N_{10}C + N_{20}$, $K = N_{10}C^2 + N_{20}C + N_{30}$; $L^1 y = K_1\ddot{y} + (2K_1C + K_2)\dot{y} + (K_1C^2 + K_2C + K^3)y$, $K_i(t) = e^{-Ct}N_i(t)e^{Ct}$ — ограниченные функции.

При $\varepsilon = 0$ система (1) оказывается приводимой к стационарной системе (2), и в этом случае исследование устойчивости нестационарной системы (1) сводится к анализу устойчивости стационарной системы. Изучение структуры матриц системы (2) позволяет применить теоремы Кельвина-Четаева и различные их обобщения.

Если $\varepsilon \neq 0$, то нетрудно показать, что имеют место утверждения, аналогичные теоремам об устойчивости систем первого порядка с почти постоянной матрицей. В качестве примеров рассмотрен ряд задач об устойчивости движения различных механических систем.

Работа выполнена при частичной поддержке грантов РФФИ (05-08-50148; 06-01-00222) и программы "Университеты России".

Stability of Time-Varying Dynamical Systems of the Certain Class

Morozov V.M., Kalenova V.I., Sobolevskiy P.M.

Institute of Mechanics of Lomonosov MSU, Russia

The special class of mechanical system is considered. The linearized equations of these systems are either reducible ones by the constructive transformation or can be are closed to them. The new method of stability analysis of these systems is suggested. Some mechanical examples are considered.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ, СОСТОЯЩИХ ИЗ ДВУХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ, СОЕДИНЕННЫХ УПРУГИМ СТЕРЖНЕМ

Морозов В.М., Чжао Цзе

Институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Россия

Проблемы выделения стационарных движений (СД) и нелинейного анализа их устойчивости для составных космических аппаратов, состоящих из твердых и упругих тел, являются важными и трудными. Строгий общий метод исследования устойчивости СД таких систем, в основе которого лежат идеи второго метода Ляпунова, был предложен В.В. Румянцевым. Ученики и последователи В.В. Румянцева, к которым относится и один из авторов данной работы, развили этот метод и применили его к ряду конкретных задач.

Здесь рассматривается задача об устойчивости СД свободной механической системы, состоящей из двух твердых тел, соединенных тонким нерастяжимым упругим стержнем. Измененная потенциальная энергия системы имеет вид

$$W = \frac{k^2}{2S} + \Pi_d,$$

где Π_d — потенциальная энергия упругой деформации стержня, $S = \gamma \cdot \Theta \cdot \gamma$ — момент инерции системы относительно оси вращения, γ — орт оси вращения, Θ — тензор инерции системы для ее центра масс, k — постоянная интеграла площадей.

Уравнения СД рассматриваемой системы и естественные граничные условия получаются из условия $\delta W = 0$. Эти уравнения представляют собой совокупность алгебраических уравнений и дифференциальных уравнений 4-го порядка относительно компонент вектора упругих перемещений точек стержня.

Исследуемые СД представляют собой равномерные вращения системы с произвольной угловой скоростью вокруг одной из главных осей инерции системы, при этом стержень находится в недеформированном состоянии.

Достаточные условия устойчивости СД рассматриваемой системы получены как условия положительной определенности второй вариации $\delta^2 W$ функционала измененной потенциальной энергии системы.

Выражение для $\delta^2 W$ можно представить в виде

$$\delta^2 W = F_0(u) + F_1(u, \gamma) + F_2(\gamma),$$

где F_0 — квадратичный функционал от компонент упругих перемещений u, F_1 — функционал, билинейный относительно компонент упругих перемещений u и переменных γ, F_2 — квадратичная форма переменных γ.

Условия положительной определенности $\delta^2 W$ разбиваются на две группы, первая из которых обеспечивает положительную определенность функционала F_0, а вторая представляет собой условия положительной определенности квадратичной формы $U(\gamma) = F_2(\gamma) + 1/2 F_1(u^0, \gamma)$. Здесь u^0 — функции, доставляющие минимум функционала $F_0 + F_1$ при фиксированных значениях переменных γ.

Проведен анализ полученных условий устойчивости СД в зависимости от параметров системы.

Работа выполнена при частичной поддержке грантов РФФИ (05-08-50148; 06-01-00222) и программы "Университеты России".

On Stability of Steady-State Motions of Mechanical Systems Consisted of Two Rigid Bodies Those Connected by Elastic Band

Morozov V.M., Chao Tze

Institute of Mechanics of Lomonosov MSU, Russia

The stability problem of the steady-state motions of the free mechanical systems consist of two rigid bodies those connected by elastic band is investigated based on the strong methods of stability theory. The sufficient stability conditions are obtained as the positive determinacy conditions of the second variation of the change potential energy.

МОДИФИКАЦИЯ СТОХАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ КРОВИ

Нагорный С.С., Фомина О.Н., Цибаров В.А., Цой С.В.

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

Первая попытка стохастического описания динамики крови была осуществлена в работах [1,2]. Настоящая модификация сочетает относительную простоту модели, но учитывает влияние инвариантов тензора скоростей деформаций на эффективную вязкость и упругие свойства стромы, агрегирование форменных элементов, поступательное и вращательное их движение, конечность размеров включений. Получены предельные и слабо неравновесные замыкающие соотношения для уравнений гемодинамики, модификация формулы СОЭ, выражение для разности скоростей фаз. Модель дает конечное значение концентрации агрегирующих включений при стремлении времени к бесконечности. Уточняется постановка модели капилляра. На основе метода оптимизации дана замкнутая постановка и получено решение задачи о движении крови по участку кровеносного сосуда близкого к эллиптическому с переменной и подвижной границей. В крови наблюдаются антисимметричные напряжения, обусловленные ее завихренностью. Для степенной модели крови получена эффективная вязкость «квазиньютоновского приближения», что позволило найти по известным экспериментальным данным зависимость показателя степени в степенной модели крови от объемной доли примеси.

Литература

[1] Цибаров В.А. Кинетика и гидродинамика крови. I // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 1997. Вып. 4. (№ 22). С. 101-107.

[2] Цибаров В.А. Кинетика и гидродинамика крови. II // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 1998. Вып. 1. (№ 1). С. 98-104.

Modification of Blood Stochastic Model

Nagorny S.S., Fomina O.N., Tsibarov V.A., Tsoy S.V.

Saint Petersburg State University, Russia

Moving, rotation and aggregation of elements are descripting. The dependence of power (on the power-viscosity model) from the moment of inertia and from erythrocytes concentration is studied.

АНАЛИЗ КОЛЕБАНИЙ МАЯТНИКА ПОД ДЕЙСТВИЕМ СИЛЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ, ПРОПОРЦИОНАЛЬНОЙ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ СКОРОСТИ

Несмачный Д.В.[*], Лукашов С.С.[**]

[*]*СПб ГУ ИТМО, Россия*

[**]*ОАО НПК «Высокие Технологии», Россия*

Положение функции, являющейся решением дифференциального уравнения, описывающего движение маятника по инерции,

$$\varphi = 2\arcsin[\varepsilon\, sn(u)], \tag{1}$$

функцией двух переменных, аргумента $u(t)$, и пропорционального отклонению маятника от положения равновесия эксцентриситета $\varepsilon(t)$ кинематического эллипса, на который отображается движение маятника, позволяет построить два дифференциальных уравнения, описывающих поведение угла и размаха математического маятника при его движении под действием сопротивления трения.

Для этого необходимо и достаточно найти полную вторую производную по времени от функции (1) с последующим положением ε постоянной величиной и удержать в ее выражении члены, пропорциональные первой степени скорости и производной от нее.

Полученные таким образом дифференциальные уравнения дают точное аналитическое описание баланса сил. Все слагаемые, входящие в уравнения движения, выражаются через известные нам параметры свободного движения.

Численный анализ проводится посредством решения трансцендентного уравнения, описывающего колебания маятника и нахождения максимумов амплитуды затухающих колебаний.

The Analysis of Pendulum Oscillations under the Action of Resistant Force Proportional to Velocity

Nesmachniy D.V.[*], Lukashov S.S.[**]

[*]*SPb SU ITMO, Russia*

[**]*Research and Production Company "High Technology", Russia*

Mathematical pendulum oscillations under the action of resistant force proportional to velocity are analyzed by means of force balance constructing and using methods of elliptic functions. The calculus of approximations is used for analysis as well.

ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПРОДОЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ АВТОМОБИЛЯ С УСКОРЕНИЕМ

Носова Е.М.

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

Приводится динамический анализ разгона автомобиля с ускорением при наличии освобождающей интегрируемой неголономной связи. Рассматриваются движения переднеприводного и заднеприводного автомобилей. Учитываются возможности пробуксовки ведущих колес. Составлены дифференциальные уравнения всех возможных случаев продольного движения автомобилей при разгоне. Проведены расчеты движения двух указанных типов автомобилей при одинаковых законах изменения движущего момента.

The Dynamic Analysis of a Longitudinal Motion of a Car with Acceleration

Nosova E.M.

Saint Petersburg State University, Russia

The dynamic analysis of acceleration of a car with a relaxing integrable non-holonomic constraint is given. The motions of front-drive and rear-drive cars are regarded. Slipping of driving wheels is considered to be possible. The differential equations for all possible cases of longitudinal motion of cars with acceleration are established. The calculations of motion of the two above types of cars with identical laws of changing a driving moment are conducted.

ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОФИЛЯ КРЫЛА САМОЛЕТА

Обгадзе Т.А., Давиташвили И.А.

Грузинский Технический Университет, Тбилиси

При изучении задач обтекания вязкой жидкостью, часто применяют математическую модель Навье-Стокса, разработанные соответствующие алгоритмы настолько сложны и погрешности настолько высоки, что становятся малопригодными для аэродинамики. Поэтому, соответствующие расчеты на практике, основаны на полуэмпирические формулы и соотношения. Мы строим алгоритм, который основан на классические эксперименты и законы механики. Рассматриваем вязкую, несжимаемую жидкость и после этого пользуемся формулами пересчета для перехода на аэродинамические показатели в случае сжимаемой жидкости. Работа основывается на методе нелинейного программирования для минимизации интегральной невязки, когда закон сохранения массы и интегральное уравнение Бернулли для вязких жидкостей представлены в виде ограничении.

Для демонстрации нового алгоритма приводится задача обтекания профиля крыла самолета. Крыло самолёта представляется матрицами координат точек профиля, по отдельности строится полином аппроксимации и результат проверяется графиком. Компоненты векторного поля искомой скорости определяются, как полиномы двух переменных с неизвестными коэффициентами. Неизвестные коэффициенты вычисляются методом нелинейного программирования, когда условия ограничения представляют собой целевую функцию, а закон сохранения масс и уравнение Бернулли представляют собой условия ограничения. Ставится и решается задача о нахождении нижнего контура профиля, из условия максимума качества.

Optimization of Airplane Wing Profile

Obgadze T.A., Davitashvili I.A.

Georgian Technical University, Tbilisi

In order to study the problems of viscous fluid flows around a profile Navier-Stokes mathematical model is often used. The algorithms developed for this model are so complicated and the error is so grave that it becomes unsuitable for the problems of aerodynamics. Therefore, the correspondent calculations are mostly done with the help of semi empirical formulas. We construct an algorithm based on basic laws of mechanics and classical experiments. We consider incompressible viscous fluid and then, using calculation formulas, we make a transition to aerodynamic indices of a profile for compressible fluids. The article is based on using nonlinear programming method for minimization of integral error when boundary conditions represent mass conservation law and Bernoulli integral equation for viscous fluids.

О ПОГРЕШНОСТЯХ ПРИ ЧИСЛЕННОМ РАСЧЕТЕ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ ПЛАСТИН ИЗ АНИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Павилайнен Г.В., Юшин Р.Ю.

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

Рассматривается задача изгиба круглой тонкой пластины, равномерно нагруженной по одной из поверхностей, свободно опертой, изготовленной из листового проката, обладающего свойствами трансверсальной изотропии, и эффектом разносопротивляемости растяжению и сжатию (эффект SD). Исследуются случаи упругого и упругопластического состояния до потери устойчивости при образовании пластического шарнира в центре пластины.

Упругопластическая задача изгиба для изотропной пластины была исследована в работах В.В. Соколовского, где решение произведено полуобратным методом при численном интегрировании системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с нелинейными коэффициентами относительно неизвестной функции границы $\chi(r)$ между упругой и пластическими частями пластины и функции $\omega(r)$, связанной тригонометрическими соотношениями с параметрами кривизны. Принимается критерий текучести Мизеса и условие пластической несжимаемости материала А.А. Ильюшина. В предлагаемой работе использован более сложный критерий текучести, предложенный О.Г. Рыбакиной, который учитывает анизотропию и эффект SD

$$(\sigma_r^2 - A\sigma_r\sigma_\varphi + \sigma_\varphi^2)^{1/2} + \alpha(\sigma_r + \sigma_\varphi) = \kappa. \tag{1}$$

Через A, κ и α обозначены величины, связанные с пределами текучести в плоскости пластины при растяжении σ^*_{sr} и при сжатии σ^*_{ss}, а также с соответствующими пределами σ_{sr} и σ_{ss} в поперечном направлении

$$A = 2 - (\sigma^*_{sr}\sigma^*_{ss}(\sigma_{sr} + \sigma_{ss})/(\sigma^*_{sr} + \sigma^*_{ss})/\sigma_{sr}/\sigma_{ss})^2, \tag{2}$$

$$\alpha = (1/\sigma^*_{sr} - 1/\sigma^*_{ss})/(1/\sigma_{sr} + 1/\sigma_{ss}), \quad \kappa = 2(1/\sigma^*_{sr} + 1/\sigma^*_{ss}). \tag{3}$$

Исследование задачи осложнено тем, что отсутствует симметрия в развитии пластических зон на верхней и нижней поверхностях пластины. Однако и в этом случае удается построить систему нелинейных дифференциальных уравнений пятого порядка, которая поддается численному интегрированию.

Общей погрешностью постановки задачи является требование пластической несжимаемости. Кроме этого, исследование численного решения системы дифференциальных уравнений вблизи центра пластины, который является особой точкой, ставит вопрос об устойчивости его в зависимости от погрешностей начальных данных и от шага интегрирования. Исследование гладкости коэффициентов уравнений показывает их хорошую сходимость вблизи нуля и дает оценку погрешности не более квадрата выбранного шага интегрирования. Хорошее совпадение наблюдается и при сравнении численного решения дифференциальных уравнений и решения по методу МКЭ в пакете ANSYS, которое не превышает 10%. Результаты можно использовать при определении пластических свойств листового проката.

Работа выполнения при поддержке гранта РФФИ 01–04–00283.

On the Inaccuracy in Numerical Analysis of Elastoplastic Stability of Anisotropic Material Plates

Pavilaynen G.V., Yushin R.U.

Saint Petersburg State University, Russia

The problem of elastoplastic bending of the anisotropic plates with effect SD is considered. The results are present as tables and plots.

КОНИЧЕСКИЕ ПРЕЦЕССИИ ДИНАМИЧЕСКИ НЕУРАВНОВЕШЕННОГО РОТОРА ДЖЕФФКОТТА В УПРУГИХ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПОРАХ

Пасынкова И.А.

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

В работе исследуется динамика прецессионного движения динамически неуравновешенного ротора Джеффкотта с четырьмя степенями свободы в упругих изотропных нелинейных опорах. Ротор представляет собой динамически симметричное твердое тело, укрепленное вертикально на линейно упругом валу. Массой вала можно пренебречь по сравнению с массой ротора. Рассматриваются два вида нелинейного контакта в опорах: с существенно нелинейной характеристикой типа Герца и с содержащей линейный и кубический члены характеристикой типа Дуффинга. Учитываются силы внешнего и внутреннего трения. Предполагается, что ротор вращается с постоянной угловой скоростью.

Показано, что прямая круговая синхронная прецессия ротора может быть конического или гиперболоидального типа, в зависимости от вида поверхности, которую заметывает в пространстве недеформированная ось вращения ротора. Построено множество нелинейных резонансов, которое подобно скелетной кривой для уравнения Дуффинга. Получено уравнение для определения параметров самоцентрирования ротора.

Для ротора, укрепленного центрально между опорами с одинаковой жесткостью, может иметь место симметричная коническая прецессия. Показано, что для динамически вытянутого ротора имеется два нелинейных резонанса, причем вблизи одного из них происходит значительное смещение центра масс от равновесного положения, а вблизи другого имеет место интенсивная раскачка недеформированной оси вращения ротора. Для симметричной конической прецессии построены амплитудно- и фазово-частотные характеристики. Во всем диапазоне угловых скоростей исследована устойчивость по линейному приближению.

Показано, что имеют место различные сценарии потери устойчивости. Обнаружены бифуркации с сохранением конического типа прецессии и с появлением гиперболоидальных прецессий. Показано, что закритическая область угловых скоростей представляет собой область сложной динамики. Установлена граница возникновения бифуркаций типа Андронова – Хопфа. С помощью численного интегрирования показано, что предельные циклы проявляют чувствительность к изменению начальных условий и может происходить их хаотизация.

Литература

[1] Пасынкова И.А. Устойчивость конической прецессии жесткого неуравновешенного ротора // Вестник СПбГУ. Сер. 1, 1998, вып. 1 (№ 1). С. 82–86.

[2] Pasynkova I.A. Cylindrical Precessions of an Unbalanced Jeffcott Rotor with Four Degrees of Freedom in Nonlinear Elastic Supports // Technische Mechanik, band 26, heft 2, 2006, p. 117–130.

Conical Precessions of an Unbalanced Jeffcott Rotor in Nonlinear Elastic Supports

Pasynkova I.A.

Saint Petersburg State University, Russia

Whirling motion of a dynamically unbalanced Jeffcott rotor with four degrees of freedom is studied. The rotor is assumed to be a symmetrical rigid body attached to a massless linearly elastic shaft. The bearings are assumed to be isotropic and nonlinearly elastic. Nonlinear contacts of Hertz and Duffing's types are considered. The external and internal damping is taken into account. The rotation occurs with constant spin speed.

It is shown that a forward synchronous circular precession can be conical or hyperboloidal in dependence on the surface traced by the undeformed axis of rotation in 3D space. The equation with respect to parameters of self-centering is obtained. The symmetrical conical precession is studied in details. The dynamic response is received and stability is analyzed at the whole range of an angular velocity. It is shown that the different scenarios of stability loss can take place. The threshold of Andronov - Hopf limit cycles excitation is received. It is shown that chaotization of limit cycles can occur.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Перегудин С.И., Холодова С.Е.

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

Задача о редукции уравнений динамики однородной жидкости рассматривалась Сергеем Александровичем Габовым в [1]. В настоящем исследовании производится попытка редукции уравнений динамики сжимаемой стратифицированной вращающейся жидкости с произвольной стратификацией.

Рассматривается идеальная сжимаемая жидкость, находящаяся в состоянии равномерного вращения вокруг вертикальной оси. Декартова система координат $Oxyz$ вращается вместе с жидкостью, причем ось Oz направлена вдоль оси вращения. Малые колебания рассматриваемой жидкости принято описывать следующей системой уравнений [1-3]:

$$\rho_0(z)\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho_0(z)[\mathbf{a},\mathbf{v}] + \nabla p + \mathbf{e}_3\rho_1 g = 0, \quad \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0'(z)\langle \mathbf{e}_3, \mathbf{v}\rangle + \rho_0(z) div \mathbf{v} = 0,$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = \frac{1}{c^2} + \frac{\rho_0(z)\omega_0^2\langle \mathbf{e}_3, \mathbf{v}\rangle}{g},$$

где $\mathbf{v}$ — скорость, ρ_1 — изменение плотности жидкости, вызванное ее движением, p — давление, c^2 — квадрат скорости звука, g — величина ускорения свободного падения, $\omega_0^2(z) = -g\left(\frac{\rho_0'(z)}{\rho_0(z)} + \frac{g}{c^2(z)}\right)$ — квадрат частоты Вяйсяля-Брента, $\rho_0(z)$ — распределение плотности в отсутствии движения, $\mathbf{a} = (0,0,\alpha)$ — вектор Кориолиса, причем $\alpha = |\mathbf{a}|$ — удвоенная частота вращения Земли.

При интегрировании полученной системы уравнений с частными производными на границе области Γ, в которой находится жидкость, должны быть поставлены граничные условия:

$$p\big|_\Gamma = \varphi(\mathbf{x},t), \quad \langle \mathbf{n}, \mathbf{v}\rangle\big|_\Gamma = 0, \quad \left(\rho_0(0)g\langle \mathbf{e}, \mathbf{v}\rangle - \frac{\partial p}{\partial t}\right)\Bigg|_{z=0} = 0.$$

Начальные условия для исследуемой системы будут иметь вид:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}),\ \rho_1(\mathbf{x},0) = \rho_1^0(\mathbf{x}),\ p(\mathbf{x},0) = p_0(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} = (x,y,z) \in \overline{\Omega}.$$

Векторный характер представленной системы уравнений приводит к определенным трудностям их исследования. Поэтому естественным является стремление свести исходную векторную систему к эквивалентным скалярным уравнениям для вспомогательных функций. Доказана теорема о представлении решения исследуемой системы в области $\Omega \in \mathbf{R}^3$, ограниченной кусочно-гладкой поверхностью Γ, на основе которой решение системы сводится к скалярному уравнению для функции $\widetilde{u} = u_{tt}$

$$\left[\frac{1}{c^2(z)}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\rho_0'}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial z}\right] D\widetilde{u} = D\widetilde{u}_{zz} + \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_0^2\right]\Delta_2 \widetilde{u}_{zz}, \quad D = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \alpha^2.$$

Функция $u(\mathbf{x},t)$ определяется равенством $p(\mathbf{x},t) = -g\dfrac{\partial}{\partial t}Du(\mathbf{x},t)$.

Литература

[1] Габов С.А., Свешников А.Г. Линейные задачи нестационарных внутренних волн. М.: Нау-ка, 1990. 344 с.
[2] С.А. Габов. Новые задачи математической теории волн. М.: Наука, 1998. 448 с.
[3] Черкесов Л.В., Иванов В.А., Хартиев С.М. Введение в гидродинамику и теорию волн. С.-Петербург: Гидрометеоиздат. 1992. 264 с.

Mathematical Modeling of Stratified Compressible Liquid Dynamics

Peregudin S.I., Kholodova S.E.

Saint Petersburg State University, Russia

The problem about a reduction of the equations of dynamics of the compressible stratified rotating liquid with variable stratification is considered.

ВЗАИМОСВЯЗАННЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ

Полищук Д.Ф.

Ижевский технический университет, Россия

Структура анализа взаимосвязанных нелинейных задач механики включает несколько информационных пирамид: основная пирамида (грани — математика, физика, прикладная философия, основание — интеграционная механика); единая физика для системы и подсистем (грани — колебания, устойчивость, статика, основание — удар); экспериментальная единая физика объекта; конструкторско–эксплуатационная. Цель комплексного анализа взаимосвязанных задач — поиск новых физических явлений как синтез новых физических явлений.

Рассматривается синтез новых видов потери устойчивости при ударном нагружении пружинного механизма с инерционным соударением витков. В качестве подсистемы принят винтовой тонкий стержень, основные задачи которого решены с использованием классических уравнений Кирхгофа–Клебша. Нелинейная теория пространственных колебаний (математически задача с несамосопряженным оператором) предполагает размыв фронта волны деформации при ударном нагружении, что не позволяет объяснить возрастание касательных напряжений за счет увеличения модуля упругости. С использованием динамического метода взаимосвязанность пространственных нелинейных колебаний винтового тонкого стержня (совместно с А.Д. Полищуком) позволила получить: два вида эйлеровской потери устойчивости, четыре вида местной потери устойчивости, эйлеровскую потерю устойчивости с восстановлением (эксперимент Курятниковой Е.Л.). Два вида местной потери устойчивости — складывание и выскальзывание витков, — являются необходимым, но недостаточным условием формирования межвиткового давления при ударе.

Впервые удалось получить оригинальный результат — обращение в нуль всего частотного спектра по нижней или верхней ветвям характеристического уравнения. Если принять гипотезу винтового деформируемого движения светового сигнала, то данная группа видов потери устойчивости предполагает «остановку» волнового движения и его «восстановление», — свет формирует эфир, эфир формирует свет.

При создании нелинейной статики (классическая задача с вырожденной матрицей, с плохо обусловленным решением) используется интегральный метод Н.В. Азбелева построения фундаментальной матрицы решения. Эффект пространственного искажения позволяет дать достаточные условия реализации гипотезы формирования межвиткового давления при ударном нагружении с инерционным соударением витков. Эта гипотеза позволила объяснить реальный эффект осадки витков в области упругих деформаций в реальном изделии, определить критическую скорость нагружения. При высоком темпе напряжения после удара не успевают затухать, что приводит к возрастанию «вибрационных» напряжений (сохраняются после соударения) и формированию в этих сечения пружины межвитковых давлений за счет серии ударов. Основу прикладной философии объекта составляет аналитико–конструкторский алгоритм. Получение качественно новых физических явлений с преодолением более 50 нелинейностей во всем комплексе задач позволяет надеяться на интерес специалистов к интеграционной механике.

Interconnected Nonlinear Mechanical Problems

Polishchuk D.F.

Izhevsk State Technical University, Russia

Kinds of instability under the ramp loading of spring mechanism with inertial impact were obtained as synthesis physical phenomena of nonlinear theory oscillation, local kinds of instabilities and nonlinear statics of the helical thin rod.

ОДНОМЕРНАЯ НЕСТАЦИОНАРНАЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УСКОРЕНИЯ ПОТОКА ПЛАЗМЫ В АБЛЯЦИОННОМ ИМПУЛЬСНОМ ПЛАЗМЕННОМ ДВИГАТЕЛЕ

Попов Г.А., Хрусталёв М.М.

Государственный НИИ прикладной механики и электродинамики, Москва, Россия

Одним из наиболее перспективных двигателей для систем управления малых космических аппаратов является абляционный импульсный плазменный двигатель (АИПД). Разрядный канал двигателя сверху и снизу ограничен параллельными металлическими пластинами, играющими роль электродов, к которым подводится питающее напряжение от конденсаторного накопителя энергии. Пластины имеют одинаковую величину и выполнены в форме трапеций или прямоугольников. Часть боковых стенок канала закрыта тефлоновыми блоками, имеющими меньшую длину, чем электроды. После инициирования разряда в начале каждого импульса и образования малого первичного сгустка плазменный сгусток ускоряется в канале в основном за счет электромагнитных сил, и его масса пополняется за счет абляции тефлоновых блоков в результате поглощения тефлоном энергии излучения плазмы.

В 2004 – 2007 годах нами была разработана одномерная нестационарная физико-математическая модель движения потока плазмы в АИПД. В этой модели считается, что параметры плазмы в направлениях, перпендикулярных направлению ускорения, постоянны. Модель представляет собой систему четырех уравнений в частных производных для функций двух переменных (время и одна пространственная координата) и двух обыкновенных дифференциальных уравнений (ток и напряжение во внешней цепи).

Модель отражает основные физические процессы, протекающие в АИПД: ионизацию плазмы, абляцию рабочего вещества и формирование плазменного сгустка, разгон плазмы под действием электромагнитных и газодинамических сил, излучение плазмы и другие. Модель позволяет получать распределения плотности, температуры, давления, степени ионизации плазмы, скорости её движения, тока в плазме вдоль продольной оси канала ускорителя и проследить их изменение во времени. Она позволяет получить также интегральные параметры АИПД такие, как единичный импульс тяги, расход рабочего вещества за импульс, удельный импульс и другие.

Предложена новая базовая идеология численного решения уравнений модели и, соответственно, предложен совершенно новый численный метод. Основу новой идеологии численного решения составляет то, что разностную схему предлагается строить не в Эйлеровой, а в Лагранжевой системе координат. В результате узлы сетки по пространственной переменной связаны с движущимися частицами, и сетка деформируется в процессе движения изучаемой среды (плазмы). Число узлов может гибко изменяться во времени в процессе расчета. Одним из преимуществ такого подхода является то, что в нём просто и естественно учитываются условия на подвижной границе плазменного сгустка, обращенной к открытому концу канала ускорения. Кроме того, многие уравнения модели выглядят проще и естественнее в такой схеме решения.

Сравнение результатов расчетов с результатами физического эксперимента на лабораторных АИПД показывает, что модель достаточно хорошо отражает исследуемые процессы.

One-Dimensional Physical-Mathematical Model of Plasma Flow Acceleration in an Ablation Impulse Plasma Engine

Popov G.A., Khrustalev M.M.

State Institute of Applied Mechanics and Electrodynamics, Moscow, Russia

A non-stationary model of plasma flow in an ablation impulse plasma engine is proposed. The model takes into account plasma ionization, ablation of working material, plasma acceleration and radiation, etc. It allows to obtain density, temperature and pressure distributions, ionization degree, plasma velocity and study their variation in time. Some integral engine parameters can also be found. Comparison with experimental measurements is performed for the model validation.

РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ПОЛЗУЧЕСТИ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

Попов Н.Н., Исуткина В.Н.

Самарский государственный технический университет, Россия

Исследование напряженно-деформированного состояния элементов конструкций, работающих в условиях ползучести, на основе решения краевой задачи в стохастической постановке является достаточно сложной задачей. Поэтому аналитические методы решения стохастических задач ползучести в основном разработаны в случае однородного напряженного и деформированного состояний исследуемой среды.

В данной работе рассматривается физически и статистически нелинейная задача установившейся ползучести для толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления. Задача рассматривается в полярных координатах для случая плоского деформированного состояния.

Краевая задача задается уравнениями равновесия для напряжений σ_r, σ_φ, $\tau_{r\varphi}$:

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{r\varphi}}{\partial\varphi}+\frac{\sigma_r-\sigma_\varphi}{r}=0,\quad \frac{\partial\tau_{r\varphi}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{2\tau_{r\varphi}}{r}=0;$$

уравнением совместности деформаций:

$$r\frac{\partial^2\varepsilon_\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2\varepsilon_r}{\partial\varphi^2}+2\frac{\partial\varepsilon_\varphi}{\partial r}-\frac{\partial\varepsilon_r}{\partial r}=\frac{2\partial^2\varepsilon_{r\varphi}}{\partial r\partial\varphi}+\frac{2}{r}\frac{\partial\varepsilon_{r\varphi}}{\partial\varphi};$$

определяющими соотношениями ползучести, которые принимаются в соответствии с нелинейной теорией вязкого течения в стохастической форме

$$\dot\varepsilon_\varphi=-\dot\varepsilon_\varphi=\frac{c}{3}s^{n-1}(\sigma_\varphi-\sigma_r)(1+\alpha U),\quad \dot\varepsilon_{r\varphi}=cs^{n-1}\tau_{r\varphi}(1+\alpha U),$$

и граничными условиями для напряжений на внутреннем и внешнем радиусах

$$\sigma_r(a,\varphi)=-q,\quad \sigma_r(b,\varphi)=\tau_{r\varphi}(a,\varphi)=\tau_{r\varphi}(b,\varphi)=0.$$

Здесь $s^2=\frac{3}{4}(\sigma_\varphi-\sigma_r)^2+4\tau_{r\varphi}^2$ — интенсивность напряжений; q — внутреннее давление, c и n — постоянные материала. С помощью случайной однородной функции $U(r,\varphi)$ описываются реологические свойства материала, а число α $(0<\alpha<1)$ играет роль коэффициента вариации этих свойств.

Производится статистическая линеаризация компонент напряжений и деформаций по малому параметру α:

$$\sigma_{ij}=\sigma_{ij}^0+\alpha\sigma_{ij}^*,\quad \langle\sigma_{ij}\rangle=\sigma_{ij}^0,\quad \langle\sigma_{ij}^*\rangle=0,$$
$$\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ij}^0+\alpha\varepsilon_{ij}^*,\quad \langle\varepsilon_{ij}\rangle=\varepsilon_{ij}^0,\quad \langle\varepsilon_{ij}^*\rangle=0.$$

С целью физической линеаризации функция s^{n-1} разлагается в степенной ряд и в этом разложении учитываются только линейные члены. В итоге получается линеаризованная задача для компонент тензора флуктуаций напряжений, представляющая собой систему из трех дифференциальных уравнений с частными производными. Полученная система при помощи перехода к функции напряжения F и соотношений

$$\sigma_r^*=\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2F}{\partial\varphi^2},\quad \sigma_\varphi^*=\frac{\partial^2F}{\partial r^2},\quad \tau_{r\varphi}^*=\frac{1}{r^2}\frac{\partial F}{\partial\varphi}-\frac{1}{r}\frac{\partial^2F}{\partial r\partial\varphi}$$

сведена к одному дифференциальному уравнению, решение которого представлено в виде ряда.

Найдены математические ожидания и дисперсии случайного поля напряжений. Проведено исследование и анализ влияния параметров реологической модели, степени неоднородности материала на статистические оценки случайного поля напряжений.

The Solution of Two-Dimensional Stochastic Creep Problem in Polar Coordinates

Popov N.N., Isutkina V.N.

Samara State Technical University, Russia

The analytical method of the flat nonlinear problem's solution of the established creep with stochastically nonuniform properties of a material is developed. Investigation of a casual pressure field depending on a degree of heterogeneity and a parameter of nonlinearity of a material is carried out.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РЕЛАКСАЦИИ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В УПРОЧНЁННОМ СЛОЕ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ

Радченко В.П., Саушкин М.Н.

Самарский государственный технический университет, Россия

Одним из способов повышения долговечности многих изделий являются различные методы упрочнения элементов конструкций поверхностным пластическим деформированием. При этом повышение сопротивления усталости обусловлено главным образом сжимающими остаточными напряжениями в поверхностном слое.

В процессе эксплуатации при высоких температурах и наличии явления ползучести (развития деформаций во времени) происходит релаксация остаточных напряжений — уменьшение сжимающих напряжений по модулю на фоне реологического деформирования самой конструкции.

Специфика решаемой задачи заключается в том, что необходимо учитывать физически нелинейные соотношения для материала, нелинейность самих краевых задач, а также реологические деформации (деформации ползучести), которые развиваются во времени даже при постоянных напряжениях.

В работе предложена математическая модель релаксации остаточных напряжений в поверхностно упрочненном слое элементов конструкций, наведенных методом поверхностного пластического деформирования, в условиях ползучести всей конструкции, которая основана на методе декомпозиции конструкции и склейки решений нелинейных краевых задач.

На основании уравнений равновесия, совместности деформаций и гипотезы пластической несжимаемости разработана методика восстановления начального напряженно-деформированного состояния в поверхностно упрочненном слое по одной из экспериментально замеренных компонент тензора остаточных напряжений. Известно, что такие остаточные напряжения проникают на небольшую глубину (до нескольких сотен микрон). В силу этого вводится гипотеза, что поля наведенных остаточных напряжений не оказывают существенного влияния на жесткость упрочненной конструкции и упрочненный слой играет роль тонкой «пленки», наклеенной на поверхность элемента конструкции и деформирующейся в режиме «жесткого» нагружения при заданных значениях тензора деформаций на поверхности элемента конструкции. При решении этой задачи используется энергетический вариант кинетических уравнений реологического деформирования и разрушения материалов.

Во второй краевой задаче исследуется релаксация остаточных напряжений в режиме «жесткого» нагружения при заданных деформациях, которые определяются из решения первой краевой задачи.

Решены задачи релаксации остаточных напряжений в поверхностно упрочненном слое для некоторых элементов конструкций, в частности для дисков с круговыми концентраторами и лопаток газотурбинных двигателей, при реальных условиях нагружения. Приводятся результаты расчетов, выполнен их анализ, даны практические рекомендации по назначению ресурса при критериях отказа типа величины остаточных напряжений в поверхностном слое.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 07-01-00478-а).

Mathematical Model of a Relaxation of Residual Stresses in a Superficially Hardened Layer of Structures under Creep Conditions

Radchenko V.P., Saushkin M.N.

Samara State Technical University, Russia

In the paper the relaxation of the residual stresses in a hardened layer of structures induced by a method of superficially plastic deformation under creep conditions is studied. The procedure of restoration of the initial stress-strain state in the superficially hardened layer in respect of one of the measured components of the residual stresses is offered. The problem is divided into two boundary value problems. The stress-strain state of the structure under creep conditions without hardened layer is the solution of the first boundary value problem. In the second one the relaxation of the residual stresses in a mode of "rigid" loading at deformations, which are determined from the solution of the first boundary value problem is analyzed. The number of the problems related to the stress relaxation in the superficially hardened layer for the various structures is resolved.

ВЛИЯНИЕ ОТНОШЕНИЯ МОЩНОСТЕЙ НА УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМЫ "СИНХРОННЫЙ ГЕНЕРАТОР — СИНХРОННЫЙ ДВИГАТЕЛЬ"

Родюков Ф.Ф.

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

Для составления уравнений электромеханической системы "синхронный генератор – синхронный двигатель" использовалась процедура получения корректных уравнений электрических машин переменного тока в безразмерной форме из монографии [1]. Угол поворота ротора синхронного генератора считается за начало отсчета так называемого угла нагрузки синхронного двигателя. Электрические уравнения двух машин объединяются с помощью первого закона Кирхгофа, накладывающего связи на соответствующие фазные токи этих машин. Поскольку в безразмерную форму первого закона Кирхгофа входит отношение мощностей генератора и двигателя, то оно входит и в окончательную математическую модель изучаемой системы, которая представляет собой нелинейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений шестого порядка.

Далее исследуется статическая (локальная) устойчивость этой системы. Для соответствующей линеаризованной системы в окрестностях положений равновесия находится характеристическое уравнение, представляющее собой произведение одночлена на полином пятого порядка. Для нахождения условий устойчивости используется теорема Гурвица. Необходимое условие устойчивости по ней приводит к выводу, что оптимальным значением для коэффициента мощности является значение коэффициента электромагнитного рассеяния. Последнее же для изучаемых синхронных машин равно 0.19.

При найденном оптимальном коэффициенте мощности изучаются достаточные условия устойчивости системы и находятся условия, накладываемые на момент нагрузки на валу синхронного двигателя, при которых система не теряет устойчивости.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 05-08-65484-а.

Литература

[1] Родюков Ф.Ф. Математическая модель большой электроэнергетической системы. - СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2006. - 153 с.

Influence of the Power's Relations on the Stability of a System "Synchronous Generator – Synchronous Motor"

Rodyukov F.F.

Saint Petersburg State University, Russia

The correct mathematical model of the electropower system "synchronous generator — synchronous motor" is constructed. The conditions of its local stability are obtained.

ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ СТРУКТУРЫ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ КОРАБЛЯ

Рябков М.Е.

ЦНИИ им. акад. А.Н. Крылова, Санкт-Петербург, Россия

Процесс оптимизации ходовых и мореходных качеств судов проходит этап моделирования турбулентных и волновых возмущений нелинейных динамических систем. Проведение эксперимента регламентируется теоретическими методиками. Требования практики, современные средства эксперимента и методические разработки создали условия, позволяющие решать задачи нелинейной гидродинамики на качественно новом уровне.

Например, при исследовании качки моделей на регулярном волнении обнаружено, что нормированные коэффициенты ряда Фурье для перемещений зависят от амплитуды возмущения. Следовательно, альтернативы разложению по двум параметрам нет, и решение уравнения движения динамической системы при гармоническом возмущении необходимо искать в виде двойного ряда Фурье–Маклорена. РФМ обеспечивает заданную точность определения дисперсионно-частотных зависимостей, линейным приближением которых является традиционная амплитудно-частотная характеристика системы. Фиксированная начальная фаза возмущения соответствует в РФМ детерминированным траекториям движения системы. Флуктуация фазы вызывает хаос и, в соответствии с центральной предельной теоремой Ляпунова, переход к нормальному состоянию при полном разрушении когерентной структуры колебаний. Возможности РФМ при случайном возмущении не могут быть полностью реализованы в рамках линейных методов традиционного спектрального анализа бесконечно малых величин. Необходим переход к вероятностным методам, построенным на основе двумерных функций распределения конечных значений размахов и длин волн колебаний. «Огибающая», формализованная с помощью аналитического сигнала Габора и преобразования Гильберта, сохраняет фазовую информацию о степени разрушения организованных структур. Ответная реакция динамической системы на случайное возмущение получена с помощью формулы полной вероятности. Применение спектра «внешней структуры» дает возможность распространить обобщенную теорему Хинчина на нелинейные системы. Введение в анализ χ–распределения параметров нормального процесса дает предельный переход от спектра «внешней структуры» к χ–спектру. Совместный анализ трех спектров: Фурье, «внешней структуры» и нормального χ–спектра дает полное представление о текущей стадии перехода к предельному статистическому состоянию. Критерий числа степеней свободы в χ–распределении дает возможность выделения отдельных компонент из случайных процессов, имеющих сложную структуру. Степень нелинейности каждой компоненты определяется с помощью ζ–функции Римана, зависящей от числа степеней свободы колебаний. Применение χ–распределения решает основные проблемы турбулентности. Пограничный слой имеет двухслойную структуру начального возмущения потока волновыми системами с разным числом степеней свободы и две компоненты спектра в предельном статистическом состоянии. Обнаружена связь структуры обобщенного спектра морского волнения со спектром атмосферной турбулентности. Пример расчета качки судна сделан на основе уникальных данных, полученных И.П. Любомировым в опытовом бассейне ЦАГИ и в открытом водоёме. Результаты опыта, проведенного с самоходной крупномасштабной моделью в 1955г., представлены в виде корреляционных таблиц. Установлено, что учет когерентных структур в ветровом волнении имеет не меньшее значение, чем нелинейность характеристик динамической системы. В результате исследования комплексной проблемы «турбулентность — волнение — качка» разработана система методов, позволяющая решать основные задачи вероятностного анализа нелинейных колебаний.

Analysis of Structure Singularities of Nonlinear Oscillations in Some Problems of Ship Theory

Ryabkov M.E.

Krylov Central Scientific Research Institute, Saint Petersburg, Russia

Method of double Fourier-Maclourains series allows to find asymptotic solution of general non-linear differential equation of motion with a necessary degree of accuracy. A special feature of the solution is dependence of the power-frequent characteristics of a dynamic system on an initial phase of disturbance. Regular and completely determined system of non-linear waves converts into stationary random process through a mode of phase chaos. The power spectrum of a normal or Gaussian random process follows directly from chi-distribution for current peak-to-peak values of the vibrations. The two-dimensional distribution function of disturbance parameters is used into total probability formula generalizing Khintchine theorem to nonlinear dynamic systems. The calculation results are correlated with the experimental data.

О ДВИЖЕНИИ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ С НЕИДЕАЛЬНЫМИ СВЯЗЯМИ

Сидиков М.Н.

Национальный Университет Узбекистана, Ташкент

Рассматривается механическая система с условными (сервосвязями) связями, управление движением которой осуществляется реактивными силами, также определяется закон изменения массы системы, обеспечивающий реализацию условных связей, при этом возможные отклонения от сервосвязей не учитываются.

Общая теория движения систем с неидеальными связями применительно к задачам с трением, основанная П. Пенлеве [1], была использована в работах А.Г. Азизова [2] и Н.Г. Апыхтина [3] для составления уравнений движений некоторых управляемых механических систем. В отличие от [3], где законы изменения масс наперед известны, а все связи осуществляются реактивными силами и точно выполняются в течение всего времени движения, в работе А.Г. Азизова рассмотрен более общий случай, когда часть связей осуществляется реактивными силами, а законы изменения масс находятся из дифференциальных уравнений, присоединяемых к уравнениям движения системы. Однако в этих общих теориях связи первого рода считаются идеальными, а связи второго рода неидеальными.

Интересен более общий случай, когда часть связей первого рода являются неидеальными, а неидеальные связи второго рода реализуются реактивными силами и как в [2] находятся из дифференциальных уравнений, присоединяемых к уравнениям движения.

С помощью метода комбинирования связей получены уравнения движения управляемой механической системы в виде уравнений Аппеля с присоединением кинематических соотношений в силу наличия дифференциальных связей и уравнений для определения законов изменения масс.

В качестве примера рассмотрена задача Пенлеве с дополнением системы из двух материальных точек, соединенных между собой стержнем (одна из точек движется по горизонтальной шероховатой прямой), колечком переменной массы, движущимся по стержню.

Требуется определить закон движения колечка и изменение массы, чтобы вторая точка совершала колебательное движение вокруг первой с постоянной частотой.

Литература

[1] Пенлеве П. Лекции о трении. М.: Гостехиздат, 1954. 316 стр.
[2] Азизов А.Г. О движении одной управляемой системы переменной массы. -ПММ. 1986, т. 50, вып. 4, с. 567–572.
[3] Апыхтина Н.Г., Яковлев В.Ф. О движении динамически управляемых систем с переменными массами. -ПММ, 1980, т. 44, вып. 3, с. 427–433.

On the Motion of a Variable Mass Mechanical System with Non-Ideal Constraints

Sidikov M.N.

National University of Uzbekistan

Mechanical systems with conditional constraints are considered; motion control is realized by reactive forces; mass variation law is determined. Using the method of constraints combining, the motion equation of a controlled mechanical system is obtained in the form of Appel equations. Penleve problem is studied as an example.

ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЯ ИДЕАЛЬНОЙ СВЯЗИ ДЛЯ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Тверев К.К.

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

При составлении уравнений электромеханической системы применяется обобщение понятия идеальной связи, распространяющее закон сохранения энергии на неголономные и нестационарные связи. При этом реакция связи однозначно определяется уравнением связи и находится как минимально необходимая для выполнения связи совместно с законом сохранения энергии.

Для составления уравнений электроэнергетической системы применяется идеализация ряда потребителей с помощью идеальных связей [1]. Это позволяет сделать выводы об отрицательном дифференциальном сопротивлении и анализировать их влияние на устойчивость системы.

Дальнейшее обобщение понятия идеальной связи распространяет его на гибридные связи. Например, для составления уравнений электродвигателя без рассеяния применяются идеальные связи:

$$f_1 \equiv \Psi_{sA}\cos(\gamma) + \Psi_{sB}\sin(\gamma) - \Psi_{ra} = 0, \tag{1}$$

$$f_2 \equiv -\Psi_{sA}\sin(\gamma) + \Psi_{sB}\cos(\gamma) - \Psi_{rb} = 0.$$

Отметим, что в связи (1) наряду с координатой γ входят потокосцепления Ψ, служащие импульсами для электрических координат — зарядов и электрических скоростей — токов. Для таких связей реакции по разнородным переменным не обязаны быть одинаковыми. Различными способами (рассматривая виртуальную работу, используя закон сохранения энергии или записывая гамильтониан стесненной системы в виде $H = H_{free} - \lambda f$) можно показать, что в уравнения для скоростей должны войти слагаемые вида $-\lambda\frac{\partial f}{\partial p_j}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 05-08-65484-а.

Л и т е р а т у р а

[1] Тверев К.К. Экспериментальная идентификация некоторых параметров электроэнергетической системы. Четвертые Поляховские чтения: Избранные труды. СПб.: Изд-во "ВВМ 2006. с. 182-186.

Generalization of the Ideal Constraint Notion for Electromechanical Systems

Tverev K.K.

Saint Petersburg State University, Russia

The notion of the ideal constraint for nonholonomic and hybrid constructions is considered. The conditions of the electropower system stability and quality are obtained.

НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ДИНАМИКЕ КЕЛЬТСКОГО КАМНЯ

Товстик Т.П.

Институт Проблем Машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Россия

Задача о движении Кельтского камня — это классическая задача нелинейной динамики, имеющая более, чем столетнюю историю. Гладкое выпуклое твердое тело (Кельтский камень) на шероховатой горизонтальной плоскости совершает малые движения около устойчивого положения равновесия под действием силы тяжести. Главной и самой характерной особенностью движения Кельтского камня является его способность периодически менять направление своего вращения. В полной нелинейной постановке движение Кельтского камня описывается системой уравнений пятого порядка. В линейной постановке задача сводится к свободным колебаниям системы с двумя степенями свободы. Второе приближение описывает все характерные движения классического Кельтского камня. А.П. Маркеев (см. «Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью». Наука, 1992) предложил для описания такого движения использовать метод осреднения и представить движение как колебание с медленно меняющимися амплитудами и фазами. Система сведена к системе уравнений третьего порядка для амплитуд поперечных колебаний p и q и угловой скорости Ω_3 вращения вокруг вертикальной оси

$$\frac{dp}{dt} = -a\,v_1^2\,p\,\Omega_3, \quad \frac{dq}{dt} = -a\,v_2^2\,q\,\Omega_3, \quad \frac{d\Omega_3}{dt} = \frac{a}{A_{33}}(v_1^4\,p^2 - v_2^4\,q^2).$$

Траектория $L = \{p(t), q(t), \Omega_3(t)\}$ в фазовом пространстве располагается на поверхности трехосного эллипсоида и система имеет два интеграла с константами C_1, C_2:

$$v_1^2p^2 + v_2^2q^2 + A_{33}\Omega_3^2 = C_1 = const, \quad p^\chi q = C_2 = const, \quad \chi = (v_1/v_2)^2.$$

Путем введения безразмерных переменных получено уравнение, описывающее эволюцию угловой скорости Ω_3, содержащее только один параметр χ

$$\ddot{\Omega}_3 + 2\left(\chi(1-\Omega_3^2) + (1-\chi)\dot{\Omega}_3\right)\Omega_3 = 0, \quad \chi = (v_1/v_2)^2.$$

В настоящей работе исследуется эволюция траектории L при наличии малого трения

$$\frac{dp}{dt} = -a\,v_1^2\,p\,\Omega_3 - k_{air\,1}p - k_{roll}I_1(p,q),$$
$$\frac{dq}{dt} = a\,v_1^2\,q\,\Omega_3 - k_{air\,2}p - k_{roll}I_2(p,q),$$
$$\frac{d\Omega_3}{dt} = \frac{a}{A_{33}}(v_1^4\,p^2 - v_2^4\,q^2) - k_{air\,3}\Omega_3 - k_{rot}\frac{\Omega_3}{|\Omega_3|},$$

$$I_1 = \lim_{T_0\to\infty}\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}\frac{\dot\theta_1 + \alpha_1\dot\theta_2}{v_1a_1|\dot\theta|}\cos(v_1t+\beta_1)dt,$$
$$I_2 = \lim_{T_0\to\infty}\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}\frac{\dot\theta_2 + \alpha_2\dot\theta_1}{v_2a_2|\dot\theta|}\cos(v_2t+\beta_2)dt,$$

где k_{air} — коэффициенты вязкого трения о воздух, k_{rot} — коэффициент трения качения о плоскость, k_{roll} — коэффициент трения верчения.

Проводится сравнение аналитического и численного решений.

Nonlinear Equations on the Celt Stone Dynamics

Tovstik T.P.

Institute of Problems of Mechanical Engineering, RAS, Russia

The problem of the Celt stone motion is investigated. The convenient equations of its small motions with the exactness of the second order are delivered. From these equations the main Celt effects may be obtained. By the averaging method the equation describing the vertical projection of the angular velocity is delivered. In contrast to the classical works here we take into account the small friction couples. We study the effect of the roll friction, of the rotating friction, and of the viscous resistance of the air.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ И УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОСЛОЙНЫХ И МНОГОСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК

Трушин С.И.*, Миргородский А.В.**

**Московский государственный строительный университет, Россия*
***ОАО «Моспроект», Россия*

В работе построены исходные геометрические соотношения нелинейной теории оболочек с учетом деформаций поперечного сдвига и обжатия по толщине для тонких и средней толщины оболочечных конструкций. В качестве способа получения уравнений движения используется вариационный принцип Гамильтона-Остроградского.

Предложена методика решения задач о колебаниях и динамической устойчивости оболочечных конструкций в геометрически нелинейной постановке. Дискретизация функции Лагранжа осуществляется на основе вариационно-разностного подхода. Для решения системы нелинейных уравнений движения построен эффективный алгоритм, базирующийся на методах прямого интегрирования Ньюмарка и Вилсона в сочетании с методом Ньютона-Рафсона. Исследованы свободные колебания пластинки и цилиндрических панелей при больших амплитудах колебаний, а также напряженно-деформированное состояние замкнутой цилиндрической оболочки при воздействии ударной волны.

Решены задачи динамической устойчивости нелинейно деформируемых пологих сферических оболочек и проведено сопоставление результатов с решением нелинейной статической задачи. Для решения нелинейных задач теории пластин и оболочек, определения предельных и бифуркационных точек на кривой равновесных состояний и изучения поведения конструкций в закритической стадии разработаны эффективные схемы метода продолжения по параметру, основанные на процедурах Ньютона-Рафсона, Рунге-Кутта, самокорректирующейся схемы метода Рунге-Кутта. Использование длины дуги как параметра продолжения обеспечивает единый процесс прохождения регулярных, предельных и бифуркационных точек. Разработанные и апробированные численные процедуры использовались при решении задач устойчивости однослойных и многослойных сферических, цилиндрических и конических оболочек при одно- и многопараметрическом нагружениях.

Numerical Procedures for Nonlinear Dynamic and Stability Analysis of Isotropic and Orthotropic Laminated Shells

Trushin S.I.*, Mirgorodskii A.V.**

**Moscow State University of Civil Engineering, Russia*
***JSC "Mosproect Russia*

Numerical procedures for nonlinear analysis of vibration and dynamic buckling of shells are proposed. Computing models are based on the theory of moderately thick orthotropic shells. The finite difference energy method of discretization is used for reducing the initial continuum problem to finite dimensional problem. The Newmark method is used for integration of dynamic equations, in nonlinear analysis Newton-Raphson method is used for the correction of results. The theory of shells and numerical methods have been used for investigation of nonlinear dynamic behavior of plates and shallow cylindrical shells, dynamic buckling of spherical shells and dynamic behavior of cylindrical shell under action of shock wave.

О СТУКТУРЕ МНОЖЕСТВА УПРАВЛЕНИЯ ДИСКРЕТНОГО ВАРИАНТА РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ТЕПЛА В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОМ СТЕРЖНЕ

Тухтасинов М.

Национальный Университет Узбекистана

Данная работа посвящена изучению структуры множества управления в полубесконечном стержне и является продолжением исследований [1-3], в которых изучены задачи управления в ограниченных стержнях.

Данный полубесконечный стержень равномерно разбиваем точками x_i, изменение температуры в которых обозначим через $z_i(t)$, $t \geq 0$.

Тогда получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
&\dot{z}_1 = -\alpha z_1 + z_2 + f_1(t) \\
&\dot{z}_2 = z_1 - \alpha z_2 + z_3 + f_2(t) \qquad (1)\\
&\dot{z}_3 = z_2 - \alpha z_3 + z_4 + f_3(t) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&z_i(0) = z_i^0, \quad i = 1, 2, \ldots \qquad (2)
\end{aligned}$$

при условии, что на конце стержня поддерживается нулевая температура, α — константа, $f_i(t)$, $t \geq 0$ — заданные функции.

Определение. Функции $m_j(t)$, $t \geq 0$, $j = 1, \ldots, s$ называются реализуемыми для индексов (уравнений) $i_1, \ldots, i_s$ $(i_1 < \ldots < i_s)$ системы (1), если существует начальный вектор z^0 ((2)) такой, что для соответствующего решения $z_i(t)$, $t \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots$ системы (1) имеют место равенства

$$z_{i_j}(t) = m_j(t), \quad t \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, s. \qquad (3)$$

Через F_m обозначим множество начальных векторов z^0 ((2)), для которых имеют место равенства (3).

Далее, изучается структура множества управления F_m.

Теорема. Множество F_m состоит из одного элемента тогда и только тогда, когда

$$\text{НОД}(i_1, \ldots, i_s) = 1$$

Замечание. В неограниченных стержнях множество F_m не может содержать более одного элемента, принадлежащего пространству l_q $(q > 0)$.

Литература

[1] Авдонин С.А., Иванов С.В. Стартове и точечное управления колебаниями прямоугольной мембраны // Автоматика. Киев. 1990. № 6.

[2] Сатимов Н.Ю., Тухтасинов М. О стартовом управлении системами с сосредоточенными параметрами // Матем. заметки. 2004. Т.75. вып.5.

[3] Тухтасинов М. Об одной оптимизационной задаче стартового управления распространением тепла в стержне // Выч. техн. Новосиб. 2003. Т. 8. № 6.

About the Structure of Set Management of a Discrete Variant with Heat Distribution in the Half Infinite Cores

Tukhtasinov M.

National University of Uzbekistan

In the work problems, in a discrete variant, managements of inital distributions of heat in the infinite cores are considered. Easily checked necessary and sufficient conditions for one element sets of management are obtained.

РАЗВИТИЕ И ВОЗМОЖНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ КОНЦЕПЦИИ ОБОБЩЕННОГО ВРЕМЕНИ К МАТЕМАТИЧЕСКОМУ ОПИСАНИЮ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И ПОВРЕЖДАЕМОСТИ РЕОЛОГИЧЕСКИ СЛОЖНЫХ СРЕД

Федоровский Г.Д.

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

В настоящее время происходит постепенное возрастание интереса исследователей к использованию подходов с обобщенным временем для решения фундаментальных и прикладных проблем механики сплошных сред с нетривиальным поведением. Это вызвано, прежде всего, прогрессом принципиальных возможностей данного способа решения, потребностью существенного повышения качества (точности) решения и возникновением новых важных, неотложных задач. К таким задачам относятся, например, разработка технологий изготовления и прогнозирование работоспособности эксплуатируемых в экстремальных условиях новых суперсовременных изделий техники; а также остро назревшая сейчас необходимость анализа возможности продления срока службы эксплуатируемых дорогостоящих изделий, регламентируемый временной предел службы которых рассчитанный по старым методикам заканчивается. Как известно, концепция обобщенного времени основана на экспериментально установленных физико-химико-механо-временных аналогиях (температурно-, влажностно-, концентрационно-, полимеризационно-, радиационно-, частотно-, напряженно-, деформационно-временных и других гипотезах). Наиболее полно исследованы температурно-временные соответствия, некоторые из них стали классическими и имеют удобные для расчетов аналитические выражения: «простые» и «сложные». Другие соответствия, особенно механо-временные для нелинейных процессов, еще недостаточно изучены и для них до недавнего времени почти отсутствовали несложные аналитические зависимости на всем интервале аргументов, что осложняло их применение. Известны подходы, при которых нелинейность учитывается только преобразованием времени (введением «горизонтального» преобразования определяющих функций) и смешанного типа (когда вводится также и «вертикальное» преобразование). Второй подход приводит к неудобной эклектике описания. Рассмотрены «простые» и «сложные» масштабы времени, являющиеся функциями и функционалами. Ряд исследователей применили понятие обобщенного времени с общих позиций: с учетом законов термодинамики, коррелируя это время с энтропией и энергией. Имеются публикации, авторы которых описывают процессы старения или изменения свойств сред путем преобразования времени. В наших работах рассмотрены определяющие уравнения с линейной «памятью» сред и линейной или нелинейной «памятью» времени, с соответствующими иерархически зависимыми масштабами, а также — способы обращения уравнений. Выполнено аналитическое обобщение технических теорий нелинейной ползучести путем обобщения времени, позволяющее описывать ползучесть сред с упрочнением и разупрочнением. Сделано математическое описание вязкоупругих свойств и долговечностей ряда полимерных, металлических и других сред. Получены аналитические модели известных модификаций кинетической теории механической и электрической прочности (пробоя) с надбарьерным и подбарьерным (туннельным) температурным переходом. Разработаны варианты критериев достижения предела термотекучести и разрушения. Установлено, что в случае растяжения или сдвига можно вводить понятие инкубационного обобщенного времени разрушения. Показана высокая эффективность использования обобщенного времени для прогнозирования различных механических процессов и фазовых (структурных) переходов, в частности, для замораживаемых грунтов.

Development and Opportunities of Application of the Concept of Generalized Time to the Mathematical Description of Deformation and Damageability of Rheologically Complex Media

Fedorovsky G.D.

Saint Petersburg State University, Russia

Developments and achievements of approaches with generalized time to the description of a mechanical condition of nontrivial continuous media at various physical-chemical-mechanical actions are analyzed.

О ПРЕДЕЛЬНОМ ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ПО ВРЕМЕНИ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С НЕСТАЦИОНАРНЫМИ СВЯЗЯМИ

Филаткина Е.В.

Ульяновский государственный университет, Россия

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = F(t, x), \tag{1}$$

где $x \in R^n$, $F : R \times \Gamma \to R^n$ — непрерывное отображение, периодическое по $t \in R$, т.е. $F(t+T, x) = F(t, x)$, удовлетворяющее условию Липшица по x.

Решается задача о предельном поведении решений периодической по времени системы, для которой известны m первых интегралов и функция $V(t, x)$, убывающая на каждом решении системы (1).

Рассмотрим механическую систему с нестационарными связями, движение которой описывается дифференциальными уравнениями (1), где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in R^n$ с $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$, $F(t, x)$ — период. по t с периодом T, определенная в области $R \times \Gamma$, $\Gamma \subset R^n$.

Первым интегралом системы (1) является функция $U\colon R \times \Gamma \to R$, которая непрерывно дифференцируема и постоянна вдоль каждого решения системы (1).

$$U(t, x(t, t_0, x_0)) = c_0 = const, \ \ \forall t \geq t_0, \ \ \dot{U}(t, x) = \frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_i} X_i \equiv 0.$$

Для такой системы можно сформулировать следующую теорему:

Теорема. Предположим, что для системы (1) существует первый интеграл $U\colon R \times \Gamma \to R$ и функция $V\colon R \times \Gamma \to R$, такие что

1. $V(t, x)$ — определенно положительная на множестве $\{U(t, x) = 0\}$ и ее производная $\dot{V}(t, x) \leq 0$ $\forall (t, x) \in R \times \Gamma$
2. множество $\{U(t, x) = 0\} \cap \{\dot{V}(t, x) = 0\}$ не содержит решений системы (1) кроме $x = 0$.

Тогда:

1. $x = 0$ равномерно устойчиво и является равномерно притягивающим для $x = x(t, x_0, x)$, вдоль которого $U(t, x(t, x_0, x)) = c_0 = 0$.
2. каждое решение системы (1) вдоль которого $U(t, x(t, x_0, x)) = c_0 \neq 0$ неограниченно приближается к

максимально инвариантному подмножеству множества $\{U(t, x) = c_0\} \cap \{\dot{V}(t, x) = 0\}$ при $t \to +\infty$.

Теорема доказана с помощью теоремы Красовского и теоремы Ла-Саля о положительно предельном множестве.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 050100765.

Литература

[1] Барбашин Е.А., Красовский Н.Н. Об устойчивости движения в целом // Докл. АН СССР, 1952. Т.86, N 3. С. 53–546.
[2] Ла-Салль Ж., Лефшец С. Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. М.: Мир. 1964. 168с.
[3] Андреев А.С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономной системы // ПММ.- 1984. - Т. 48. - вып. 2. - С. 225–232.

On the Limit Behavior of Solutions of Nonstationary Periodic by the Time Mechanical System

Filatkina E.V.

Ulyanovsk State University, Russia

Periodic nonstationary mechanical system, described by the differential equations is considered. The problem on the limit behavior of solutions is solved using Lyapunov's function for periodic mechanical system, witch have m- first integrals. Theorem on the limited behavior of solutions is formulated and proved.

ИССЛЕДОВАНИЕ ИТЕРАЦИОННОЙ СХЕМЫ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ В ЗАДАЧЕ О ТЕЧЕНИИ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА В КАНАЛЕ

Халидов И.А., Шалагинов Е.А.

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

В работе исследуется проблема возникновения стохастичности в потоке однокомпонентного бесструктурного разреженного газа. При описании таких течений определяющую роль играют законы взаимодействия частиц с поверхностью, поток полностью определяется функцией V рассеяния атомов газа на поверхности. Если функция V описывается с помощью лучевой модели [1], [2], то движение отдельного атома сводится к итерационной схеме $x_{n+1} = f(x_n)$, $n = 0, 1, \ldots$, где $f(x)$ — нелинейная функция. Аналитический анализ и численные расчеты при $n > 8$ показали, что существуют переходные значения параметров модели, при которых наблюдается потеря устойчивости, и, как следствие, возникает каскад бифуркаций [1]. При этом резко меняются макрохарактеристики течения, что подтверждается численными расчетами. Нами исследуется более общая диффузно-лучевая модель, для которой часть атомов (1-σ) отражается от поверхности в соответствии с лучевой схемой, а часть (σ) диффузно. Диффузная добавка к лучевой модели ведет к рандомизации течения и, вообще говоря, принципиально меняет предельное поведение динамической системы, моделирующей многократное отражение атомов газа от стенок канала. Но численные расчеты показали, что при относительно малых значениях течение сохраняет свойство резко менять характеристики при тех же переходных значениях параметров функции V, что и для чисто лучевой модели. Найдены границы возможного изменения параметров, при которых указанный эффект имеет место.

Литература

[1] Мирошин Р. Н., Халидов И. А. Локальные методы в механике сплошных сред. Изд-во: С-Петербургского ун-та, 2002, 304 с.
[2] Баранцев Р.Г. Взаимодействие разреженных газов с обтекаемыми поверхностями. М.: Наука, 1975, 344 с.

Investigation of Iterative Analytical Model Arising in the Problem of Rarefied Gas Flow in a Channel

Khalidov I.A., Shalaginov E.A.

Saint Petersburg State University, Russia

The free-molecular motion of rarefied gas atoms in a channel is described by means of iterative analytical model. In the case of ray reflection of gas atoms from the walls (it means the velocity of reflected atoms having a single meaning depending on the incident velocity, i.e. scattering function being delta function) the analytical and asymptotical analysis has displayed the instability and the cascade of bifurcations. In more general case of ray-diffuse reflection from channel walls the computations have demonstrated the same effect by approximate parameter values.

О МЕТОДЕ ГАМИЛЬТОНА-ЯКОБИ ДЛЯ СИСТЕМ СО СВЯЗЯМИ

Ханукаев Ю.И.

Московский физико-технический институт (государственный университет), Россия

Включением времени и соответствующего импульса псевдоевклидова пространства в перечень гамильтоновых переменных механической системы с конечными связями достигается возможность построения стационарного полного интеграла соответствующего уравнения Гамильтона-Якоби

$$H = \frac{1}{2}(a^{ij}P_iP_j - a^{00}P_0P_0) + \varPi(Q) \to H\left(Q, \frac{\partial S}{\partial Q}\right) = 0.$$

Каноническое преобразование к новым переменным $Q, P \to \widetilde{Q}, \widetilde{P}$, порождаемое полным интегралом $S(Q, \widetilde{P})$, не нарушает стационарность по собственному времени τ уравнений связей $f_s(Q) \to f_s(\widetilde{Q}, \widetilde{P})$, что позволяет далее стационарным образом перейти к независимым переменным $\widetilde{q}$, $\widetilde{p}$:

$$\frac{d\widetilde{Q}}{d\tau} = \lambda_s\frac{\partial f_s}{\partial \widetilde{P}}, \quad \frac{d\widetilde{P}}{d\tau} = -\lambda_s\frac{\partial f_s}{\partial \widetilde{Q}} \quad \to \quad \frac{d\widetilde{q}}{d\tau} = 0, \quad \frac{d\widetilde{p}}{d\tau} = 0.$$

Единственная нестационарная связь $\dfrac{dQ_0}{d\tau} = \dfrac{d\widetilde{Q}_0}{d\tau} = \dfrac{d\widetilde{q}_0}{d\tau} = 1$ позволяет в полученном решении перейти от времени τ к координатному времени $Q_0 \equiv t$.

Например, система n притягивающихся друг к другу масс m_i эквивалентна системе $n(n-1)/2$ приведенных масс $\mu_{ij} = m_im_j/m$ движущихся в поле массы $m = \sum m_i$. Положение каждой приведенной массы определяется радиусом-вектором расстояния R_{ij} между массами m_i и m_j. Система подчинена связям $R_{ij} + R_{jk} + +R_{ki} = 0$. Переход к независимым переменным r_i, $\widetilde{p}_i$ в полном интеграле $\sum S_{ij}(R_{ij}, \widetilde{P}_{ij})$ дает полный интеграл исходной системы из n масс m_i.

Гамильтониан тяжелого несимметричного твердого тела можно представить как разность гамильтониана сферического маятника $H_\lambda(Q_\lambda, P_\lambda)$ и гамильтониана $H_\mu(Q_\mu, P_\mu)$ несимметричного твердого тела, у которого центр тяжести совмещен с неподвижной точкой. Эта система подчинена связям $Q_\lambda = Q_\mu$. Переход к независимым переменным q, $\widetilde{p}$ в полном интеграле $S_\lambda(Q_\lambda, \widetilde{P}_\lambda) - S_\mu(Q_\mu, \widetilde{P}_\mu)$ дает полный интеграл исходной системы.

Отметим, что полный интеграл для системы со связями в евклидовом пространстве содержит время, уравнения связей в новых переменных перестают быть стационарными и переход к независимым переменным порождает снова функцию Гамильтона, отличную от нуля. Таким образом, псевдоевклидовость пространства — принципиальна.

On the Hamilton-Jacobi Method for Constrained Systems

Khanukaev Yu.I.

Moscow Institute of Physics and Technology, Russia

Transition from initial (dependent) coordinates to the independent ones, not at the stage of drawing up the equations of dynamics, but in the full integral of the Hamilton-Jacobi equation is discussed.

СЛУЧАЙ ПОЛНОЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ В ДИНАМИКЕ ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА В НЕКОНСЕРВАТИВНОМ ПОЛЕ СИЛ

Шамолин М.В.

Институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Россия

В работе показано, что структура динамических уравнений плоскопараллельного и (трехмерного) пространственного движения свободного твердого тела на $so(2) \times R^2$ и $so(3) \times R^3$, соответственно, сохраняется при некоторых обобщениях на случай большей размерности. Настоящая работа посвящена изучению нелинейных систем дифференциальных уравнений, получающихся при таком обобщении. При этом полученные многомерные динамические системы описывают движение так называемого четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле сил сопротивления.

Предполагается, что односвязная четырехмерная область с границей, являющейся гладким трехмерным многообразием, движется в четырехмерном пространстве, заполненном средой, и что все их взаимодействие сосредоточено на той части поверхности (границы) тела, которая имеет форму трехмерного шара. При этом вектор угловой скорости движения такого тела — элемент алгебры $so(4) \times R^2$, а скорость центра масс — элемент R^4.

Если оператор инерции в декартовой системе $Dx_1x_2x_3x_4$, связанной с телом (ось x_1 направлена вдоль оси, проходящей через центр масс C тела и центр шара, а декартова система $Dx_2x_3x_4$ связана с данным трехмерным шаром), имеет диагональный вид $diag\{I_1, I_2, I_2, I_2\}$, $\Omega \in so(4)$ — матрица «угловой скорости» твердого тела, то динамическая часть уравнений движения имеет следующий вид [1,2]:

$$\Omega^\bullet \Lambda + \Lambda^\bullet \Omega + [\Omega, \Omega\Lambda + \Lambda\Omega] = M, \quad mw_C = F,$$

где $\Lambda = diag\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\}$, $\lambda_1 = (-I_1 + I_2 + I_3 + I_4)/2, \ldots, \lambda_4 = (I_1 + I_2 + I_3 - I_4)/2$, M — момент силы воздействия F среды, спроектированный на $so(4)$, $[\ldots]$ — коммутатор в $so(4)$, m — масса тела, w_C — ускорение центра масс.

Сила F определяется по аналогии с силой, используемой при моделировании воздействия сопротивляющейся среды на твердое тело в условиях струйного обтекания [2,3].

Литература

[1] Трофимов В. В., Фоменко А. Т. Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений. - М.: Изд-во "Факториал, 1995. - 448 с.

[2] Шамолин М. В. Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде // Доклады РАН. - 2000. - Т. 375. - № 3. - С. 343–346.

[3] Самсонов В. А., Шамолин М. В. К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. - 1989. - № 3. - С. 51–54.

The Case of Complete Integrability in 4D Rigid Body Dynamics at Nonconservative Field of Forces

Shamolin M.V.

Institute of Mechanics, Moscow State Lomonosov University, Russia

The present paper is devoted to development of qualitative methods in dynamics of a 4D-rigid body interacting with a resisting medium under the assumptions of quasi-stationarity. The given material is on the junction of the qualitative theory of the ordinary differential equations, dynamics a rigid body. In this investigation the properties of movement of a rigid body in medium under the assumptions of jet flow are used. The technique of a research of the flat and spatial model problem of a body motion in a resisting medium is constructed.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ДЛЯ МАЯТНИКОВЫХ ДВИЖЕНИЙ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА С ОДНОЙ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ

Швыгин А.Л.

Московский государственный университет приборостроения и информатики, Россия

В случае, когда центр тяжести расположен в одной из главных плоскостей эллипсоида инерции для неподвижной точки, тяжелое твердое тело с одной неподвижной точкой допускает маятниковые движения Млодзеевского [1], включающие в себя колебания и вращения. Маятниковые колебания являются наиболее общими симметричными периодическими движениями тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой [2, 3]. Наличие их тесно связано с проблемой неинтегрируемости и интегрируемости задачи, решение которой требует знания характеристических показателей [4].

Доказано [2], что маятниковые движения обязательно содержат четыре нулевых характеристических показателя, из которых два — простые, а два других образуют жорданову клетку; остальные — два ненулевые характеристические показателя имеют противоположные знаки.

В докладе излагаются результаты по вычислению характеристических показателей указанных движений в параметрическом пространстве задачи.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (06–01–00068) и программы НШ–6667. 2006.1

Литература

[1] Млодзеевский Б.К. О перманентных осях движений тяжелого твердого тела около неподвижной точки // Тр. отд. физ. наук о-ва любит. естеств., антропол. и этногр. М.: 1894. Т. 7. Вып. 1. С. 46–48.
[2] Тхай В.Н. О характеристических показателях симметричного периодического движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки // Механика твердого тела. - 2004. - Вып. 34. - С. 3–8.
[3] Тхай В.Н. Семейства симметричных периодических движений в задаче Эйлера. // ДАН - 2005. - Т. 401. - N.4 - С. 483–485.
[4] Тхай В.Н. Неинтегрируемость и интегрируемость в задачах механики // ДАН. 2006. Т.408. № 5. С. 621–624.

The Research of Characteristic Measures of Pendulum Motions of Heavy Rigid Body with One Fixed Point

Shvygin A.L.

Moscow State University of Instrument Engineering and Computer Science, Russia

The problem of motion of rigid body with one fixed point (Euler-Poisson problem) is under consider. In case when the fixed point is lie on a principal plane the equations of motions admit the particular solution which represents the pendulum motions (Mlodzeevsky solution). In terms of the theory of dynamical systems, these motions represents the solution which is symmetric with respect to the set of fixed points of reversible system. This fact allows us to research the characteristic measures of pendulum motions.

НЕБЕСНАЯ МЕХАНИКА
CELESTIAL MECHANICS

BIFURCATION ANALYSIS OF GRAVI-MAGNETIC INTERACTIONS FOR SPIN-ORBIT EVOLUTION OF EXTRA-SOLAR PLANETARY SYSTEMS

Gusev A.V., Kitiashvili I.

Kazan State University, Russia

The discovery of extra-solar planets, around the main sequence stars and around the pulsars, has attracted considerable interest to the cosmogonical problems connected with the formation and early evolution of planets. Now are discovered 200 exoplanets in 164 planetary systems about main sequence stars and 4 planets about pulsars PSR B1257+12 and PSR B1620-26. Among open planetary systems 18 are multiplanetary, into their structure are including 41 exoplanets and 3 brown dwarfs. Most of the proposed planets move around the stars of the main sequence with a spectral class F5 – K5, more than half of the know planets have a large eccentricity; the circle orbits have 19 planets; eccentricity $e > 0.3$ have of more than 68 companions; moreover a eight of these planets have an eccentricity of more than 0.5:16 CygB ($e = 0.67$), HD 89744 ($e = 0{,}7$), HD 80606 ($e = 0{,}927$).

Known, that the Sun and some planets of the Solar system have own magnetic field. The reason of formation coplanar planetary orbits and observable distribution of the moment of motion is the influence of electromagnetic forces at early stages of evolution of Solar system. Magnetization of the central body of planetary system is a necessary condition of formation of planets. We investigate not resonant rotation of the magnetized along an axis of symmetry a dynamically symmetrical exoplanet in a magnetic field of a star under action of the gravitational and magnetic moments, take into consideration also effects of evolution of orbit.

The process of planetary formation is significantly determined by the orbital-rotational characteristics of the planet. The equations describing the non-resonance rotation of magnetized along the symmetry axis of a dynamically symmetrical planet are investigated by qualitative analysis and bifurcation methods. Analysis of gravi-magnetic interaction has shown that a direct rotation of the planet may be passed into reverse rotation and vice versa for a rather broad range of the parameters. As result of the investigation the splitting of 3D parameter space over the area with a different topological structure is obtained and the gallery of more than 20 phase portraits is constructed. Structure of phase portraits and their evolution are described by the following properties: 1. exists two or four states of equilibrium (ES) depending on a ratio of parameters; 2. in result of confluence of two centers and saddle located between them appear a topological saddle or a center; 3. in during of migration or bifurcation of ES, one of equilibrium states is constant.

In gallery of phase portraits exists two basic types of bifurcations: 1) formation of a topologically complex saddle in result of mixing of two centers and a simple saddle; 2) transition from a complex saddle of ES to the center. If gravitational perturbations are dominant, then on the phase sphere exist three areas: 1. area of reverse rotation of exoplanet; 2. area of direct rotation with an opportunity the realization of regime with periodic change of direct rotation of a planet to reverse rotation; and 3. area libration motion of a vector of kinetic momentum with periodic change of direct rotation to reverse motion. When magnetic field is absent, the trace structure illustrates a precession of the vector of kinetic moment of a planet around the normal to the orbital plane. Phase portraits demonstrate behaviour of the vector of kinetic moment of a planet in dependence on the all possible values of parameters planetary systems.

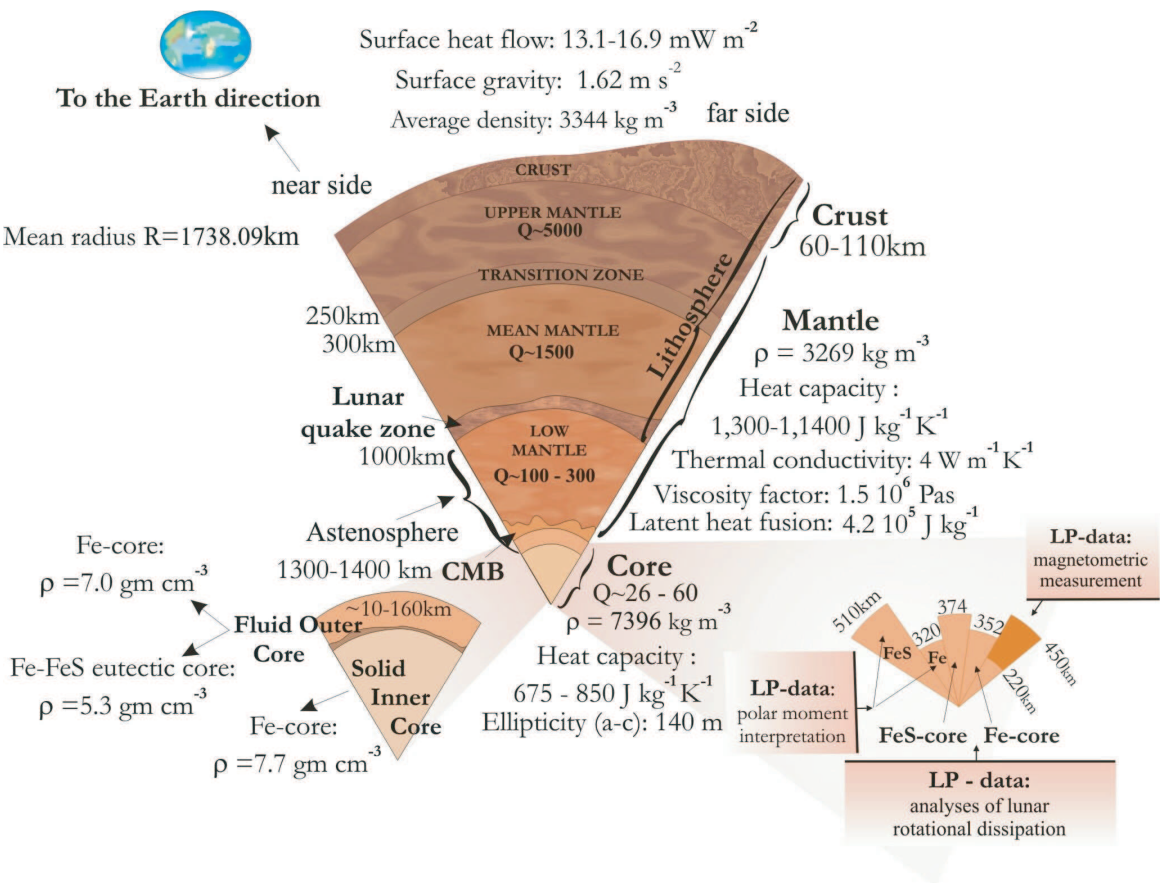
These portraits illustrate all possible spin-orbit evolution scenarios of extra-solar planetary systems.

THE MOON: SCIENTIFIC ACHIEVEMENTS, FUNDAMENTAL PROBLEMS, INTERNATIONAL PERSPECTIVES

Gusev A.V., Petrova N.K.

Kazan State University, Russia,
Invited Professor of NAOJ, Japan

In the report it is supposed: 1) to give the modern review of theoretical researches in spin — orbital movement of the Earth — Moon system; free and forced physical librations the multilayered Moon; 2) to discuss a role of resonant effects at dissipation of internal energy in a lunar core and a mantle due to solar — terrestrial tidal interaction, 3) to describe an internal structure of the three-layer Moon: internal rigid Fe core, external FeS a liquid core; the viscoelastic mantle on the basis of the modern seismic, satellite and laser data, 4) to present and discuss the basic problems in geophysics and celestial mechanics of the Moon, 5) to depict lunar programs of leading space powers: "SMART-1" (ESA, 2003-2006), "SELENE" (JAXA, August 2007), "Chandrayaan" (CNRO, 2007), "CHANG'E-I" (CNSA, 2007), "LRO" (NASA, October 2008), "Luna Glob "The Moon — 2012+" (Russia, 2012), paid special attention to the lunar program "SELENE" (Japan): "RISE" (2007), "ILOM" (2012) projects.



References

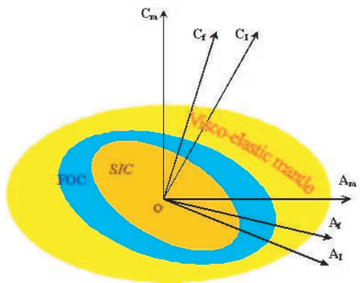
[1] Yu. Barkin, A. Gusev, N. Petrova, 2006, "The study of the spin-orbit and inner dynamics of the Moon: Lunar mission applications Advances in Space Research, v. 37, p. 72–79

FREE LIBRATION PERIODS IN ROTATION OF THE EARTH-LIKE PLANETS

Gusev A.V., Petrova N.K.

Kazan State University, Russia

For a planet with a solid inner core (SIC) and a fluid outer core (FOC), there *are four rotational normal modes*. This numbers is reduced to two for a planet without inner core, and to one for a planet without liquid core (Getino, Ferrandiz, 1999; Ferrandiz, Barkin, 2001; Defraigne et al., 2003). For a planetary model with three homogeneous ellipsoidal layers the Hamiltonian analytical method for the calculation of the rotation variations



gives magnitudes of these normal mode frequencies: they may be derived from governing equations, they depend on a presence and on dimension of the inner core within the outer core, of their dynamical flattening. All types of modes are result of non-coincidence of inertia axes of mantle (A_m), outer (A_f) and inner core (A_I). The total moment of inertia of a planet A= A_m+A_f+A_I. Modeling of free rotation of the earth-like planet was carried out in the frame of a two-layer model — fluid core and elastic mantle. Periods of Chandler Wobble (CW), Free core nutation (FCN) were estimated for the Moon, Mercury, Venus, Earth and Mars. Dependence of the core's parameters — density, radius and ellipticity was modeled using VBA-applications. The main formulae were obtained in the Hamiltonian approach developed by Getino (1995) to the two/three-layer Earth. The numerical values of the free libration's parameters, which are calculated to the present time for many Earth-like planets, are presented in the Table. For the first time we have estimated not only parameters of the three-layer Moon but the FCN-period for the two-layer model of the Mercury and the Venus too, taking into account the resonance 3:2 for the Mercury. Our values of P_{CW} and P_{FCN} are in accordance with the results of other authors.

Planet	$\frac{A}{A_m}$	Ω 1 rev. per planetary day	Free librations periods		References
Earth	1.12	$\frac{1}{24h}$	P_{CW}	433 d	Lambert, 2006; Herring et al. 2002; Getino et al., 1997- 2001; Ferrandiz, Barkin, 2000.
			P_{FCN}	430.23d	
			P_{FICN}	445–737 d	
			P_{ICW}	896 – 5764 d	
Mars	1.02 - 1.08	$\frac{1}{23h}$	P_{CW}	190 –208 d	Van Hoolst et al, 2000; Dehant et al., 2003 Defraigne et al., 2003
			P_{FCN}	230–280 d	
			P_{FICN}	360 –680 d	
			P_{ICW}	440 – 1150 d	
Moon	1.000065	$\frac{1}{27d}$	P_{CW}	74-75 yr	Eckardt, 1981;Williams, 2001
			P_{FCN}	144 – 186 yr	Petrova, Gusev,1999, Barkin, 2004
			P_{FICN}	515 – 634 yr	Gusev, Petrova, 2004-2005
			P_{ICW}	100 – 108 yr	
Mercury	1.68	$\frac{1}{59d}$	P_{CW}	562 – 1033 yr	Peale, 2005
				964yr	Rambaux, Bois, 2004;
				1013-1017 yr 501 – 571	Barkin, 2004; Gusev, Petrova, 2005 –2006
			P_{FCN}	472–538 yr	
Venus	1.084	$\frac{1}{243d}$	P_{CW}	45638–47245 yr	Gusev, Petrova, 2005-2006
			P_{FCN}	44284–45843 yr	

References

[1] Barkin, Yu., Gusev, A., Petrova, N., 2006, Advance in Space Research ., v. 37, p. 72–79.

INTERNATIONAL CENTER OF SCIENCE, EDUCATION AND INTERNET TECHNOLOGY "KAZAN – GEONA – 2010"

Gusev A.V.

Kazan University, Russia

For the further successful development of scientific-educational and innovative-technological activity of the Russian Federation, the Republic Tatarstan, Kazan is offered the national project — the International Center of the Science and the Internet of Technologies **"GeoNa"** (**Geo**metry of **Na**ture — **"GeoNa"** is developed wisdom, enthusiasm, pride, grandeur), which including: original designs building "GeoNa" — "Lobachevsky's surface" , 59 floors, height 215 m (with a spike 302 m), the general area in 148,000 sq. meters, a modern complex of conference halls (up to 4 thousand seats), center the Internet of Technologies, Computer center, 3D Planetarium, training complex "PhysicsLand", active museum of natural sciences, cognitive system "Spheres of Knowledge" , oceanarium with a fresh-water segment (5 million liters), botanical and landscape oases, business-hotel, where will be hosted conferences, the congresses, fundamental scientific researches, educational activities at a world organizational level.

In activity of center **"GeoNa"** is planned: the organization of scientific — economic forums, scientific thematic schools, lectures for schoolboys, students and post-graduate students, cycles of popular scientific public lectures, presentation of the international scientific and innovative programs, modern scientific databases, exhibition of Hi-tech equipment, training programs, technologies of remote education.

Congress center "GeoNa": Complex of buildings (the right coast of Kazanka river, opposite of Kazan Kremlin) includes an original design building "GeoNa" with a complex of the specially equipped conference halls: 4000 seats — 1 hall, 1000 seats — 1 hall, 500 seats — 2 hall, 250 seats — 3 halls, 120 seats — 4 halls, 60 seats — 6 audiences, 30 seats — 10 audiences.

Computer center "GeoNa" and Center the Internet of Technologies: Modern GRID-system include separate computers, clusters, local networks, supercomputers, data dases, the communications, software packages: 40-Gb liaison channels, processor capacity 200 Teraflops (2 1014 operations in a second), volume of disk — memory hundreds of PetaB (1017 bytes), inclusion in global computer infrastructure GRID — EGEE (Europe).

PhysicsLand: Cognitively — training complex for children, schoolboys, students, adult, based on modern achievements of science and technology and their three-dimensional visual and sensual perception. The complex will contain more than 100 simulators and 200 demonstration automated platforms: Flight on the Moon and Mars, Falling in Black hole, Birth of the Universe.

Active Museum of Natural Sciences: Three-dimensional material and visual giants of an extreme antiquity full-scale realize the classical concept of a museum of antiquities on a modern scientific and technical basis, but with a real opportunity touch to great opening of the History of Natural Sciences and to construct by hands a History of the ancient Earth.

Human, Technologies, Machines: The museum gives the general representation about techniques, technologies and inventions as about practical application of a science for satisfaction of daily needs of the people. On expositions of a museum it will be submitted more than 5000 exhibits: working models and stands of modern technologies, multifunctional robots, 3D visualization of the most complicated dynamic processes in the nature, a science, technique, the industries, in a society.

Contact: http://www.geona.ksu.ru

References

[1] Gusev A., Kitiashvili I., 2006. Russian Scientific-Educational Project: "GeoNa leaflet, July 2006, KSU publishing Co., 1000 copies., pp. 1–4.

[2] Gusev A., Petrova N., Kitiashvili I., 2006, The Moon in the Russian Scientific-Educational Project: "KAZAN-GEONA-2010 Proc. of 36th SA COSPAR, 16-23 July, 2006, Beijing, p.1.

[3] Gusev A., Kutuev T, Rubtsov V., 2006, International Center of Science and Education "Kazan – GeoNa – 2010 "Actual problems of aviation and aerospace systems: processes, models, experiment v. 2(22), p.116–121.

ЭФФЕКТИВНОСТЬ МЕТОДА АДАМСА-МУЛТОНА ПРИ МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ДВИЖЕНИЯ МАЛЫХ ТЕЛ СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ

Абрамов В.В.

Самарский государственный технический университет, Россия

В данной работе было проведено исследование эффективности многошагового метода Адамса-Мултона при решении уравнений движения малых тел Солнечной системы с учётом релятивистских эффектов. Поскольку метод является неявным, на каждом шаге численного интегрирования необходимо решать нелинейное уравнение, например, с помощью предикторно-корректорного метода:

$$
\begin{aligned}
P:&\quad y_{n+1}^{(0)} = y_n + h\sum_{i=0}^{k} B_i f(x_{n-i}, y_{n-i}),\\
E:&\quad f_{n+1}^{(1)} = f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(0)}),\\
C:&\quad y_{n+1}^{(1)} = y_n + hM_0 f_{n+1}^{(1)} + h\sum_{i=1}^{k} M_i f(x_{n+1-i}, y_{n+1-i}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
E:&\quad f_{n+1}^{(\nu)} = f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(\nu-1)}),\\
C:&\quad y_{n+1}^{(\nu)} = y_n + hM_0 f_{n+1}^{(\nu)} + h\sum_{i=1}^{k} M_i f(x_{n+1-i}, y_{n+1-i}) = y_{n+1},\\
E:&\quad f_{n+1} = f(x_{n+1}, y_{n+1}),
\end{aligned}
$$

Здесь в качестве начального приближения используется значение, полученное методом Адамса-Бэшфорта.

Многошаговые методы не являются самостартующимися, но существуют несколько способов закладки начальных значений для запуска алгоритма. Можно вначале использовать тот же многошаговый метод, но меньшего порядка точности. Однако при исследовании эволюции орбит малых тел Солнечной системы с помощью метода Адамса-Мултона предпочтительнее оказалась закладка стартовых значений с помощью одношаговых методов высоких порядков аппроксимации, например метода Эверхарта.

Метод Адамса-Мултона 11-го порядка наиболее эффективен при отсутствии тесных сближений небесных тел друг с другом. Результаты вычислений с шагом 0,25 дня практически совпадают с результатами, полученными модифицированным методом Эверхарта 27-го порядка, которые в свою очередь согласованы с базой данных DE 405. Вычисленные отклонения в положениях небесных тел находятся в пределах точности оптических наблюдений. При этом процесс численного интегрирования происходит приблизительно в 4 раза быстрее, чем с помощью метода Эверхарта с шагом 1 день.

При наличии тесных сближений приемлемые результаты могут быть получены только при достаточно сильном уменьшении шага интегрирования в методе Адамса-Мултона и увеличении порядка аппроксимации до 16-го, что вновь требует закладки таблицы интегрирования. Однако кратковременность таких моментов не приводит к значительному увеличению общего времени вычислительного процесса.

Работа выполнена при финансовой поддержке Федерального агентства по образованию (проект РНП. 2.1.1.1689).

Efficiency of Adams-Moulton Method in Mathematical Modelling of the Motion of Small Bodies of Solar System

Abramov V.V.

Samara State Technical University, Russia

In this research, Adams-Moulton multistep method efficiency was investigated by carrying out the numerical integration of differential equations of the motion of small bodies of Solar system, considering influence of relativistic effects.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ СИСТЕМЫ СВЯЗАННЫХ ТЕЛ, СОДЕРЖАЩИХ ВРАЩАЮЩИЕСЯ РОТОРЫ, В ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ

Амелькин Н.И.

Московский физико-технический институт, Россия

Рассматривается система, состоящая из несущего твердого тела и установленных на цилиндрических шарнирах несомых тел, которые, в свою очередь, содержат роторы с постоянными скоростями собственного вращения. Предполагается, что в осях шарниров могут действовать только потенциальные и диссипативные силы, и в рамках ограниченной задачи исследуются стационарные движения системы в центральном гравитационном поле (положения равновесия относительно орбитального базиса).

Для общего случая, когда несомые тела не обладают ни статической, ни динамической уравновешенностью относительно осей их подвесов, определена в явном виде вспомогательная функция V (обобщенная энергия), не возрастающая на движениях системы. Показано, что в фазовом пространстве системы стационарным движениям соответствуют стационарные точки функции V, а в пространстве обобщенных координат — стационарные точки измененной потенциальной энергии W, зависящей от ориентации несущего тела и углов поворота несомых тел.

Получены в явном виде алгебраические уравнения, определяющие все множество стационарных движений системы. Анализ устойчивости этих движений сводится к исследованию характера стационарности функции W. Достаточным условиям устойчивости по всем фазовым переменным удовлетворяют точки строгого локального минимума функции W.

Проведен анализ равновесных конфигураций системы для случая, когда несомые тела не содержат вращающихся роторов, а в осях шарниров отсутствуют потенциальные силы. Показано, что этим конфигурациям соответствуют стационарные точки 6-ти функций, являющихся линейными комбинациями с целочисленными коэффициентами главных центральных моментов инерции. При этом устойчивым конфигурациям соответствуют точки строгого минимума функции $w = -2A - B + 2C$, где $A > B > C$ — зависящие от углов поворота несомых тел главные центральные моменты инерции системы, расположенные в порядке убывания. Для плоской системы тел устойчивым конфигурациям соответствуют точки строгого максимума среднего момента инерции.

Исследованы положения относительного равновесия спутника-гиростата, содержащего один двухстепенной силовой гироскоп, для случая, когда ось рамки гироскопа установлена параллельно одной из главных центральных осей инерции спутника, и в этой оси могут действовать только моменты диссипативных сил. Найдены все положения равновесия системы в зависимости от величины кинетического момента ротора. Установлено, что минимальное число положений равновесия равно 32, а в некоторых диапазонах значений кинетического момента ротора может достигать 80. Определены также все положения, удовлетворяющие достаточным условиям устойчивости. Их число в зависимости от параметров системы равно либо 4, либо 8.

Работа выполнена при финансовой поддержке Аналитической целевой программы Рособразования «Развитие научного потенциала высшей школы (2006-2008)», проект № 6827.

Stability of Stationary Motion of a Body-Linked System, Containing Rotors, in a Central Gravitational Field

Amelkin N.I.

Moscow physical-technical institute, Russia

Stability of equilibrium of a satellite, containing passive two-degree of freedom power gyroscopes, is considered. The solution of a problem for the satellite with a single gyroscope, which axis of precession is parallel with a major axis of inertia, is given.

ИНЕРЦИОННОЕ ВЫСОКОТОЧНОЕ УПРАВЛЕНИЕ СПУТНИКОМ НАБЛЮДЕНИЯ ПРИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Афанасьев В.А., Дегтярев Г.Л., Мещанов А.С., Сиразетдинов Т.К.

Казанский государственный технический университет им. А.Н. Туполева, Россия

Рассматриваются уравнения углового движения спутника наблюдения (СН) с учетом инерционности управляющего приводного электромагнитного устройства (ЭМУ):

$$\dot{x} = (f_0(x) + \Delta f(x,t)) + (B_0 + \Delta B(t))u + (D_0(x) + \Delta D(x,t)(F_0(\varphi,\vartheta) + \Delta F(t)), \quad (1)$$

где $x = (x_1,\ldots,x_9)^T = (\varphi,\omega_\varphi,\psi,\omega_\psi,\vartheta,\omega_\vartheta,m_{э1},m_{э2},m_{э3})^T$ и первые шесть координат являются углами Эйлера и их производными, а три последних инерционными управляющими моментами от ЭМУ, u — векторное трехмерное управление (напряжения, подаваемые на инерционные катушки по трем осям связанной системы координат), Δf, ΔB, ΔD и ΔF — параметрические (разброс моментов инерции, постоянных времени и коэффициентов передач) и трехмерные внешние неопределенные (символ «Δ») ограниченные возмущения (световое и аэродинамическое давление, собственный магнитный момент СН), $F_0(\varphi,\vartheta)$ — номинальная (символ «0») гравитационная составляющая.

Задача. Найти управление u, приводящее СН с требуемой точностью, за требуемое время и с нулевым перерегулированием в заданное конечное состояние $(\varphi(t_k),\omega_\varphi(t_k),\psi(t_k),\omega_\psi(t_k),\vartheta(t_k),\omega_\vartheta(t_k))^T$ с нулевыми конечными скоростями и ускорениями и с нулевыми установившимися отклонениями по углам $\Delta\varphi(\infty) = \varphi(\infty) - \varphi(t_k) = 0$, $\Delta\psi(\infty) = \psi(\infty) - \psi(t_k) = 0$, $\Delta\vartheta(\infty) = \vartheta(\infty) - \vartheta(t_k) = 0$.

Метод решения данной задачи основан на применении разрывного управления на скользящих режимах. Так как условия их инвариантности к перечисленным возмущениям в системе (1) не выполняются, то предлагается ее эквивалентное преобразование в координаты вектора $y = (y_1,\ldots,y_9)^T = (\varphi,\omega_\varphi,z_\varphi,\psi,\omega_\psi,z_\psi,\vartheta,\omega_\vartheta,z_\vartheta)^T$, в которых система (1) преобразуется к трем подсистемам формы Фробениуса с нелинейностями, управлениями и возмущениями в третьем, шестом и девятом уравнениях:

$$\dot{y} = (\Phi_0(y) + \Delta\Phi(y,h)) + H_0(\varphi,\vartheta)u + (P_0(\varphi,\omega_\varphi,\vartheta,\omega_\vartheta)\Delta F(t) + R_0(\varphi,\vartheta)\Delta\dot{F}(t) + \dot{\bar{h}}(x,t,u)), \quad (2)$$

где ненулевые элементы в $\dot{\bar{h}}(x,t,u)$ являются производными ненулевых элементов вектора неопределенных возмущений $h(x,t,u) = \Delta f(x,t) + \Delta B(t)u + \Delta D(x,t)(F_0(\varphi,\vartheta) + \Delta F(t))$ в (1).

Показано, что в скольжении на трехмерном многообразии пересечения трех гиперплоскостей $S(s=(s_1,s_2,s_3)^T = C\Delta y = 0)$, $s_i = C_i\Delta y$, $i=\overline{1,3}$, где $\Delta y = y - y(t_k)$, $y(t_k) = (\varphi(t_k),0,0,\psi(t_k),0,0,\vartheta(t_k),0,0)^T$, $C_1 = (c_\varphi,c_{\omega_\varphi},c_{z_\varphi},0,0,0,0,0,0)$, $C_2 = (0,0,0,c_\psi,c_{\omega_\psi},c_{z_\psi},0,0,0)$, $C_3 = (0,0,0,0,0,0,c_\vartheta,c_{\omega_\vartheta},c_{z_\vartheta})$ выполняются условия инвариантности и взаимной селективной инвариантности трех групп координат вектора y, в результате чего система уравнений скользящего режима окончательно принимает вид трех независимых подсистем второго порядка:

$$\begin{aligned}
&\dot{\varphi} = \omega_\varphi, \;\; \dot{\omega}_\varphi = z_\varphi = -c_\varphi\varphi - c_{\omega_\varphi}\omega_\varphi + c_\varphi\varphi_k;\\
&\dot{\psi} = \omega_\psi, \;\; \dot{\omega}_\psi = z_\psi = -c_\psi\psi - c_{\omega_\psi}\omega_\psi + c_\psi\psi_k;\\
&\dot{\vartheta} = \omega_\vartheta, \;\; \dot{\omega}_\vartheta = z_\vartheta = -c_\vartheta\vartheta - c_{\omega_\vartheta}\omega_\vartheta + c_\vartheta\vartheta_k.
\end{aligned}$$

Получены методы нахождения коэффициентов матрицы C по заданному качеству скользящего режима и разрывного управления, приводящего систему в скольжение за требуемое время. Для снижения значений управлений при сравнительно больших значениях приведенной (суммарной) неопределенности в системе (2) предлагается метод ее идентификации с переходом к построению разрывного управления в номинальной системе.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (06-01-00806).

Inertial High-Precision Control of an Observation Satellite under Uncertainty

Afanasyev V.A., Degtyarev G.L., Meshchanov A.S., Sirazetdinov T.K.

Kazan State Technical University named after A.N. Tupolev, Russia

A system of differential equations is considered that presents angular motion of an observation satellite (OS) with a driving electromagnetic device (ED) and without any control engine in the flywheel. We have taken into account the ED response time and calculated uncertain limited external and parametric disturbances constantly affecting the OS control system (CS). A problem has been resolved how to construct a vector discontinuous control that drives the OS CS in the sliding mode that is invariant to disturbances affecting angles and their first and second derivatives. Some quality performances are ensured which are required under the OS control, orientation and stabilization conditions with zero overshooting and a steady-state error. A method is proposed to identify uncertain disturbances in order to decrease energy consumption demanded for controlling in the ED.

АНАЛИЗ МЕТОДОВ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВОЗМУЩЁННЫХ ОРБИТ ДВОЙНЫХ ЗВЁЗД ПО ПОЗИЦИОННЫМ НАБЛЮДЕНИЯМ

Байдин А.Э.

Ярославский государственный педагогический университет им. К.Д. Ушинского, Россия

В работе ведётся исследование кинематики визуально-двойных звёзд. Были запрограммированы три метода определения орбит звёзд по позиционным наблюдениям (ρ и θ) и моментам времени. Использовались данные четвёртого интерферометрического каталога. Для сравнения качества результатов брались элементы орбиты, определённые другими авторами, из шестого каталога орбит Харткопфа и Мэйсона. Разработаны методы определения вековых возмущений периастра, линии узлов и периодических возмущений большой полуоси орбиты. Используя периодические возмущения, были оценены параметры предполагаемых невидимых тел в двойных системах.

Методы определения орбит, применяемые в исследованиях:

1. Геометрический метод. Использует уравнение кривой второго порядка, после применения метода наименьших квадратов даёт систему линейных уравнений. Уравнения не содержат моментов времени, которые определяются гораздо точней. Метод обрабатывает дуги любой длины эллиптического и гиперболического движения, исключая два случая с эксцентриситетами (точно равными)$e = 0$ и $e = 1$. Для современных интерферометрических наблюдений метод даёт удовлетворительные результаты. Например, для орбиты HR 1331 (51 Tau), впервые разрешённой Макалистером в 1975 г., определённой геометрическим методом, получены среднеквадратичные отклонения $\sigma_\theta = 3^\circ.37$ и $\sigma_\rho = 6''.36 \times 10^{-3}$. По элементам орбиты шестого каталога орбит определено $\sigma_\theta = 2^\circ.40$ и $\sigma_\rho = 6''.38 \times 10^{-3}$.

2. Кинематический метод, использующий закон площадей. Разделение в этом случае применяется только для определения большой полуоси и придания одинакового веса наблюдениям (ошибки в определении θ, когда разделения отличны, не являются равнозначными для закона площадей, поэтому если не выровнять вес наблюдений, элементы орбиты не дадут минимально возможное среднеквадратичное отклонение σ_θ). Метод работает на дугах более полуоборота, обрабатывает эллиптические и гиперболические орбиты, исключая $e = 0$ и $e \approx 1$. Элементы орбиты, определённые этим методом, не уступают в точности элементам, представленным в шестом каталоге орбит. Например, для ADS 17175 $\sigma_\theta = 1^\circ.99$ и $\sigma_\rho = 2''.98 \times 10^{-2}$, а для элементов орбиты шестого каталога $\sigma_\theta = 3^\circ.09$ и $\sigma_\rho = 2''.95 \times 10^{-2}$.

3. Кинематический метод, использующий уравнение Кеплера. В этом случае разработаны методы, определяющие возмущенные орбиты: а) с учётом движения периастра (ω'); б) с учётом движения периастра и линии узлов (ω' и Ω'). Метод работает на дугах более оборота (применим только для эллиптических орбит), не уступает в точности элементам шестого каталога. В результате численных экспериментов с эталонными орбитами было показано, что при наличии ошибок $\pm 2^\circ$ в определении позиционных углов (θ) движения периастра и линии узлов определяются с погрешностью менее $\pm 0.01^\circ/\textit{год}$. Исследования, проведённые на реальных орбитах ADS 490, 3064, 3475, 10786 и HR 1331, показали: 1) Вековые возмущения двойных звёзд имеют порядок $\sim 0.01^\circ/\textit{год}$; 2) Движение периастра и линии узлов может иметь произвольное направление, и не зависит от направления орбитального движения звезды; 3) Из примерного равенства движения периастра, определённого методом (а), и суммы движения периастра и линии узлов, определённых методом (б), следует реальность движения, отличного от орбитального, поворачивающего с угловыми скоростями $\sim 0.01^\circ/\textit{год}$ орбиты двойных звёзд.

Analysis of Methods of Determination of Perturbed Orbits of Double Stars Based on Positional Observations

Baidin A.E.

Yaroslavl state pedagogical university n. K.D. Ushinsky, Russia

In the present work, investigation of methods of calculation of visual-double stars orbits are presented. Three methods of determination of star orbits on positional measurements ρ, θ and to the moments of observations are considered. The data of the fourth interferometric the catalogue are used. For comparison of results the orbital elements determined by other authors, from the sixth catalogue of orbits Hartkopf and Mason, are used. Methods of determination of secular perturbations of periastron, ascending node and periodic perturbations of semimajor axis orbits are developed.

КВАЗИСЛУЧАЙНЫЕ ДВИЖЕНИЯ В ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ И ТРАЕКТОРИЯ АСТЕРОИДА 99942 APOPHIS

Башаков А.А., Питьев Н.П., Соколов Л.Л.

Астрономический институт им. В.В. Соболева СПбГУ, Россия

Астероид Apophis обратил на себя внимание сразу после открытия в 2004 году возможностью катастрофического соударения с Землей в апреле 2029 года. На сегодня установлено, что в апреле 2029 года будет иметь место сближение на расстояние 36-37 тысяч км., а не соударение. Однако возможно соударение (или тесное сближение) уже в апреле 2036 года. Размеры астероида составляют несколько сотен метров, поэтому допустить это маловероятное событие нельзя и Apophis остается одним из самых опасных АСЗ.

Рассматриваются различные сценарии динамической эволюции Apophis в рамках сегодняшней точности знания его орбиты. Рассеяние при сближении 2029 года ведет к заметной потере точности, а возможное сближение в 2036 году может привести Apophis в область недетерминированного движения. Для нахождения опасных траекторий, ведущих к тесным сближениям и соударениям с Землей, используется аппарат квазислучайных движений, разработанный В.М. Алексеевым. Для построения промежуточных квазислучайных движений применяется метод точечных гравитационных сфер. С использованием полученных аналитически промежуточных движений были численно построены траектории тесных сближений и соударений астероида с Землей в 2037, 2038, 2039, 2040 годах. Применялся интегратор Эверхарта и современные модели Солнечной системы DE403, DE405.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (грант 05-02-17408) и Ведущей Научной Школы (грант НШ-4929.2006.2).

Quasirandom Motions in the Restricted Three-Body Problem and Asteroid 99942 Apophis Trajectory

Bashakov A.A., Pitjev N.P., Sokolov L.L.

Sobolev Astronomical Institute, SPbGU, Russia

Asteroid Apophis attracted attention immediately after its opening in 2004 due to a possible catastrophic collision with the Earth in April 2029. At present, the approach up to 36000–37000 km (not a collision) in 2029 has been determined. After possible approach to the Earth in April 2036, the Apophis trajectory may be undeterminable. To describe possible chaotic trajectories, we use the concept of quasirandom motions, elaborated by V.M. Alexeev. For the intermediate quasirandom motions construction we use point-like gravitation sphere method. Trajectories having close approaches and collisions Apophis with the Earth in 2037 and later have been found analytically and numerically.

ИССЛЕДОВАНИЯ ОРБИТАЛЬНОЙ ЭВОЛЮЦИИ АСТЕРОИДОВ, СБЛИЖАЮЩИХСЯ С ЗЕМЛЕЙ И НАХОДЯЩИХСЯ В ОКРЕСТНОСТИ РЕЗОНАНСА 3/1 С ЮПИТЕРОМ

Быкова Л.Е.

НИИ прикладной математики и механики Томского госуниверситета, Россия

В работе представлен обзор полученных нами ранее и новых результатов численного исследования орбитальной эволюции астероидов, сближающихся с Землей (АСЗ) и движущихся вблизи резонанса 3/1 с Юпитером. Изучению этого резонанса, соответствующего одному из люков Кирквуда, посвящено много работ (см. обзор [1]). Однако резонансные движения АСЗ до сих пор мало изучены в отличие от астероидов главного пояса. Цель данной работы — изучить орбитальное поведение таких АСЗ на интервалах времени порядка нескольких тысяч лет, исследовать устойчивость резонансных конфигураций «астероид — Юпитер» и влияние этого резонанса на регулярность или хаотичность движения астероидов.

Все исследования выполнялись численными методами. Технология исследований основана на построении областей возможных движений астероидов. Для каждого объекта строилась начальная вероятностная область на основе оценок начальных параметров орбиты и ковариационной матрицы их ошибок, полученных из анализа имеющихся наблюдений методом наименьших квадратов. Анализ либрационных движений АСЗ выполнялся с помощью изучения поведения резонансных характеристик. Эволюция оскулирующих кеплеровских элементов и резонансных характеристик рассматривалась для каждого исследуемого объекта и соответствующих ансамблей из 100, 500 или 1000 тестовых частиц.

В окрестность резонанса 3/1 с Юпитером по данным о параметрах орбит известных АСЗ (на начало 2006 г.) попадает 90 АСЗ. Исследования областей возможных движений всех 90 объектов на интервалах времени порядка 6000 лет позволили сделать следующие выводы. Больше половины (49) из рассмотренных астероидов имеют ненадежные орбиты и соответственно большие области возможных движений. Исследование эволюции таких больших областей не проясняет ситуацию о захвате или не захвате в резонанс, так как в этих областях много как резонансных, так и нерезонансных тестовых частиц. 28 астероидов захвачены в резонанс, поскольку эти АСЗ вместе с их тестовыми частицами сохраняют устойчивую конфигурацию «астероид — Юпитер» и имеют регулярные либрационные движения с малой или средней амплитудой около значения точной соизмеримости. Остальные астероиды имеют предельно большую амплитуду либраций, их резонансное движение неустойчиво. Эти объекты движутся в окрестности резонанса с Юпитером, но не захвачены в резонанс. Можно сказать, что их движение носит хаотический характер.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 05-02-17043.

Литература

[1] Moons M. Review of the dynamics in the Kirkwood Gaps // Celest. Mech. Dyn. Astron., 1997. V. 65. P. 175-204.

The Investigations of NEAs Orbital Evolution in the Vicinity of 3/1 Resonance with Jupiter

Bykova L.E.

Applied Mathematics and Mechanics Institute, Tomsk State University, Russia

The review of our previous and new investigations of the NEAs dynamics in the vicinity of 3/1 resonance with Jupiter is presented. The technique of the investigation of NEAs orbital evolution have been developed by the author on the base of the construction of possible motions domains of asteroids. All investigations were carried out by numerical methods.

ИССЛЕДОВАНИЕ ХАОТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ АСТЕРОИДОВ, СБЛИЖАЮЩИХСЯ С ЗЕМЛЕЙ, В ОКРЕСТНОСТИ ОРБИТАЛЬНЫХ РЕЗОНАНСОВ

Быкова Л.Е., Галушина Т.Ю.

НИИ прикладной математики и механики Томского госуниверситета, Россия

Работа посвящена исследованию детерминированного хаоса в орбитальном движении астероидов. Особый интерес с этой точки зрения представляют исследования орбитальной эволюции астероидов в окрестности сепаратрис, разделяющих области с различными формами движения (резонансную и нерезонансную, области перекрытия различных резонансов и др.), поскольку именно здесь могут быть расположены зоны хаотичности. И хотя в последние три десятилетия в понимании этой проблемы достигнут значительный прогресс, остается еще много вопросов и конкретных практических задач, требующих дальнейших исследований. В частности, при исследовании хаотичности в движении астероидов, сближающихся с большими планетами, существуют трудности в построении их орбитальной эволюции на большие интервалы времени. Это связано с тем, что динамика таких объектов плохо поддается изучению аналитическими методами из-за больших эксцентриситетов и тесных сближений с планетами, а исследование эволюции численными методами при многократных сближениях приводит к быстрому накоплению ошибок округления. Очевидно, этими трудностями можно объяснить тот факт, что имеющиеся оценки времени прогнозируемости движения (ляпуновского времени) для астероидов, сближающихся с Землей (АСЗ), полученные различными авторами, значительно отличаются [1, 2].

В данной работе представлены результаты исследования хаотичности движения АСЗ, находящихся в окрестности орбитальных резонансов низких порядков с большими планетами. Все исследования выполнялись численными методами с помощью созданной нами программной системы, позволяющей рассчитывать орбитальную эволюцию АСЗ и некоторые количественные характеристики детерминированного хаоса. Полученные нами с помощью этой программы оценки ляпуновского времени для АСЗ близки к результатам Виодарчука [2], и составляют от тысячи до нескольких тысяч лет.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 05-02-17043.

Литература

[1] Tancredi G. Chaotic dynamics of planet-encountering bodies // Celest. Mech. Dyn. Astron., 1998. V. 70. P. 181–200.
[2] Wiodarczyk I. The prediction of the motion of the Atens, Apollos and Amors over long intervals of time // Dynamics of natural and artificial celestial bodies. Proc. US/European Celest. Mech. Workshop, Poznan-Poland, 3-7 July 2000. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2001. P. 341–342.

The Investigations of the NEAs Chaotic Dynamics in the Vicinities of Orbital Resonances

Bykova L.E., Galushina T.Yu.

Applied Mathematics and Mechanics Institute, Tomsk State University, Russia

The results of studies of the NEAs chaotic dynamics in the vicinities of low-order resonances with the major planets are presented. Maximum Lyapunov characteristic exponents are used as an indicator of the chaotic motion. All investigations were carried out by numerical methods.

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ УСКОРЕННЫХ ЭЛЕКТРОНОВ В ПЕТЛЕ СОЛНЕЧНОЙ ВСПЫШКИ

Горбиков С.П.[*], Мельников В.Ф.[**]

[*]*Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет, Россия,*
[**]*Научно-исследовательский радиофизический институт, Нижний Новгород, Россия*

В докладе для моделирования процессов, происходящих при генерации вспышечного излучения нестационарным источником ускоренных (нетепловых) электронов при учете неоднородности магнитного поля и плотности плазмы вдоль вспышечной петли, используется уравнение Фоккера-Планка. Поставлена соответствующая задача математической физики. При этом предлагается нестандартная формулировка граничных условий: значения искомой функции распределения электронов в граничной точке сетки, если применяется для решения задачи метод конечных разностей, экстраполируются по значениям функции в соседних точках сетки. Экстраполяция может быть линейной (что и реализовано в данной работе) или более высокого порядка. Такая постановка представляется физически обоснованной и не требует результатов каких-либо дополнительных наблюдений. В то же время она позволила применить для численного интегрирования уравнения Фоккера-Планка разработанный ранее авторами [1] сеточный метод решения.

Основным отличием этого метода от остальных сеточных является то, что вид схемы расчета меняется в зависимости от значений расстояния вдоль петли и косинуса питч-угла. Достоинство метода состоит в том, что он, оставаясь неявным и являясь устойчивым, не требует, как и явные численные методы, постоянного решения систем большого числа линейных уравнений.

Правильность расчётов по созданной программе проверялась по предлагаемой в докладе оригинальной методике. А именно, вначале выбирается некий заданный вид функции, которая представляет собой решение исходного уравнения. Далее по этой функции из уравнения находится внешнее воздействие (в данном случае — функция инжекции). Затем эта функция инжекции используется как входное внешнее воздействие при работе проверяемой программы. Результаты расчетов программы должны хорошо согласовываться со значениями первоначально выбранного решения исходного уравнения.

В представленных исследованиях изучалось два случая, когда источник инжекции ускоренных электронов находился: или в центре петли, или в её основании. Выявлены закономерности в поведении функции распределения ускоренных электронов во вспышечной петле и проведен их сравнительный анализ для различных положений в петле источника нетепловых электронов. Полученные выводы хорошо согласуются с ожидаемыми (из физических соображений) результатами.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проекты №№ 04-02-39029, 04-02-16753.

Л и т е р а т у р а

[1] Горбиков С.П., Мельников В.Ф. Изучение распределения нетепловых электронов вдоль вспышечных петель на основе численного интегрирования уравнения Фоккера-Планка// Актуальные проблемы физики солнечной и звездной активности: Сб. докл. в двух томах конф. стран СНГ и Прибалтики (Н.Новгород, 2–7 июня 2003 г.). Т.2. - Н.Новгород: ИПФ РАН, 2003. С. 375–378.

Modeling of Distribution of Energetic Electrons in Loop of Solar Flare

Gorbikov S.P.[*], Melnikov V.F.[**]

[*]*Nizhny Novgorod State University of Architecture and Civil Engineering, Russia,*
[**]*Radiophysical Research Institute, Nizhny Novgorod, Russia*

The problem of mathematical physics on the base of the Fokker-Planck equation for modeling of the dynamics of energetic electron distribution along a solar flaring loop is set. A finite difference method of its solution and original testing method are proposed. Numerical experiments taking into account specific conditions in flaring loops are conducted.

ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ТРАЕКТОРИЙ ПЕРЕЛЕТА НА ГЕОПЕРЕХОДНУЮ ОРБИТУ КА С РАЗГОННЫМ БЛОКОМ

Григорьев И.С.*, Данилина И.А.**

**Московский государственный университет, Россия,*
*** РГТУ-МАТИ, Россия*

Рассматривается задача оптимизации пространственных траекторий перелетов космического аппарата (КА), оснащенного разгонным блоком. Разгонный блок состоит из двигателя, несущих конструкций и двух топливных баков — основного и дополнительного. Сухая масса баков пропорциональна массе находящегося в них топлива, а масса двигателя и несущих конструкций — тяговооруженности. Управление перелетом осуществляется посредством вектора тяги реактивного двигателя. Сброс дополнительного топливного бака (ДТБ) осуществляется после полной выработки топлива и происходит за заданное время. В процессе сброса КА осуществляет пассивное движение. Старт КА происходит с опорной низкой круговой орбиты ИСЗ заданного наклона. Требуется за ограниченное время при заданных параметрах двигателя и баков перевести КА на наилучшую геопереходную орбиту (эллиптическую орбиту с линией апсид, лежащей в плоскости экватора, и радиусом апоцентра, равным радиусу геостационара). Минимизируется величина требуемого для дальнейшего выведения на геостационарную орбиту импульса скорости.

Рассматриваемая задача формализуется как задача оптимального управления совокупностью динамических систем [1]. На основе соответствующего принципа максимума её решение сводится к решению многоточечной краевой задачи. Краевая задача принципа максимума решается численно методом стрельбы. Рассматриваются два возможных случая сброса ДТБ: на активном и на протяженном пассивном участке. Проводится параметрический анализ полученных решений.

Работа является развитием [2].

Литература

[1] Григорьев И.С., Григорьев К.Г. «Об условиях принципа максимума в задачах оптимального управления совокупностью динамических систем и их применении к решению задач оптимального управления движением космических аппаратов» // Космич. иссл. 2003. Т.41. N 3. С. 307-331.

[2] Григорьев И.С., Данилина И.А. «Оптимизация межорбитальных пространственных траекторий перелетов космических аппаратов различных конструкций» // Четвертые Поляховские чтения: Избранные труды. СПб.: Изд. «ВВМ», 2006. С. 241-250.

Optimization Spatial Path Flight on Geotransition Orbit Spacecraft with Accelerating Block

Grigoriev I.S.*, Danilina I.A.**

**Moscow State University, Russia,*
***RGTU-MATI, Russia*

The optimization problem on spatial path flight of the spacecraft, equipped by accelerating block is considered. It is expected that accelerating block consists of the engine, bearing structure and two fuel tanks — main and additional. The dry tank mass is considered to proportional mass of fuel residing in them, and mass of the engine and bearing structure — to thrust-to-weight ratio. The flight control is realized by means of the thrust vector of the jet engine. The unset of the additional fuel tank is realized after full fuel production for given time. Passive motion of spacecraft is in process of the unset. The spacecraft is to launch from supporting low circular orbit of the artificial Earth satellite with given inclination. It is required for limited time under given parameters of engine and tanks to transfer spacecraft on the best geotransition orbit (the elliptical orbit with line of the apses, lying in the equator planes, and radius of apocenter which is equal to radius of geostationary orbit). The value required for the further removing to the geostationary orbit of the pulse to velocities is minimized.

The considered problem is formalized as the problem of the optimum control by the collection of dynamic systems [1]. Its decision on the base of corresponding maximum principle is reduced to decision of the multipoint boundary-value problem. The boundary-value problem of the maximum principle solves numerically by the shooting method. There are two possible events of the additional fuel tank unset: on active and on extensive passive area. The parametric analysis of the received decisions is conducted.

The article develops [2].

References

[1] Grigoriev I.S., Grigoriev K.G. "About condition of the maximum principle in problem of optimum control collection dynamic systems and their using to decision of the problems of optimum control motion cosmic device"// Cosmic research. 2003. T.41. N 3. S. 307–331.

[2] Grigoriev I.S., Danilina I.A. "Optimization interorbital spatial trajectory flight spacecraft different construction"// Fourth Polyakhov readings: Elected works. SPB.: Izd. "VVM 2006. S. 241–250.

ОБ ОПТИМИЗАЦИИ ТРАЕКТОРИЙ ПОСЕЩЕНИЯ ГРУППЫ АСТЕРОИДОВ

Григорьев И.С., Заплетин М.П.

Московский государственный университет, Россия

В работе рассматривается задача посещения космическим аппаратом группы астероидов. Старт КА осуществляется с орбиты Земли с ограниченной скоростью ухода. Диапазон времен старта составляет 20 лет. Требуется посетить по одному астероиду из 4 разных групп. Время посещения каждого астероида составляет не менее 90 дней. Общее время перелета ограниченно 20-ю годами. Перелет осуществляется в центральном ньютоновском гравитационном поле Солнца. Управление КА осуществляется величиной и направлением тяги реактивного двигателя малой тяги. Посредством выбора управления требуется определить траекторию, максимизирующую отношение конечной массы к времени полета.

About Optimization Path Rendezvous with the Group of Asteroid

Grigoriev I.S., Zapletin M.P.

Moscow State University, Russia

The problem of the multiple asteroid rendezvous is. A trajectory must be designed for a low-thrust spacecraft which launches from the Earth and subsequently performs a rendezvous with one asteroid from each of four defined groups of asteroids. The Earth and asteroids are assumed to follow Keplerian (conic) orbits around the Sun. The only forces acting on the spacecraft are the Sun's gravity and, when on, the thrust from the propulsion system.

The spacecraft is to launch from the Earth, with a hyperbolic excess velocity of up to 3.5 km/s and of unconstrained direction. The year of launch must lie in the range 2015 to 2035, inclusive. After launch, the spacecraft must rendezvous with one asteroid from each group. Choosing an asteroid from each group is part of the optimization process. The order in which the asteroids are visited is immaterial. A stay time of at least 90 days is required at each of the first three asteroids. The flight time measured from launch up to the point of rendezvous with the fourth asteroid must not exceed 20 years. Maximization of the ratio of final spacecraft mass to flight time is sought.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ КОРОТКОПЕРИОДИЧЕСКИХ КОМЕТ НА ИНТЕРВАЛЕ ВРЕМЕНИ 1800-2200 ГГ.

Заусаев А.А.

Самарский государственный технический университет, Россия

При исследовании эволюции орбит короткопериодических комет точность полученных результатов зависит от ряда факторов, основными из которых являются: учет в математической модели основных действующих сил; точность, устойчивость, сходимость применяемого метода численного интегрирования.

Нами предложена модификация алгоритма метода Эверхарта, позволяющая увеличить порядок аппроксимирующей формулы при численном интегрировании систем обыкновенных дифференциальных уравнений до 31-го порядка, включительно. Ранее увеличение порядка метода свыше 19-го не приводило к улучшению точности вычислений.

На основе математической модели Newhall X.X., Standish E.M., Williams Jr. и др. разработана модифицированная математическая модель, описывающая движение небесных тел с учетом гравитационных и релятивистских эффектов. Модификация, состоящая в моделировании главного пояса астероидов, позволяет получать результаты, согласованные с наблюдениями при многократном сокращении времени вычислений.

Создан комплекс нового программного обеспечения для реализации модифицированного метода Эверхарта и его применения при математическом моделировании движения небесных объектов.

Проведено исследование сходимости, устойчивости и погрешности аппроксимирующей формулы модифицированного метода Эверхарта для различных порядков и шагов интегрирования.

В настоящее время ведется работа по созданию на основе усовершенствованной информационной технологии каталога орбитальной эволюции короткопериодических комет с 1800 по 2200 гг.

Работа выполнена при финансовой поддержке Федерального агентства по образованию (проект РНП. 2.1.1.1689).

Matematical Modelling of Motion of Short-Period Comets During 400 Years (1800-2200)

Zausaev A.A.

Samara State Technical University, Russia

The orbital evolution of short-period comets was investigated by the modified Everhart method in the time interval from 1800 to 2200 years.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ, ОСНОВАННОЕ НА НОВОМ ПРИНЦИПЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Заусаев А.Ф.

Самарский государственный технический университет, Россия

Рассмотрен новый принцип взаимодействия материальных тел друг на друга, являющийся следствием движения материи. В отличие от закона всемирного тяготения Ньютона, лежащего в основе небесной механики и общей теории относительности Эйнштейна, где гравитация рассматривается чисто феноменологически, в данной модели проявление гравитации рассматривается как атрибут движения.

Нами получены новые дифференциальные уравнения движения для n материальных тел. С целью проверки эффективности различных математических моделей, описывающих движение больших планет, Луны и Солнца, проведено исследование эволюции орбит этих объектов на интервале времени с 1600 по 2200 гг. В первом случае решались те же дифференциальные уравнения, что и при создании DE405 — одной из высокоточных численных теорий движения больших планет, полностью согласованной с оптическими и радиолокационными наблюдениями, а для Луны — с лазерными наблюдениями. Различие заключалось в учете влияния пояса астероидов на движение Марса и Юпитера. В качестве второй математической модели, описывающей движение больших планет, Луны и Солнца, решались полученные нами дифференциальные уравнения. Начальные данные координат x, y, z и скоростей V_x, V_y, V_z во втором случае подвергались незначительной коррекции. Численное интегрирование уравнений движения в обоих случаях было проведено модифицированным методом Эверхарта 27 порядка с шагом интегрирования 3 дня.

Результаты вычислений сопоставлены с элементами орбит, определенных по данным координат и скоростей DE405. Показано, что новая математическая модель движения больших планет, Луны и Солнца, в которой отсутствует учет релятивистских эффектов, согласуется с DE405, так как максимальное различие в элементах орбит, наблюдаемое в средней аномалии в 1602 г. 4 сентября, для Меркурия составляет 0,001, для Венеры — 0,007, для барицентра Земля + Луна — 0,003 и для Марса — 0,001 градуса. Для Луны максимальное расхождение в координатах с DE405 не превышает $4{\cdot}10^{-6}$ а.е., хотя, следует отметить, что при решении полученных нами уравнений движения не учитывалась несферичность фигур Земли и Луны.

Matematical Modelling of Motions of a Celestial Body Based on the New Principle of Interaction

Zausaev A.F.

Samara State Technical University, Russia

The new principle of investigation of a material body has been considered. The differential equations of the motion have been obtained. The elements orbits of planet, of the Moon and the Sun have been calculated in the time interval from 1600 to 2200 years.

МАЛОЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ЛУННЫЕ ТРАЕКТОРИИ НОВОГО ТИПА

Ивашкин В.В.

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия

Представлены результаты исследования новых типов Лунных траекторий в рамках ограниченной задачи четырех тел (Земля-Луна-Солнце-точка). Эти траектории осуществляют «непрямой», обходной перелет, существенно используют гравитационные возмущения и поэтому зачастую позволяют осуществить перелеты на более низком энергетическом уровне, чем обычные решения «прямого» перелета. Исследованы две группы лунных траекторий. Одну группу составляют перелеты от Земли к Луне и обратные перелеты от Луны к Земле. Они имеют отлет точки от Земли на большое расстояние (около $1{,}5 \cdot 10^6$ км), где под влиянием Солнечной гравитации пассивно меняется перигейное расстояние траектории КА от малого значения у Земли до $\sim$ радиуса Лунной орбиты. Кроме того, под влиянием Лунно-Земных гравитационных воздействий в районе некоторой коллинеарной точки либрации («залунной» точки L_2 или «долунной» точки L_1) системы Земля-Луна осуществляется пассивный захват Луной для перелета Земля-Луна или пассивное освобождение от Лунного притяжения для перелета Луна-Земля. Вторую группу составляют перелеты КА с Земли на геостационарную орбиту ГСО и обратные перелеты с ГСО к Земле с гравитационным маневром при близком пролете у Луны для пассивного изменения некоторых элементов орбиты точки. Приводятся примеры данных траекторий, результаты их «точного» численного, а также приближенного качественного анализа [1–4], их характеристики, классификация. Показано, что использование в космонавтике «обходных» траекторий позволяет заметно сократить энергетические расходы по сравнению с обычными траекториями «прямого» полета. Однако они существенно более чувствительны к возмущениям, чем траектории «прямого» полета, и для их применения в космонавтике нужно более точное управление.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (Грант 06-01-00531-а) и Гранта поддержки научных школ НШ-2003.2003.1.

Литература

[1] Ивашкин В.В., Тупицын Н.Н. Об использовании гравитационного поля Луны для выведения космического аппарата на стационарную орбиту спутника Земли // Космические исследования. - 1971. - Т. IX, вып. 2. - С. 163-172.

[2] Ивашкин В.В. О траекториях полета точки к Луне с временным захватом ее Луной // ДАН. 2002. Том 387. № 2. С. 196-199.

[3] Ивашкин В.В. О траекториях полета точки от Луны к Земле с гравитационным освобождением от лунного притяжения // Доклады РАН. - 2004. - Т. 398. № 3. - С. 340-342.

[4] Ивашкин В.В. О траекториях возвращения космического аппарата с геостационарной орбиты к Земле с использованием гравитационного маневра у Луны // ДАН. 2006. Том 409. № 6. С. 770-773.

Low-energy Lunar Trajectories of a New Type

Ivashkin V.V.

M.V. Keldysh Institute of Applied Mathematics, RAS, Moscow, Russia

Some results in a numerical and approximate qualitative analysis of new lunar trajectories are presented for the Earth-Moon-Sun-particle system. These are the trajectories for flights between the Earth and the geostationary orbit GSO using a lunar gravity assist as well as the trajectories for flights between the Earth and the Moon with a passive capture by the Moon for a flight to the Moon from the Earth and with a passive escape from lunar attraction for a flight from the Moon to the Earth. Possible use of these trajectories in Astronautics is discussed.

О РЕГУЛЯРИЗАЦИИ УРАВНЕНИЙ И УПРОЧНЕНИИ РЕШЕНИЙ В НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ

Ильина Т.А.

Российский государственный открытый технический университет путей сообщения, Москва, Россия

Процедура регуляризации уравнений небесной механики [1] вместе с преобразованиями времени часто приводит к уравнениям, имеющим прочные в смысле Жуковского полутраектории [2], что является важным в теории численного интегрирования, особенно в случаях, когда решения первоначальных уравнений неустойчивы в смысле Ляпунова. В задаче численного интегрирования уравнений небесной механики, а также в задаче о прочности полутраекторий представляется актуальным поиск такого преобразования времени (или времени и координат) в исходном уравнении, при котором изучаемое неустойчивое решение становится устойчивым в смысле Ляпунова для преобразованного уравнения. Если указанное преобразование существует, то полутраектория изучаемого решения является прочной в смысле Жуковского для исходного дифференциального уравнения.

В настоящей работе предложены новые алгоритмы линейной регуляризации уравнений кеплеровского движения в задаче двух тел и глобальной регуляризации уравнений в задаче трех тел. Исследована прочность в смысле Жуковского эллиптических траекторий кеплеровского движения. Рассмотрены прямая и обратная задача регуляризации уравнений.

Настоящая работа является продолжением работ [2, 3] .

Литература

[1] Штифель Е., Шейфеле Г. Линейная и регулярная небесная механика. М.: Наука,1975.
[2] Ильина Т.А., Дружинина О.В. Задачи устойчивости и прочности математических моделей динамических систем. Монография.-М.: РГОТУПС, 2006.
[3] Ильина Т.А. О регуляризации уравнений в задаче двух и трех тел //Тезисы докл. II Международного конгресса «Нелинейный динамический анализ» (NDA- 2). М.: Изд-во МАИ ГТУ, 2002. С.182.

On the Equations Regularization and Solutions Hardening in Some Problems of Celestial Mechanics

Ilyina T.A.

Russian State Open Technical University of Railway Transport, Moscow, Russia

In this work, new algorithms of linear regularization for the equations of Kepler motion in a two-body problem and global regularization for a three-body problem are proposed. Zhukovskij stability for elliptic Kepler trajectories is studied. Forward and inverse problems of regularization are considered.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЕОГРАФИЧЕСКИХ И АСТРОНОМИЧЕСКИХ УСЛОВИЙ ИСТОРИЧЕСКИХ СОБЫТИЙ В СИСТЕМАХ КООРДИНАТ, СВЯЗАННЫХ С ПЛОСКОСТЯМИ ГАЛАКТИКИ, ЭКЛИПТИКИ, НЕБЕСНОГО (ЗЕМНОГО) ЭКВАТОРА, МЕСТНОГО ГОРИЗОНТА

Курляндский В.В.

Российский Университет Инноваций, Москва

История — согласованное описание множества событий. Правила, устанавливающие отношения порядка между элементами описываемого множества исторических событий, не могут не учитывать свойства пространственно-временного континуума, в котором события происходят.

Подлинный элемент реальности — планета в целом или фрагмент ее поверхности с городами и другими материальными следами человеческой деятельности, содержащими достоверную информацию о ходе исторического процесса, может быть объектом фундаментальных и прикладных исследований, как источник исторических фактов, если научиться идентифицировать географические и астрономические условия исторических событий.

Математическая модель, позволяющая решать подобные задачи, доведена до состояния мультимедийного продукта и успешно апробированных алгоритмов-рекомендаций ее использования.

Одним из результатов применения модели стала гипотезы, для выдвижения которой у историков не могло быть оснований.

Географическая точка, в которой Александр Македонский основал египетскую Александрию, была выбрана в результате геометрических построений с использованием многогранников Платона, вписанных в небесную сферу.

Истинность сформулированного утверждения доказывается.

Формула Александрии:

$$1/2 \times 109^\circ 28' - 1/3 \times 70^\circ 32' = 31^\circ 13' 20'',$$

где $109^\circ 28'$ и $70^\circ 32'$ — углы многогранников Платона — тетраэдра и гексаэдра; $31^\circ 13' 20''$ северной широты — географическая координата города.

Авторы проекта «Александрия» думали об уникальном астрономическом событии.

В полдень по местному времени египетской Александрии дня зимнего солнцестояния 12 декабря 1440 года угол между плоскостями небесного (земного) экватора и эклиптики стал равным $23^\circ 30' 42,4''$, то есть, отличался от значения $1/3 \times 70^\circ 32'$ на $2,4$ угловые секунды ($70^\circ 32'$ — угол многогранника Платона — гексаэдра).

В это мгновение зенит над городом совместился (с ошибкой 2,4 угловые секунды) с вершиной тетраэдра, вписанного в небесную сферу симметрично относительно плоскости эклиптики (две вершины тетраэдра лежали на эклиптике, две другие — на небесном меридиане), что подтверждается математически и астрономическими таблицами.

Литература

[1] Курляндский В.В. Концепция нового научного направления «Неповерхностная история». - М.: ВНТИЦ, 2005. - № 50200500169.

[2] Курляндский В.В. Исторический источник в эру цифровых технологий. Актуальные проблемы гуманитарных и социально-экономических наук /Сборник статей V международной научно-практической конференции. - М.: МФЮА, 2005. - 119 с.

Geographical and Astronomic Conditions Modeling of Historical Events in the System of Coordinates, Connected with Equatorial, Horizontal, Galactic, Ecliptic Plates

Kurlyandskiy V.V.

Russian University of Innovations, Moscow, Russia

In this paper is discussed a variant of the 3-D computer simulating application for development of simultaneous astronomic and historical events investigations.

The interdisciplinary approach for studying the subject allowed proposing the hypothesis.

The Ancient Egypt capital, Alexandria, should has been situated on the angular distance $1/2 \times 109^\circ 28'$ from the ecliptic plane in the moment, when the angle between celestial equator and ecliptic has been equal to $1/3 \times 70^\circ 32'$ ($109^\circ 28'$ and $70^\circ 32'$ — angles of Plato's polyhedrons — tetrahedron and hexahedron).

ЭФФЕКТ КОЗАИ-ЛИДОВА И ВОЗМОЖНЫЕ ДВИЖЕНИЯ ЭКЗОПЛАНЕТ

Кутеева Г.А., Соколов Л.Л.

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия,
Астрономический институт им. В.В. Соболева СПбГУ, Россия

Исследования экзопланет и экзопланетных систем являются сегодня одной из самых актуальных задач астрономии. Обнаруженные экзопланеты: число которых уже превышает сотню, имеют большие массы, типичны большие эксцентриситеты орбит. Планеты типа Земли и меньше у других звезд пока ненаблюдаемы. Возможные свойства и характеристики орбит таких экзопланет могут быть получены с помощью численного и аналитического моделирования. В частности, установлено, что большие эксцентриситеты орбит массивных планет влекут периодические колебания эксцентриситетов того же порядка для орбит малых планет в плоской задаче. В пространственной задаче когда малая планета расположена ближе к звезде, чем большая, имеет место эффект Козаи-Лидова, проявляющийся в колебаниях эксцентриситета и наклона с большой амплитудой. Рассматривается зависимость характера и диапазона колебаний эксцентриситета орбиты малой планеты от ее большой полуоси, эксцентриситета орбиты массивной планеты, взаимного наклона орбит. Выделяются области регулярного и хаотического движения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (грант 05-02-17408) и Ведущей Научной Школы (грант НШ-4929.2006.2).

Kozai-Lidov Effect and Possible Motions of Exoplanets

Kuteeva G.A., Sokolov L.L.

Saint Petersburg State University, Russia,
Sobolev Astronomical Institute, SPbGU, Russia

The orbital eccentricity oscillations of low-mass exoplanet due to the Kozai-Lidov effect and influence of orbital eccentricity of massive exoplanet are investigated.

О ДВИЖЕНИИ ТЕЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ СИЛ, ОБРАТНО-ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫХ КВАДРАТУ РАССТОЯНИЯ, ПРИТЯГИВАЮЩИХ ЕГО К ДВУМ НЕПОДВИЖНЫМ ЦЕНТРАМ

Лодыженский В.К., Кирбятьев С.В., Кирпичников А.П., Силантьева О.А.

ОАО НПК «Высокие Технологии», Санкт-Петербург, Россия

Задача о движении тела под действием притяжения двух неподвижных центров была впервые решена Л. Эйлером. Ей посвящены три его мемуара, из которых два написаны на латыни и один на французском языке.

В них Эйлер построил посредством проекций тел притяжения на оси x и y, а в одном из мемуаров на оси x, y и z дифференциальные уравнения движения, которые он привёл к эллиптическим дифференциальным уравнениям, то есть к задаче обращения эллиптических интегралов, представив дугу орбиты тела M в виде суммы дуг двух конических сечений.

Таким образом, полученную орбиту Эйлер в общем случае определяет как трансцендентную кривую, которая, однако, при некоторых условиях может стать алгебраической.

Кроме того, он формулирует условия, состоящие в обращении в нуль некоторых постоянных, входящих в уравнения движения, при которых орбита тела M представляет собой классическое коническое сечение.

Далее та же самая задача рассматривалась в конце XVIII столетия Ж.Л. Лагранжем, а в XIX столетии — К. Якоби, и комментаторами Ж.Л. Лагранжа, Ж.А. Серре и Г. Дарбу.

Та же задача изучалась и механиками XX столетия, в частности, например, К. Шарлье.

Однако, ни один из перечисленных авторов не получил точных выражений орбиты тела M в общем случае, хотя эта задача сводится к уже разработанной ныне теории абелевых функций, в частности к задаче сложения обращений эллиптических интегралов.

Задача построения траектории орбиты тела M в общем случае, равно как и условие её вырождения, решается с помощью теории эллиптических и абелевых функций, созданной Абелем, Якоби, Риманом и Вейерштрассом. Для этого необходимо и достаточно воспользоваться теоремой Абеля, определяющей аддитивные свойства эллиптических интегралов I и II рода.

Такое решение позволяет рассмотреть задачу об устойчивости движения тела M (эллиптические и гиперболические траектории) в зависимости от начальных условий.

About Body Motion under the Action of Inverse-Square-Law of Space Forces Which is Gravitating it Towards Two Fixed Centers

Lodyzhenskiy V.K., Kirbyatiev S.V., Kirpichnikov A.P., Silantieva O.A.

Research and Production Company "High Technology", Saint-Petersburg, Russia

The solving of problem of body M motion posed by Euler under the action of two fixed centers by means of methods of Abelian functions is obtained.

ПЕРЕХОДЫ МЕЖДУ РАЗЛИЧНЫМИ ТИПАМИ ОРБИТ В НЕУСТОЙЧИВЫХ ТРОЙНЫХ СИСТЕМАХ

Мартынова А.И., Орлов В.В.

Санкт-Петербургская лесотехническая академия, Россия,
Астрономический институт им. В.В. Соболева,
Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

Рассматривается гравитационная проблема трех тел равных масс с нулевыми начальными скоростями. Множество начальных условий в этой задаче представляет собой замкнутое компактное двумерное многообразие D (рис. 1).

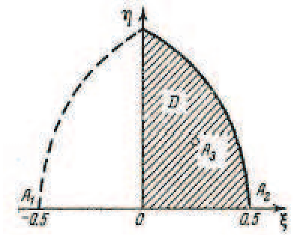


Рис. 1. Область начальных условий для тройных систем. Компоненты располагаются в точках A1, A2 и A3.

Проведено сканирование области D с шагами $h_\xi = h_\eta = 0.001$. Прослежена эволюция каждой тройной системы до ее распада или до критического времени $T_{crit} = 1000\tau$, где τ — среднее время пересечения компонентом тройной системы (см. Агекян и Аносова 1967). Среди рассмотренных тройных систем выделена популяция метастабильных систем с длительным временем $\Delta t > 100\tau$ непрерывного пребывания в состоянии простого взаимодействия тел (см. Агекян и Мартынова 1973).

Изучение характера движений в этих системах показало, что в метастабильном состоянии фазовая траектория «прилипает» к одной или нескольким устойчивым периодическим орбитам (см. Мартынова и др. 2003). Рассмотрены переходы между «прилипаниями» к различным периодическим орбитам (Фон Шубарт 1956, Брук 1979, Мур 1993). Как правило, метастабильные траектории в окрестности орбиты фон Шубарта (1956) совершают либрационные и прецессионные движения. В траекториях, «прилипающих» к двум другим орбитам, происходит быстрая смена характера движений — переходы от движений, близких к равнобедренным, к движениям, описывающим фигуру «восьмерка», и обратно.

Литература

[1] Агекян Т.А., Аносова Ж.П. Астрон. Журн., 1967, Т. 44, С. 1261.
[2] Агекян Т.А., Мартынова А.И. Вестник ЛГУ, 1973, Сер. 1, N 1, С. 122.
[3] Брук (Broucke R.) Astron. Astrophys., 1979, V. 73, P. 303.
[4] Мартынова и др. (Martynova A.I., Orlov V.V., Rubinov A.V.) Monthly Notic. Roy. Astron. Soc., 2003, V. 344, P. 1091.
[5] Мур (Moore C.) Phys. Rev. Lett., 1993, V. 70, P. 3679.
[6]Фон Шубарт (Von Schubart J.) Astron. Nachr., 1956, B. 283, S. 17.

Transitions Between Different Types of Orbits in Unstable Triple Systems

Martynova A.I., Orlov V.V.

Saint Petersburg State Forest-Technical Academy, Russia

The equal-mass three-body problem is numerically studied. The populations of metastable systems having a long life-time were rerevealed. Such trajectories stick to a few stable periodic orbits.

НОВЫЕ ЦЕНТРАЛЬНЫЕ КОНФИГУРАЦИИ: МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ И ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ

Перов Н.И., Медведев Ю.Д.

Ярославский государственный педагогический университет, Россия,
Институт прикладной астрономии РАН, Россия

Определение центральной конфигурации приводится в монографии А. Уинтнера [1]: I векторов $\mathbf{R}_j$, определяющие положения I тел с массами m_1, m_2,..., m_I в барицентрической системе координат образуют центральную конфигурацию относительно положительных констант m_1, m_2,..., m_I, если сила притяжения, действующая на J тело в фиксированный момент времени пропорциональна массе m_J и вектору $\mathbf{R}_J$.

$$\mathbf{F}_j = \chi m_J \mathbf{R}_J, J = 1 \ldots I. \tag{1}$$

Скаляр χ не зависит от J, причем значение χ на основании приведенного уравнения и законов Ньютона определяется единственным образом. Очевидно, исследование центральных конфигураций сводится к интегрированию дифференциальных уравнений движения небесных тел в замкнутой форме, что приводит к уменьшению ошибок и экономит время вычислений по сравнению с численным интегрированием [2, 3]. Как показал J. Раваль [2] существует глубокая физическая связь между точками либрации (равновесия) гравитирующей системы и концепциями происхождения спутников планет, Солнечной системы, Галактики и скоплений галактик. Поиск всех центральных конфигураций для произвольного числа материальных точек I с произвольными массами m_1,..., m_I и произвольными законами взаимодействия в настоящее время относится к нерешённой задаче небесной механики [3].

В работе представлены: а) методы построения прямолинейных, плоских и пространственных центральных конфигураций N гравитирующих тел; б) методы исследования их устойчивости; в) приложения исследуемых динамических моделей к реальным небесномеханическим системам. Впервые получено универсальное уравнение для определения положений равновесия $3N$ малых тел в гравитационном поле вращающегося с угловой скоростью ω правильного N-угольника. Уравнение применимо для четных и нечетных чисел основных тел массой m, а также для определения внутренних и внешних точек либрации. Обнаружено «исчезновение» внутренних точек равновесия при определённой массе центрального тела, кроме точки, совпадающей с центром масс многоугольника при $M = 0$. Впервые исследована устойчивость рассмотренной динамической системы. В частности, установлено, что, начиная с определенного отношении масс центрального тела M и тел с массой m в кольце, наблюдается устойчивость в точках либрации (при этом в линейном приближении не всегда удаётся эффективно исследовать эти динамические модели на устойчивость). Для системы 4 тел (центральное и три в вершинах треугольника) это отношение равно $M/m = 43.191031980399995$. Эффективность модели возрастает с ростом расстояния основных тел от центрального тела, увеличением числа тел и уменьшением массы центрального тела и расстояний между основными телами. Разработанную также модель квазицентральной конфигурации предлагается использовать для описания поведения кольцевых структур, коорбитальных спутников планет, объектов облака Оорта.

Литература

[1] Уинтнер А. Аналитические основы небесной механики. М.: Наука, 1967. 524 с.
[2] Rawal J.J. Physical significance and the role of Lagrangian points and the Oort clouds of planets in the Solar System // Earth, Moon, and Planets. 1992. V. 58. char 157 2. P. 153–161.
[3] Cors J.P., Llibre J., Olle M. Central configurations of the planar coorbital satellite problem / Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 2004. V. 89. P. 319–342.

New Central Configurations: Methods of Construction and Investigation of the Stability

Perov N.I., Medvedev Yu.D.

State Pedagogical University, Yaroslavl, Russia,
Institute of Applied Astronomy, Saint Petersbourg, Russia

Methods of construction of linear, planar and space central configurations of N gravitating bodies, as well as methods of investigation of their stability are considered. Some applications of these dynamical models for the real celestial mechanical systems are presented.

МУЛЬТИПОЛЬНЫЕ МОДЕЛИ ГЕОМАГНИТНОГО ПОЛЯ И ВЛИЯНИЕ РЕГРЕССИИ ОРБИТЫ В ЗАДАЧЕ ОБ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОМ УПРАВЛЕНИИ ОРИЕНТАЦИЕЙ ИСЗ

Тихонов А.А., Антипов К.А.

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

Магнитные и лоренцевы силы, порождаемые взаимодействием геомагнитного поля с движущимся относительно него ИСЗ, оказывают сильное влияние на вращательное движение ИСЗ вокруг его центра масс. Это вызывает необходимость тщательного аналитического исследования динамики вращательного движения ИСЗ с учетом таких факторов как нецентральность гравитационного поля Земли, вызывающая регрессию орбиты ИСЗ [1], и сложная мультипольная структура магнитного поля Земли [2]. Однако, упомянутое взаимодействие ИСЗ с геомагнитным полем может быть положено в основу синтеза систем электродинамического управления ориентацией ИСЗ [3]. В работе [4] показано, что электродинамическая система управления, основанная на использовании лоренцевых сил, решает задачу стабилизации ИСЗ в орбитальной системе координат. В докладе излагаются результаты исследований электродинамической стабилизации ИСЗ, выполненные с учетом регрессии орбиты ИСЗ для различных мультипольных приближений геомагнитного поля, причем в более общей постановке благодаря учету сил магнитного взаимодействия ИСЗ и геомагнитного поля. Показано, что электродинамический метод может успешно применяться для стабилизации ИСЗ, находящихся на регрессирующих орбитах, а учет высших (после квадрупольной) составляющих геомагнитного потенциала не является принципиально важным в задаче о стабилизации ИСЗ указанным методом.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 05-01-01073).

Литература

[1] Тихонов А.А. О вековой эволюции ротационного движения заряженного ИСЗ на регрессирующей орбите // Космич. Исслед., 2005, т. 43, № 2, С. 111-125.
[2] Тихонов А.А., Петров К.Г. Мультипольные модели магнитного поля Земли // Космич. исслед., 2002, т. 40, № 3, С. 219-229.
[3] Антипов К.А., Петров К.Г., Тихонов А.А. Выбор концепции построения систем электродинамической стабилизации космических аппаратов / Четвертые Поляховские чтения: Избранные труды. СПб.: Изд-во «ВВМ», 2006. 702 с., С. 232-240.
[4] Антипов К.А., Петров К.Г., Тихонов А.А. Электродинамический метод трехосной стабилизации динамически симметричного космического аппарата // Вестн. С.- Петербург. ун-та. Сер.1, 2006, Вып. 1 (№ 1) С. 75-86.

Multipole Models of Geomagnetic Field and the Influence of the Orbit Decaying in the Problem of Electrodynamical Attitude Control of Artificial Earth's Satellite

Tikhonov A.A., Antipov K.A.

Saint-Petersburg State University, Russia

The paper deals with an artificial Earth's satellite interacting with the geomagnetic field by magnetic and Lorentz forces. The attitude motion of a satellite with electrodynamical attitude control system is studied with the use of various multipole approximations of geomagnetic field. Secular perturbations of orbit caused by the Earth's oblateness are taken into account. It is shown that electrodynamical attitude control system may be successfully used for angular stabilization of a satellite on a decaying orbit.

This work is supported by of RFBR (Grant 05-01-01073).

О ТЕОРИИ ЛЯПУНОВА ФИГУР РАВНОВЕСИЯ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ

Холшевников К.В.

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

Три из пяти томов собрания сочинений А.М.Ляпунова посвящены теории фигур равновесия небесных тел. Математически задача сводится к решению интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. Обозначим три важнейших вклада А.М.Ляпунова в рассматриваемую проблему.

Во-первых, нахождение условий существования, единственности и корректности решения. Выйдя за рамки частной астрономической задачи, они вошли в общую теорию и получили дальнейшее развитие.

Во-вторых, формальное решение задачи в виде рядов (называемых теперь рядами Ляпунова) по степеням некоторого малого параметра q. Это направление не развивалось. Лишь недавно мы модернизировали алгоритм Ляпунова, пользуясь возможностями компьютерной алгебры.

В-третьих, доказательство сходимости рядов Ляпунова для $q < q_0$, где вне зависимости от распределения масс $q_0 = 3.7 \cdot 10^{-4}$. Оценка Ляпунова груба для большинства конкретных тел, однако никто не пытался достичь новых результатов в этом направлении. Лишь недавно мы получили точные значения радиуса сходимости q^* в двух крайних случаях однородного тела ($q^* = 0.336998559$) и сосредоточенной в центре массы, окруженной невесомой атмосферой ($q^* = 0.541115598$).

Теорема о сходимости рядов при $q < q_0$ излагается в учебниках. Отметим пропущенную их авторами деталь. А.М.Ляпунов нигде не приводит громоздкого доказательства, обещая сделать это позже. Трагическая смерть помешала ему выполнить обещание. Я призываю специалистов в этой области математики восстановить доказательство и, возможно, получить более точные оценки, наложив разумные ограничения на функциональную зависимость плотности от расстояния.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 05-02-17408) и Совета по грантам президента РФ для поддержки ведущих научных школ (грант НШ-4929.2006.2).

On the Liapunov Theory of Equilibrium Figures of Celestial Bodies

Kholshevnikov K.V.

Saint Petersburg State University, Russia

A significant contribution of A.M.Lyapunov to the theory of equilibrium figures of celestial bodies is described, as well as its development since then. Yet existing problem of convergence domain of Lyapunov series (representing these figures) is pointed.

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ТРАЕКТОРИИ В ПЛАНЕТНОЙ ЗАДАЧЕ МНОГИХ ТЕЛ

Шмыров А.С.

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

Многие задачи классической и небесной механики сводятся, как показал А. Пуанкаре [1], к исследованию гамильтоновой системы уравнений с гамильтонианом

$$H(x,y) = H_0(y) + \mu H_1(x,y),$$

где (x,y) — векторы координат и импульсов, μ — малый параметр, а возмущающий гамильтониан H_1 зависит от компонент x периодически. Такая форма уравнений весьма удобна как для аналитических, так и для качественных исследований свойств движения. В последнем случае весьма эффективным является использование вариационных принципов [2], позволяющих устанавливать существование траекторий с малым изменением импульсов на бесконечном промежутке времени. Пусть $L(x,\dot{x}) = L_0(\dot{x}) + \mu L_1(x,\dot{x})$ — лагранжиан, соответствующий гамильтониану H. Зададим вектор c и рассмотрим задачу минимизации функционала действия $\int_0^t (L(x,\dot{x})+c\dot{x})dt$ на траекториях со свободным правым концом. Как показано в [2], при $t \to \infty$ семейство решений такой задачи имеет предел, который называется минимальной траекторией. Существование таких траекторий обеспечивается выпуклостью функции $L_0(\dot{x})$, что часто встречается в приложениях.

А. Пуанкаре показал [3], что разложениям Лагранжа возмущающей функции планетной задачи многих тел можно придать гамильтонову форму с гамильтонианом вида H. При исследовании этой задачи вариационным методом возникает трудность, связанная с вырожденностью невозмущенной части гамильтониана, которая зависит только от больших полуосей планет, поэтому здесь речь идет о построении экстремальных траекторий. Задача минимизации сводится к исследованию гамильтоновой системы с гамильтонианом вида

$$\frac{1}{2}(\Lambda_k)^{-2} + \mu F_k(\lambda_k, \Lambda_k, t),$$

где (Λ_k, λ_k) — первая пара элементов второй канонической системы Пуанкаре для k-ой планеты, μF_k — возмущение. Трудность исследования такой системы заключается в том, что зависимость функции F_k от времени непериодическая. Тем не менее, минимальные траектории этой системы, как установлено в [2], допускают эффективные оценки на изменения импульсов. Это в свою очередь позволяет сделать заключение о малых изменениях орбитальных элементов планет на бесконечном промежутке времени, т.е об устойчивости планетной системы. Таким образом, вместе с периодическими, асимптотическими и условнопериодическими решениями экстремальные траектории дают весьма обширный класс устойчивых моделей движения для планетных систем.

Литература

[1] Пуанкаре А. Новые методы небесной механики // Избранные труды: В 3 т. Т. 1. М., 1971. 771 с.
[2] Шмыров А. С. Устойчивость в гамильтоновых системах. СПб., 1995. 127 с.
[3] Пуанкаре А. Лекции по небесной механике. М., 1965. 572 с.

Extremal Trajectories in the Planetary Few Bodies Problem

Shmyrov A.S.

Saint Petersburg State University, Russia

The special form of the equations of movement in the planetary problem of few bodies, proposed by Poincare, is investigated by variational methods with the help of the modified principle of the least action. Convex properties of Lagrangian allow to prove the existence of extreme trajectories and to estimate changes of orbital elements. In result the existence of an extensive class of the trajectories modelling stable movement on an infinite time interval is established.

ОСОБЕННОСТИ ДВИЖЕНИЯ ПЫЛЕВЫХ ЧАСТИЦ В ПРИПОВЕРХНОСТНОМ ПЛАЗМЕННОМ СЛОЕ БЕЗАТМОСФЕРНОГО НЕБЕСНОГО ТЕЛА

Яковлев А.Б.

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

В связи с озвученными Россией, США и Китаем планами создания постоянной лунной базы резко возрос интерес к изучению явлений и процессов на поверхности Луны. Это в частности необходимо для определения оптимального расположения такой базы. Одним из явлений, которое может существенно повлиять на возможность проведения астрономических наблюдений с лунной поверхности, а также на результаты предварительных исследований элементного состава с борта искусственного спутника планеты, является подъем мелких фрагментов лунного грунта над ее поверхностью на высоты до 100 км [1]. По мнению большинства исследователей левитация частиц лунного грунта происходит благодаря электростатическому взаимодействию.

В ряде предыдущих работ нами предложена модель процесса и получены уравнения вертикального движения лунной пыли. В общем случае задача сводится к исследованию негамильтоновой системы с $3/2$ степенями свободы. На основе численных расчетов показано, что в зависимости от размера частицы грунта осуществляется один из трех возможных вариантов ее временной эволюции [2].

В настоящей работе проведен анализ физических причин возникновения различных видов движения и исследуется их устойчивость.

Литература

[1] T.J. Stubbs, K.R. Vandrak, W.M. Farell. A dynamic fountain model for lunar dust. //Advances in Space Research, 2006, v.37, p.59-66.

[2] E.K. Kolesnikov, A.B. Yakovlev. Vertical dynamics and horizontal transfer of submicron-sized lunar-regolith microparticles levitating in the electrostatic field of the near-surface photoelectron layer.//Planetary and Space Science, 2003, v.51, p.879-885.

Peculiarity of Dust Particle Motion in the Near-Surface Plasma Layer of Disatmospheric Celestial Body

Yakovlev A.B.

Saint Petersburg State University, Russia

In the present paper we investigate physical reason for the existence of three possible regimes of dust particle vertical oscillations and stability of these motions.

НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS AND THEIR APPLICATIONS

THE STABILITY AND STABILIZATION OF SOLUTIONS OF THE DIFFERENTIAL EQUATIONS AND ITS APPLICATIONS

Boykov I.V.

Penza State University, Russia

In the first part of the presentation, a review of the works of the author devoted to stability of the motion [1-5] is given. Given new criterions of stability of nonlinear differential and difference equations in Banach spaces, of stability of solution of nonlinear differential equations systems with delay, nonlinear systems of differential equations with a small parameter attached to derivative, nonlinear systems of partial differential equations. Stability of solution of nonlinear systems of differential equations with discontinuous right-hand sides is investigated too.

Criterions are applied to the regular case and to all possible critical cases simultaneously.

In the second part of the presentation, we give some new criterions of stabilization of solutions of differential equations.

In the third part of the presentation, we give applications of these criterions to some tasks of physics, ecology and economics. In particular, we propose new criteria of stability of Hotelling-Scellam models in ecology and economics, dissipative and Schrodinger systems. New criteria of stability of Kolmogorov model in ecology are given too.

References

[1] I.V. Boikov, On the Stability of Differential and Difference Equations in Critical Cases, Soviet. Math. Dokl., 42(2)(1991), 630-632.

[2] I.V. Boikov, On the Stability of Solution of Differential and Difference Equations with Non-Differential Right Sized, Differ. Equations, 29(8)(1993),1453-1455 [In Russian, English translation]

[3] I.V. Boikov, The Stability of the Motion of a System with Afteraffect, J. Appl. Maths. Mechs., 61(3)(1997), 385-389. [In Russian, English translation]

[4] I.V. Boikov, About Definitions of Stability Domeins of System of Differential Equations with Small Parameters for Derivatives, Automatics and Telemechanics, (6)(1998), 88-96. [In Russian, English translation]

[5] I.V. Boikov, About Definitions Domains of Stability for Some Classes of Non-Linear Equations with Distributed Parameters, Automatics and Telemechanics (1)(2001), 40-49 [In Russian, English translation]

INVARIANT MANIFOLDS, REDUCTION PRINCIPLE, AND NONLINEAR MASTER-SLAVE SYNCHRONIZATION IN COUPLED SYSTEMS

Chueshov I.D.

Kharkov University, Ukraine

We consider an abstract system of two coupled nonlinear (infinite dimensional) equations of the form

$$U_t = F(U, V),\ t > 0,\ \text{ in } X_1, \quad \text{and} \quad V_t = G(U, V),\ t > 0,\ \text{ in } X_2,$$

where X_1 and X_2 are (infinite dimensional) Banach spaces, F and G are nonlinear mappings,

$$F\ :\ X_1 \times X_2 \mapsto X_1, \quad G\ :\ X_1 \times X_2 \mapsto X_2.$$

This kind of systems may describe various interaction phenomena in a continuum medium. Under some conditions we prove the existence of an exponentially attracting invariant manifold for the coupled system and show that this system can be reduce to a single equation with modified nonlinearity. This result means that under some conditions we observe (nonlinear) synchronization phenomena in the coupled system. As applications we consider coupled systems consisting of (i) parabolic and hyperbolic equations, (ii) two hyperbolic equations, and (iii) Klein-Gordon and Schrödinger equations. We also refer to [1] and [3] for similar results for thermoelastic problems. Our approach relies on some ideas borrowed from the theory of inertial manifolds developed by many authors (see, e.g., [2] and the references therein).

References

[1] T. Caraballo, I. Chueshov, and J. Langa, Existence of invariant manifolds for coupled parabolic and hyperbolic stochastic partial differential equations *Nonlinearity* **18** (2005) 747–767.

[2] I.D. Chueshov, *Introduction to the Theory of Infinite-Dimensional Dissipative Systems*, Acta, Kharkov, 1999, in Russian; English translation: Acta, Kharkov, 2002; see also http://www.emis.de/monographs/Chueshov/

[3] I.D. Chueshov, A reduction principle for coupled nonlinear parabolic-hyperbolic PDE, *J. of Evolution Equations*, 4 (2004), 591–612.

LIAPUNOV FUNCTION AND TOPOLOGICAL CLASSIFICATION OF MORSE-SMALE DIFFEOMORPHISMS

Grines V.Z.

Niznii Novgorod State Agriculture Academy, Russia

This report is devoted to an exposition of results obtained by the author in collaboration with O. Pochinka and F. Laudenbach.

Principle difference in topological classifications of Morse-Smale diffeomorphisms, given on three-dimensional manifolds on comparison with classification of similar flows or diffeomorphisms on two-dimensional manifolds is caused by an opportunity of a wild embedding of separatrices of saddle periodic points in a neighborhood of a sink and a source.

Thanks to it properties of any Liapunov function of given Morse-Smale diffeomorphism f on 3-manifold also depend from topology of embedding of separatrieces. In particular as proved D. Pixton if a separatrice of some periodic point of diffeomorphism f is wildly embedded in ambient manifold then any Liapunov function of diffeomorphism f has at least one critical point different from periodic point.

In series of works [1]-[4] was obtained topological classification of Morse-Smale diffeomorphism on 3-manifolds. Our report is devoted to topological classification of Morse-Smale diffeomorphism whose Liapunov functions has given fixed minimal number of critical points.

Our results was obtained with partial financial support of grant 05-01-00501 of RFBR and grant of the President of RF supporting leading scientific school 9686.2006.1.

References

[1] Bonatti Ch., Grines V.Z. Knots as topological invariant for gradient-like diffeomorphisms of the sphere S^3. // Journ. Dyn. and Control Syst.– 2000. N6. p. 579-602.

[2] Bonatti Ch., Grines V., Medvedev V., Pecou E. Topological classification of gradient-like diffeomorphisms on 3-manifolds. // Topology.– 2004. N43. p. 369-391.

[3] Bonatti Ch., Grines V., Pochinka O. Classification of Morse-Smale diffeomorphisms with finite number heteroclinic orbits on 3-manifolds. // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics.– 2005. V 250. p. 5-53.

[4] Bonatti Ch., Grines V., Pochinka O. Classification of Morse-Smale diffeomorphisms wth the chain of saddles on 3-manifolds. Foliation 2005. ed. by Pawel Walczak et al. World Scientific, Singapore, 2006, pp. 121-147.

ABOUT LOCAL CATASTROPHES FOR ONE CLASS OF SYSTEMS OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

Kusyumov A.N.

A.N. Tupolev State Technical University of Kazan, Russia

We consider a smooth system of ordinary differential equations

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(t,x). \tag{1}$$

Here $t \in T \subset R$ is time coordinate, vector x belongs to two-dimensional space of phase coordinates $M \subset R^2$, $f(t,x)$ is a certain smooth vector-function.

Definition 1. We shall say that the point $t_0 = 0, x_0 = 0 \in T \times M$ is the critical point of the set(1) at an instant t_0 if $f(t_0, x_0) = 0$ for $i = 1, \ldots, 2$.

We can consider the vector-function $x(t)$ as a result of Cartesian product of maps $x^i : T \longrightarrow X^i$, where $X^i \subset R$, $i = 1, \ldots, 2$.

Note that we can consider also the instant $t = t_0$ as the critical point for each of maps $x^i : T \longrightarrow X^i$.

Definition 2 [1]. The critical point t_0 is the regular point for the function $x^i(t)$ if

$$\frac{d^2x^i}{dt^2}|_{t_0} \neq 0.$$

Definition 3. We shall say that the set (1) is the Moorse set in a domain of the critical point t_0, x_0 if $x^i(t) = \alpha_i t^2$ for each solution $x^i(t)$ of the set (1) ($\alpha_i = \text{const} \neq 0$).

Theorem 1. If in a neighbourhood of point t_0, x_0 the set (1) has a solution $x^i(t) = \alpha_i t^{k_i+1} + O(t^{k_i+2})$ ($k_i \geq 1$) then the right part of the set (1) has the form

$$f^i(t,x) = t^{k_i}(\alpha_i(k_i+1) + t\psi^i_{00}(t,x)) + \sum_j x^j \psi^i_j(t,x). \tag{2}$$

A disturbance of a germs of elementary catastrophes is determined by the functions

$$u_{k_i}(t) = \sum_j a^i_j t^j,$$

where $j = 1, \ldots, k_i - 1$, $k_1 = k$, $k_2 = m$. By A_{km} we denote catastrophe appropriate to the functions $u_{k_i}(t)$.

Theorem 2. Let the functions $f^i(t,x)$ have the form (2) for $k_i = 2, \ldots, 6$ and determine a germs of catastrophes A_{km}. Then the equations set

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(t,x) + \frac{du_{k_i}}{dt} - \sum_j u_{k_j} \psi^i_j(t,x)$$

determines the solution $x^i(t) \approx \alpha^i t^{k_i+1} + u_{k_i}(t)$, where $O^i\left(\sum_j a^j_1 t^{k_j+2}\right)$ is a residual.

References

[1] Poston T., Stewart I.N. Catastrophe Theory and Its Applications, London: Pitman, 1978.

ON APPLICATION OF THE UNIVERSAL ITERATIVE PROCESS TO PROBLEMS IN NONLINEAR THEORY OF ELASTICITY AND NONSTATIONARY FILTRATION

Koshelev A.I., Narbut M.A.

Saint Petersburg State University, Russia

The iterative universal process introduced by one of the authors some years ago is applied to quasilinear boundary-value problems in elasticity and filtration. The convergency of the method both in weak and strong spaces is proved. The existence of weak and regular solutions is established. Some aspects of computer simulation using MATLAB are discussed.

SOME EFFECTS OF FEEDBACK CONTROL ON THE ROSSLER DYNAMICAL SYSTEM

Mazumdar H.P.*, Islam N.**

**PAMU, I.S.I., Kolkata-700108, India*

***R.K.M.R. College, Calcutta University, Narandrapur, West-Bengal, India*

Panchev (1992) described Rossler system of dynamical equations as a "model of model (Lorenz's)". A common idea is that the Rossler system should be investigated to the extent Lorenz system has received attention. Vincent and Yu (1991) examined the Lorenz system, subjected to a control input and indicated that the motion may contain chaotic transients. Here the effects of a linear feedback control on the Rossler system are studied.

Uncontrolled version of the system is linearized about a equilibrium point and expressed in terms of state perturbation variables. Perturbation control is then added to second equation of the system with the assumption that nominal control may be taken zero (Vincent and Yu, 1991). This means that the system may be maintained at the equilibrium point only under the partial state feedback control.

Both the uncontrolled and controlled versions of the Rossler system are solved numerically in terms of state perturbation variables. Transients in the motion of the system with and without the control input are discussed. Stability analysis of the system is carried out in Lyapunov's sense.

NON-SMOOTH MODELS OF ELECTRICAL SWITCHING ELEMENTS

Michael Möller and Christoph Glocker

IMES - Center of Mechanics, ETH Zurich, Switzerland

The non-smooth modelling of idealized switches and diodes in electrical systems is presented in the framework of linear complementarity. By idealizing the switching elements, the numerical problems of stiff differential equations and the ballast of additional regularisation parameters are avoided. In cases where the switching events and the structural configuration of the system are of interest, the ideal non-smooth modelling is an advantage, because the switching is not smoothed out as with regularisation methods. There are basically three approaches for the description of electrical systems, called the charge approach, the flux approach and mixed approaches. The charge approach uses the charges and associated currents as variables while the voltages are balanced. In the flux approach the fluxes with associated voltages form the variables while balancing the currents. In mechanics usually the positions and their associated velocities are used as variables and the forces are balanced. For both, the charge and the flux approach, the classical electromechanical analogy can be extended to the non-smooth case. The descriptions used for non-smooth electrical systems are analogous to the well developed formulations and methods used for non-smooth mechanical systems, pioneered by the work of Moreau [1]. In [2] the models of non-smooth switches are presented in the charge approach. The non-smooth modelling using the flux approach is described in [3]. The relations for the inertia elements are replaced with an equality of measures to allow for impulsive forces in mechanics, impulsive voltages in the charge approach and impulsive currents in the flux approach. Impulsive voltages, in the sense of Dirac impulses, are required to force a jump in the branch current of an inductivity, while impulsive currents allow for an instantaneous change of the branch voltage of a capacitor. In analogy with the velocity in mechanical systems, the currents are restricted to functions of bounded variation in the charge approach, while the flux approach restricts the voltages to functions of bounded variation. Discontinuities of inductor branch currents or capacitor branch voltages may occur if the system is initialised with non-feasible initial conditions or after a switching event. Electrical switches are modelled as spark gap with variable break-through voltage [2]. The switch is operated by controlling the break-trough voltage, which corresponds to opening or closing the gap. The switch in the charge approach is analogous to dry friction in mechanics. Set-valued branch relations are formulated for the ideal diode and the switch, which contain all possible states as well as the conditions for the switching between them. The branch relations are equipped with impact laws, in cases where unbound voltages or currents are supported. With the set-valued branch relations, the dynamics of the circuit are described as measure differential inclusions. For the numerical solution, the measure differential inclusions are written as a measure complementarity system and discretised with a difference scheme, known in mechanics as time-stepping. For every time-step a linear complementarity problem is obtained. The non-smooth electrical models are applied to the example of the DC-DC buck converter, consisting of the classical elements R, C, L and a voltage source as well as an ideal switch, a diode and a control feedback.

References

[1] Moreau, J.J. Unilateral contact and dry friction in finite freedom dynamics. Non-Smooth Mechanics and Applications, CISM Courses and Lectures, Vol. 302, Springer Verlag, Wien, 1988.

[2] Glocker, Ch. Models of non-smooth switches in electrical systems, International Journal of Circuit Theory and Applications, 33:205-234, 2005.

[3] Möller, M., Glocker, Ch. Non-smooth modelling of electrical systems using the flux approach. Nonlinear Dynamics, in press.

PLATONIC POLYHEDRA, TOPOLOGICAL CONSTRAINTS AND PERIODIC SOLUTIONS OF THE CLASSICAL N-BODY PROBLEM

Piero Negrini

Dipartimento Matematico "Guido Castelnuovo" Università "La Sapienza", Roma- Italy

In the last few years many interesting periodic motions of the classical Newtonian N–body problem have been discovered as minimizers of the action functional

$$\mathcal{A}(u) = \int_0^T \left(\frac{1}{2} \sum_{h=1}^{N} m_h |\dot{u}_h|^2 + K \sum_{1 \leq h < k \leq N} \frac{m_h\, m_k}{|u_h - u_k|} \right) dt \tag{1}$$

on loop spaces $\Lambda_G \subset H^1(S^1, \mathcal{X})$, where $\mathcal{X}$ is the configuration space defined by

$$\mathcal{X} = \{x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbf{R}^{3N} : \sum_{h=1}^{N} m_h x_h = 0\}, \tag{2}$$

Λ_G is the set of the T–periodic motions which are equivariant with respect to the action of a suitably chosen group G, $u_h : S^1 \to \mathbf{R}^3$ the motion of the particle with mass m_h and K the gravitational constant.

In this talk I want to expose some new results in this field, obtained in a joint paper with G. Gronchi and G. Fusco ([5]). The original motivation for our work was aesthetical: we asked ourselves about the existence of periodic motions which could be compared in perfection and beauty with the Eight ([2]), ([6]), the Hip–Hop ([3])and the other interesting motions that have been recently discovered ([1]), ([4]). In fact, in the first part of the talk I present a new class of periodic motions in the plane.

The second part of this lecture is devoted to show the existence of periodic motions having *Platonic Simmetries.*

References

[1] Chen, K. C.: 2003. *Binary Decomposition for Planar N-body Problems and Symmetric Periodic Solutions*, Arch. Rational Mech. Anal., **170**, 247– 276

[2] Chenciner, A., Montgomery, R.: 2000. *'A remarkable periodic solution of the three-body problem in the case of equal masses'*, Ann. Math. (2) **152**, pp. 881–901

[3] Chenciner, A., Venturelli, A. :2000. *Minima de l'intégrale d'action du Problème newtonien de 4 corps de masses égales dans* $\mathbf{R}^3$*: orbites "hip–hop"*, Cel. Mech. Dyn. Ast., **77**, 139–152

[4] Ferrario, D., Terracini, S.: 2004. *'On the existence of collisionless equivariant minimizers for the classical n-body problem'*, Invent. Math., **155**, pp. 305–362

[5] Gronchi, G., Fusco, G., Negrini, P.: 2007. *Platonic Polyhedra, Topological Constraints and Periodic Solutions of the Classical N-body problem*, Preprint

[6] C. Moore: 1993. *Braids in Classical Dynamics*, Phys. Rev. Lett. **70** no. 24, pp. 3675–3679

[7] Poincaré, H.: 1896. *'Sur Les Solutions Périodiques et le Principe de Moindre Action'*, C.R.A.S, t.123, pp. 915–918

ON THE DIVERGENCE OF ELONGATED PLATE IN SUPERSONIC GAS FLOW SUBJECTED TO COMPRESSING OR EXTENDING STRESSES

Petrov K.M., Tsyganov A.V., Loginov B.V.

Sofia TU, Ulyanovsk State Pedagogical University, Ulyanovsk State TU

The problem of thin flexible elongated plate (strip-plate) buckling in supersonic gas flow which is compressed or extended by external boundary stresses along the Ox-axis is investigated. Six types of boundary conditions are considered:
A. both edges are hingely fastened, $w(0)=0$, $w''(0)=0$; $w(1)=0$, $w''(1)=0$;
B. the left edge is free, the right one is rigidly fixed, $w''(0)=0$, $w'''(0)=0$; $w(1)=0$, $w'(1)=0$;
B$'$. the right edge is free, the left one is rigidly fixed, $w(0)=0$, $w'(0)=0$; $w''(1)=0$, $w'''(1)=0$;
C. both edges are rigidly fixed, $w(0)=0$, $w'(0)=0$; $w(1)=0$, $w'(1)=0$;
D. the left edge is fixed, the right one is rigidly fixed, $w'(0)=0$, $w'''(0)=0$; $w(1)=0$, $w'(1)=0$;
D$'$. the right edge is fixed, the left one is rigidly fixed, $w(0)=0$, $w'(0)=0$; $w'(1)=0$, $w'''(1)=0$.

In dimensionless variables the problem is described by the following equation

$$\chi^2\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{w''}{\left(1+w'^2\right)^{3/2}}\right)-T\frac{d^2w}{dx^2}=kK\Big(\frac{dw}{dx},M,\kappa\Big)+\theta w''\int_0^1\Big[\left(1+w'^2\right)^{1/2}-1\Big]dx,$$

where $K(w'_x,M,\kappa)=[1-(1+\frac{\kappa-1}{2}Mw'_x)^{\frac{2\kappa}{\kappa-1}}]$ for one-sided flow around and $K(w'_x,M,\kappa)=[(1-\frac{\kappa-1}{2}Mw'_x)^{\frac{2\kappa}{\kappa-1}}-(1+\frac{\kappa-1}{2}Mw'_x)^{\frac{2\kappa}{\kappa-1}}]$ for two-sided flow around by supersonic gas flow along the Ox-axis. Here $w=w(x)$ is the plate deflection, $0<x<1$; $x=\frac{x_1}{d}$, $0\le x_1\le d$, $-\infty<y_1<\infty$ are rectangular coordinates; $\chi^2=\frac{h^2}{12(1-\mu^2)d^2}$, $T=\frac{qd}{Eh}$ and $k=\frac{p_0d}{Eh}$; d is the width of the plate, h is its thickness; E is the Young module; μ is the Poisson coefficient; $q<0$ ($q>0$) is the compressing (extending) stress; M is the Mach number, p_0 is the pressure and κ is the polytropic exponent; the integral term takes into account the complementary force in the middle surface of the buckled plate, $\theta=\frac{1}{1-\mu^2}$.

In comparison with our previous results the integral term is introduced in the nonlinear equation taking into account complementary forces in the middle surface of the buckled plate.

The Lyapounov-Schmidt method of bifurcation theory is applied. In a neighborhood of each point of bifurcation curve small solutions asymptotics in form of convergent series of two small parameters are computed.

The main difficulties have arisen in the investigation of relevant two-parametric eigenvalue problems and were overcome with the aid of the bifurcation curves representation through the roots of the corresponding characteristic equation.

CONSTRUCTION OF BRANCHES SOLUTIONS BY REGULARIZED SUCCESSIVE APPROXIMATIONS METHOD

Sidorov N.A.*, Dreglea A.I.**

*Irkutsk State University, Russia

**Dublin Institute of Technology*

Existence theorems are proved for the branches of the solutions which are constructed by iterative loop method $x(\lambda) \to 0$ when $\lambda \to 0$ nonlinear equation

$$Bx = R(x, \lambda) \tag{1}$$

with Fredholm operator B and parameter $\lambda \in R^1$. Assume that $\{\phi_i\}_1^n, \{\psi_i\}_1^n$ is basis in $N(B)$, $N(B^*), R(0,0) = 0, R_x(0,0) = 0$. Let R_{ikj} are continuously differentiable i-homogeneous operators, $\nu, \theta_1, ..., \theta_n$ are rational positive numbers, $\nu < \min(\theta_1, ..., \theta_n)$ and following conditions are satisfied $a)\left\langle R(x,\lambda) - \sum\limits_{i\nu+k=\theta_j} \lambda^k R_{ik}(x), \psi_j \right\rangle = o\left(\sum\limits_{i\nu+k=\theta_j} ||x||^i |\lambda|^k \right), j = 1, ..., n;$

b) $\lim\limits_{\lambda \to 0} \lambda^\nu R(0, \lambda) = y, y \in R(B)$, x_0 - solution of the linear equation $Bx = y$;

c) System of equations $\sum\limits_{i\nu+k=\theta_j} \langle R_{ikj}(x_0 + c\phi), \phi_j \rangle = 0, j = 1, ..., n$ has simple solution $C^0 = (C_1^0, ..., C_n^0)$. Let us introduce $\gamma_j = \sum\limits_{i\nu+k=\theta_j} (R'_{ikj}(x_0 + c^0\phi))^* \psi_j$ and operator $\Phi(u, \lambda) =$

$= \lambda^{-\nu} R(x_0\lambda^\nu + u\lambda^\nu, \lambda) - y - \sum\limits_{j=1}^n \lambda^{-\theta_j} \langle R(x_0\lambda^\nu + u\lambda^\nu, \lambda), \psi_j \rangle z_j.$

Theorem 1. *Let conditions a), b), c) are satisfied. Then equation (1) has solution $x = \lambda^\nu(x_0 + u(\lambda))$, where $x \sim \lambda^\nu(x_0 + C^0\phi)$ when $\lambda \to 0$. Moreover, sequence $x_n = \lambda^\nu(x_0 + u_n)$, where u_n is unique solution of the linear equation*

$$(B + \sum_{j=1}^n \langle \cdot, \gamma_j \rangle z_j) u_n = \sum_{j=1}^n \langle u_{n-1}, \gamma_j \rangle z_j + \Phi(u_{n-1}, \lambda), u_0 = c^0\phi, n = 1, 2, ... \tag{2}$$

converge to the solution $x(\lambda)$ uniformly with respect to λ.

Theorem 2. *Let condition a) is satisfied, let $\lim\limits_{\lambda \to 0} \lambda^\nu R(0, \lambda) = 0$ and among uniform operators, satisfying condition a) are linear operators $R_{1m_1}, ..., R_{1m_n}$, $\det[< R_{1m_j}\phi_i, \psi_j >]_{i,j=1}^n \neq 0$. Then equation (1) has solution $x(\lambda) = \lambda^\nu u(\lambda)$ where $u(\lambda) = o(1)$, $\lambda \to 0$.* Moreover, sequence $x_n = \lambda^\nu u_n$, $n = 1, 2, ...$ $u_0 = 0$, where u_n- unique solution of linear equation (2), where $\gamma_j = R^*_{1m_j}\varphi_j$, $j = 1, ...n$, $\Phi(u, \lambda) = \lambda^{-\nu} R(\lambda^\nu u, \lambda) - \sum\limits_{j=1}^n \lambda^{-\Theta_j} < R(\lambda^\nu u, \lambda), \psi_j > z_j$, converges to the solution $x(\lambda)$ uniformly with respect to λ. Proof of the theorem (1) and (2) exploits equation $Bu = \Phi(u, \lambda)$, Schmidt-Trenogin lemma [1] and implicit function theorem. Proposed successive approximations scheme gives explicit parametrization unknown branches being single-stage (compare with [3], [4]). In paper examined examples of system solution of kind (1), demonstrates advantage of iteration scheme compared to other methods (see [1]-[5]).

References

[1] V.A.Trenogin, *Analyse Functionelle.* Mir, Moscow, 1985.

[2] N.A.Sidorov and V.A.Trenogin. In book *"Nonlinear Analysis and Nonlinear Differential Equations,"* V.A.Trenogin et al (Edts), Moscow. Fizmatlit, 2003, pp.5-50 (in Russian).

[4] N.A.Sidorov. Explicit and Implicit Parametrization in the Construction of Branching Solutions. Mat. Sb. 186 (1995) 129-141.

[5] N. Sidorov, B. Loginov, A. Sinitsyn, M. Falaleev, *Lyapunov-Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications,* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002.

REGULARIZATION OF NONLINEAR INTEGRAL-DIFFERENTIAL VOLTERRA EQUATIONS WITH FREDHOLM OPERATOR

Sidorov N.A.*, Sidorov D.N.**

**Irkutsk State University, Russia*

***Energy Systems Institute of SB RAS*

Cauchy problem is considered

$$B\dot{u} = Au + f(t) + \int\limits_0^t \mathcal{K}(t-s)g(s,u(s))ds, \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = u_0. \tag{2}$$

Here $B \in \mathcal{L}(E_1 \to E_2)$ — Fredholm operator, $\{\varphi_i\}_1^n, \{\psi_i\}_1^n$ — basis respectively in $N(B)$, $N(B^*)$, $\mathcal{K}(t) \in \mathcal{L}(E_1 \to E_2)$, $\{\psi_i^{(j)}\}$ $i = 1,...,n$, $j = 1,...,p_i$ — functionals which forms complete, A^*-Jordan set of operator B^* [1], $p = \max(p_1,...,p_n)$, $\mathcal{K}^{(i)}(0) = 0$, $i = 0,1,...,p-1$ at $p \geq 2$, nonlinear operator $g : R' \times E_1 \to E_1$ differentiated with respect to u in neighborhood of $(0, u_0)$. E_1, E_2-Banach spaces, $f(t) \in C^{(p)}$.

Lemma. If

$$\left\langle Au_0 + f(0), \psi_i^{(j)} \right\rangle + \left\langle f^{(1)}(0), \psi_i^{(j-1)} \right\rangle + ... + \left\langle f^{(j-1)}(0), \psi_i^{(1)} \right\rangle = 0,$$
$$i = 1,...,n, j = 1,...,p_i, \tag{3}$$

then problem (1),(2) has unique classical solution.

Let u_0 and f taken with δ-error/ approximation. Then inequalities (3) can't be satisfied with taken approximation, Cauchy problem (1),(2) in general case resolvable only in class of generalized functions [2]. Therefore in view of unavoidable calculation errors for problem (1),(2) with δ-approximated data it is necessary to develop regularization in Tikhonov sense.

Theorem 1. Let for exact solution (1) lemma conditions are satisfied. Let introduce elements z_i and functionals $\gamma_i = A^*\psi_i^{(p_i)}$, such that $\det[\langle \psi_i, z_j \rangle]_{i,j=1}^n \neq 0$, $\det[\langle \gamma_i, \varphi_j \rangle]_{i,j=1}^n \neq 0$. Then operator $\widehat{B} = B + \sum\limits_1^n \langle \cdot, \gamma_j \rangle z_i$ continuously inverse, but equation

$$\widehat{B}\dot{u} = Au + \Phi(u,t) - \sum_{i=1}^n [\frac{d}{dt} \left\langle \Phi(u,t), \psi_i^{(p_i)} \right\rangle + ... + \frac{d^{p_i}}{dt^{p_i}} \left\langle \Phi(u,t), \psi_i^{(1)} \right\rangle] z_i \tag{4}$$

with condition $u|_{t=0} = \tilde{u_0}$, where $\Phi(u,t) = \tilde{f}(t) + \int\limits_0^t \tilde{\mathcal{K}}(t-s)\tilde{g}(s,u(s))ds$, $\tilde{\mathcal{K}}^{(i)}(0) = 0, ..., i = 0,1,...p-1$, $p \geq 2$, will be regularizing for all δ-approximated data has unique solution $\tilde{u}(t)$ in neighborhood $|t| \leq \rho$. In addition for $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ such that$\|\tilde{u}(t) - u(t)\| \leq \varepsilon$, where u is the exact solution of Cauchy problem (1), (2).

Supported by NATO grant No RIG 981276 and RFBR Grant No 05-01-00336.

References

[1] Vainberg, M.M. and Trenogin, V.A., The Theory of Branching Solutions of Nonlinear Equations, Noordho Intl. Publ., Leyden, 1974.

[2] Sidorov, N., Loginov, B., Sinitsyn, A., and Falaleev M., Lyapunov-Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications, Dordrecht: Kluwer, 2002.

NEW WAY FOR THE PDE SOLUTIONS CONSTRUCTING

Volosov K.A.

Moscow State University of Railway Engineering, Russia

The new property of partial equations is found. It allows to construct new solutions in the implicit form. The solutions of the classical equations, such as Zeldovich equation, Kolmogorov-Petrovsky-Piskunov-Fisher equation were constructed. In the papers [1], [2], the case with coefficients independent from t is considered.

Consider, for example, the quasilinear parabolic equation and let us make change of variables

$$Z'_t - (P(t,Z)Z'_x)'_x + f(t,Z) = 0, \quad Z(x,t)|_{x=x(\xi,\delta),t=t(\xi,\delta)} = U(\xi,\delta), \tag{1}$$

where function $Z(x,t)$ is solution of the equation (1); $detJ \neq 0$. Let us denote $r = P(t(\xi,\delta),U(\xi,\delta))$. Let us assume, that the relation for flows have the form $rZ'_x = Y(\xi,\delta),\ rZ'_t = T(\xi,\delta)$. Then we obtain

$$r(U'_\xi t'_\delta - U''_\delta t'_\xi) = Y(\xi,\delta)detJ, \quad r(-U'_\xi x'_\delta + U'_\delta x'_\xi) = T(\xi,\delta)detJ. \tag{2}$$

The equation (1), after all substitutions takes the form

$$T(\xi,\delta) - P(t(\xi,\delta),U)(Y'_\xi t'_\delta - Y'_\delta t'_\xi)/detJ + P(t(\xi,\delta),U)f(t(\xi,\delta),U) = 0. \tag{3}$$

The equality for mixed derivative has to be true $Z''_{x,t} = Z''_{t,x}$. This relation can be rewritten as follows

$$-\frac{\partial}{\partial\xi}[\frac{Y}{r}]\frac{\partial x}{\partial\delta} + \frac{\partial}{\partial\delta}[\frac{Y}{r}]\frac{\partial x}{\partial\xi} - \frac{\partial}{\partial\xi}[\frac{T}{r}]\frac{\partial t}{\partial\delta} + \frac{\partial}{\partial\delta}[\frac{T}{r}]\frac{\partial t}{\partial\xi} = 0. \tag{4}$$

The analysis of the system (2)-(4) is divided into two stages. At the first stage, we shall suppose that the nonlinear algebraic system derivatives $x'_\xi, x'_\delta, t'_\xi, t'_\delta$ has unique solution. We can found

$$x'_\xi = g_1(\xi,\delta,t(\xi,\delta)),\ x'_\delta = g_2(\xi,\delta,t(\xi,\delta)),\ t'_\xi = g_3(\xi,\delta,t(\xi,\delta)),\ t'_\delta = g_4(\xi,\delta,t(\xi,\delta)). \tag{5}$$

At the second stage we shall formulate a condition of solvability of the system (5) concerning functions $x = x(\xi,\delta)$, $t = t(\xi,\delta)$. The necessary condition of solvability of the system for functions x, t have the form $[g'_{1\delta} - g'_{2\xi}]/T|_{t'_\xi=g_3,\ t'_\delta=g_4} \equiv [g'_{3\delta} - g'_{4\xi}]/Y|_{t'_\xi=g_3,\ t'_\delta=g_4} = 0$. These two conditions **coincide** at any smooth functions $Y(\xi,\delta)$, $T(\xi,\delta)$, $P(t,Z)$, $f(t,Z)$.

Lemma. *Let equation (1)* $K(Z) = 1,\ F(Z) = -U^2(1-U)$ *have the solution* $Z(x,t) \in [0,1]$ *in implicit form* (1).

The functions $t(\xi,\delta) = 6\sqrt{2}\xi$, *and* $x(\xi,\delta)$ *are defined from this system*

$x'_\xi = \frac{6(U-U^2+\rho-3U\rho)}{U-U^2+\rho} + \frac{u'_\xi}{G(\xi,U)}$, $x'_\delta = \frac{u'_\delta}{G_1(\xi,U)}$, *where* $\rho = U(U-1) - \sqrt{2}G(\xi,U)$.

For function $G(\xi,U)$ *we have the equation*

$\frac{\sqrt{2}(1-U)-18\xi\rho}{\sqrt{2}\rho} - \ln(\sqrt{2}\rho) + \ln(\sqrt{2}(U+\rho)) = 0.$

References

[1] K.A. Volosov. Conference: Some actual problems of modern mathematics. R Pedagogical SU, 17-22 04.2006, S.P. Russia p.35-40.

[2] K.A. Volosov. Diff. uravnenia. 2007., v.43, n.4.

К ТЕОРЕМЕ Н.Г. ЧЕТАЕВА О НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Андреев А.Ф.

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

Имеется в виду известная теорема Н.Г. Четаева о неустойчивости по Ляпунову положения равновесия системы дифференциальных уравнений. Небольшая модификация ее условий позволяет сформулировать параллельный (дополнительный) ее вариант, при учете которого расширяются ее возможности: расширяется класс функций, которые могут играть роль функций Четаева — в этот класс могут входить даже линейные функции.

Литература

[1] Четаев Н.Г. Одна теорема о неустойчивости // ДАН СССР. 1934. Т. 1, № 9.
[2] Четаев Н.Г. Устойчивость движения. М.: ГИТТЛ. 1955. 208 с.

On the Chetaev Theorem about Nonstability

Andreev A.F.

Saint Petersburg State University, Russia

Some modification of the conditions of the famous Chetaev theorem allows to extend the class of Chetaev functions (even linear functions may belong this class).

ОБ ОПТИМИЗАЦИИ НАЧАЛЬНОЙ ФОРМЫ АБЛИРУЮЩЕГО ТЕЛА

Аргучинцева М.А.

Иркутский государственный университет, Россия

В работе исследуется следующая оптимизационная задача. В классе гладких функций необходимо найти начальную форму осесимметричного тела $y_0(x)$, которая подчиняется уравнению абляции, описывающему обгар тела за счет радиационного нагрева

$$\frac{\dot{y}_t}{\sqrt{1+\dot{y}_x^2}} = -\frac{q_R(y(x,t))}{H_{ef}\rho_T},\ \dot{y}_t = \frac{\partial y}{\partial t},\ \dot{y}_x = \frac{\partial y}{\partial x},$$

$$y(x,0) = y_0(x),\ y_0(0) = 0,\ y_0(L) = R,$$

системе уравнений движения по баллистической траектории

$$\begin{aligned} M\frac{dv}{dt} &= -\frac{1}{2}\rho v^2 C_B S + Mg\sin\gamma, \\ \frac{d\gamma}{dt} &= \cos\gamma\left(\frac{g}{v} - \frac{v}{R_E}\right), \\ \frac{dH}{dt} &= -v\sin\gamma, \end{aligned}$$

$$\rho = \rho_0 e^{-\lambda H},\ \ H(0) = H_0,\ \ v(0) = v_0,\ \ \gamma(0) = \gamma_0,$$

ограничению на массу аппарата $M \geq M_*$ и минимизирует функционал суммарного радиационного нагрева

$$Q_R = 2\pi\int\limits_0^T\int\limits_{x_0}^L y(x,t)\sqrt{1+\dot{y}_x^2(x,t)}q_R(y(x,t))dxdt.$$

Здесь t — время ($t \in [0,T]$); v, C_B, M, L, R, S — соответственно скорость, коэффициент волнового сопротивления, масса, длина, радиус и площадь донного сечения тела; ρ, ρ_0 — плотности газа на высоте H и на поверхности планеты; $(1/\lambda)$ — шкала высот для плотности; γ — угол наклона траектории движения; g — ускорение свободного падения; R_E — средний радиус планеты; x — координата вдоль оси тела; $y = y(x,t)$ — функция формы тела; H_{ef} — эффективная энтальпия разрушения теплозащитного покрытия; ρ_T — плотность тела. Выражения для массы тела M, коэффициентов волнового сопротивления C_B и локального радиационного потока q_R явным образом зависят от формы тела $y(x,t)$.

Для решения поставленной задачи использовался численный метод локальных вариаций. Система уравнений движения интегрировалась методом Рунге-Кутта 4-го порядка. Для решения уравнения абляции в случае тонких тел вращения использовалась неявная разностная схема. Для более общего случая нетонких осесимметричных тел применялся явно-неявный метод.

Была проведена серия расчетов оптимальных начальных форм осесимметричных тел в широком спектре условий входа в атмосферу Земли и заданных геометрических характеристик тела. Сравнение полученных начальных форм тел с традиционными телами (степенными телами и острым конусом) показало, что использование оптимальных форм тел позволяет снизить суммарный радиационный нагрев поверхности до 50%.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 05-01-00187).

On the Optimization of the Initial Shape of an Ablating Body

Arguchintseva M.A.

Irkutsk State University, Russia

In the present report, the ablation of an axisymmetric body due to radiation is studied. The initial body shape satisfying the ablation equation is found as a solution of an optimization problem. The set of differential equations is solved numerically using the local variation method. Optimal initial shapes have been calculated for a wide range of reentry conditions and geometric characteristics. Using the optimized shapes allows to reduce significantly the radiative heating.

ОБОБЩЕННЫЙ ПРИНЦИП ЛОКАЛИЗАЦИИ ДЛЯ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА НА СФЕРЕ

Ахмедов А.А.

Ошский Кыргызско-Узбекский Университет, Кыргызстан

Пусть S^N единичная сфера в R^{N+1}. Обозначим через Δ_S оператор Лапласа на сфере S^N. Оператор $-\Delta_S$ как формальный дифференциальный оператор, определенный в пространстве $C^\infty(S^N)$, является симметрическим, неотрицательным и существенно самосопряженным, т.е его замыкание — $\overline{\Delta}_S$ самосопряженный оператор в $L_2(S^N)$. Собственные функции $Y^k(x)$ оператора — Δ_S, которые являются однородными гармоническими полиномами на сфере, называются сферическими гармониками.

Сферические гармоники степени k и l, $k \neq l$, взаимно ортогональны, $\int_{S^N} Y^k(x) \cdot Y^l(x) \cdot d\sigma(x) = 0$. Более того, собственные значения оператора — Δ_S равны $\lambda = k(k+n-1)$, где $k = 0, 1, 2, \ldots$, причем его кратность a_k равна размерности пространства однородных гармонических полиномов степени k:

$$a_k = N_k - N_{k-2}, \quad \text{где} \quad N_k = \frac{(N+k)!}{N! \cdot k!}.$$

Таким образом, каждому k соответствует ровно a_k штук сферических гармоник $\{Y_j^k\}_{j=1}^{a_k}$, являющихся собственными функциями оператора — Δ_S, соответствующих собственному значению $\lambda = k(k+n-1)$. Более того, семейство функций $\{Y_j^k\}_{j=1}^{a_k}$ образует ортонормированный базис в пространстве сферических гармоник степени k, которое обозначим через $\aleph_\kappa$.

Заметим, что любая функция $f \in L_2(S^N)$ единственным образом разлагается в ряд по сферическим гармоникам $Y^k(x)$. Такой ряд называется рядом Фурье-Лапласа на сфере и определяется равенством:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} f_{k,j} \cdot Y_j^k(x). \tag{1}$$

Определим средние Рисса порядка α частичных сумм ряда Фурье-Лапласа (1) функции $f(x)$ равенством

$$S_n^\alpha f(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_n}\right)^\alpha \sum_{j=1}^{a_k} f_{k,j} \cdot Y_j^k(x). \tag{2}$$

Суммируемость почти всюду спектральных разложений функций из L_p, $1 \le p \le 2$, связанных с различными эллиптическими операторами, изучена в работах многих математиков. В частности, в работе [1] И. Стейном изучались разложения в кратные интегралы и ряды Фурье и доказана суммируемость средних Рисса при $s > (N-1)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right)$. Им же построен пример функции из L_1 такой, что почти всюду выполняется $\overline{\lim\limits_{\lambda \to \infty}} \left| E_\lambda^{\frac{N-1}{2}} f \right| = +\infty$.

Будем говорить, что для средних Рисса $S_n^\alpha f(x)$ справедлив принцип локализации в классе $L_p(S^N)$, если для произвольной функции f из $L_p(S^N)$ такой, что $f(x) = 0$ при $x \in V \subset S^N$, почти всюду на V выполняется равенство $\lim\limits_{n \to \infty} S_n^\alpha f(x) = 0$.

Если же для выполнения этого равенства необходимо, чтобы $f(x) = 0$ не только в окрестности точки x, но и в окрестности точки $\bar{x}$, то говорят, что справедлив принцип локализации в слабом смысле.

Теорема. Пусть $f \in L_1(S^N)$ и пусть $f(x) = 0$ при $x \in V \subset S^N$. Тогда почти всюду на V ряд Фурье-Лапласа функции f сходится к нулю средними Рисса порядка $\frac{N-1}{2}$.

Другими словами теорема утверждает, что принцип обобщенной локализации для чезаровских средних критического порядка рядов Фурье-Лапласа на сфере справедлив в классе $L_1(S^N)$.

В работе [2] В.В. Хочолава доказал справедливость принципа локализации в слабом смысле средних Чезаро критического порядка рядов Фурье-Лапласа на сфере функций из класса $L(S^N)$. В работе [3] А.Й. Бастис доказал справедливость принципа обобщенной локализации ряда Фурье-Лапласа на сфере в классе $L(S^N)$.

Литература

[1] Stein. A.A. Localization and summability of multiple Fourier Series, Act. Math, 100:1-2 (1958), pp. 93–147.

[2] Hocholova V.V. Localization in weak sense for Fourier series of Laplace on sphere, Scientific works of the Gurge polytechnic university, 285:3 (1985), pp. 9–17.

[3] Bastis A.J. About a convergence almost everywhere of spectral expansions of functions from L_1^α // Math. Notes, 1983, T.34, 4, pp. 528–600.

Generalized Localization Principle for Spectral Expansions of the Laplace Operator on a Sphere

Akhmedov A.A.

Osh Kyrgyz-Uzbeck University, Kyrgyzstan

In this paper the sufficient conditions for summability of spectral expansions of the Laplace operator on a sphere are proved.

ОБ ОСОБЫХ ТОЧКАХ НЕСТАЦИОНАРНОГО ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Бирюков Р.С., Бутенина Н.Н.

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского, Россия

При численном исследовании математической модели укладки глубоководного трубопровода [1]

$$\ddot{x} = \sin x - (Bt - V)\cos x,\ x(0) = \dot{x}(0) = \dot{x}(L) = 0,\ 0 < x(L) < \pi/2 \tag{1}$$

было замечено, что существует значение $V = V^*$ (при фиксированном B), определяющее интервал значений $0 < V < V^*$, при которых задача имеет решение; при этом существует x^* такое, что $0 < x(L) < x^* < \pi/2$. При любых V, $V > V^*$, траектория, удовлетворяющая условиям $x(0) = \dot{x}(0) = 0$, при возрастании t выходит из полуполосы $\{0 < x < \pi/2,\ y > 0\}$ через луч $\{x = \pi/2,\ y > 0\}$. Поведение траекторий в окрестности точки $(x^*, 0)$ при значениях параметра V, близких к V^*, аналогично поведению траекторий автономной системы в окрестности седла.

Эта задача положила начало исследованию особых точек неавтономных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим неавтономную систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = G_0(x) + u(t)G_1(x) = G(x,t), \tag{2}$$

где $x = (x_1, x_2) \in D$, $G_i(x) = (P_i(x), Q_i(x))$ $(i = 0,1)$ — вектор-функции класса C^k $(k \geq 2)$, $u(t)$ — непрерывная ограниченная $(m \leq u(t) \leq n)$ функция, определенная для всех $t \in (-\infty, +\infty)$.

Качественное исследование поведения решений системы (2) проводится методом сравнения векторного поля системы (2) с векторными полями автономных μ-систем. Каждая μ-система — это система (2), в которой $u(t) = \mu$, $u_1 \leq \mu \leq u_2$. Известно, что состояния равновесия μ-систем лежат на кривой $F = P_0Q_1 - P_1Q_0 = 0$ (так называемая контактная кривая) [1].

Определение. Особой точкой системы (2) назовем точку (x^*, t^*), в которой $G(x^*, t^*) = 0$.

Система (2) является конкретным представителем семейства УДС с аффинным скалярным управлением [1]. Поэтому особые точки этой системы расположены над кривой $F = 0$ в пространстве (x, t). Заметим, что при $t = t^*$ неавтономная система (2) совпадает с одной из μ-систем ($\mu = f(t^*)$), следовательно, поведение решений системы (2) в окрестности особой точки определяется характером состояния равновесия соответствующей μ-системы. Именно, в системе (1) точка $(x^*, 0)$ является состоянием равновесия типа седло соответствующей μ-системы, поэтому, при значениях параметра $V \in U_\varepsilon(V^*)$, интегральные кривые системы (1) в окрестности x^* ведут себя аналогично траекториям седла μ-системы. В случае, когда соответствующая μ-система имеет состояние равновесия типа фокус (центр), интегральная кривая системы (2), проходящая через особую точку, имеет в ней точку возврата 1 рода.

Литература

[1] Н.Н. Бутенина, А.В. Метрикин «Об особенностях поведения фазовых траекторий в математической модели прокладки глубоководного трубопровода J-методом» // Сбор-ник научных трудов Нижегородского филиала ИМАШ РАН «Волновые задачи меха-ники», Н. Новгород, 2005. С. 9–19.

On Singular Points of a Non-Stationary Vector Field

Biryukov R.S., Butenina N.N.

Nizhny Novgorod State University, Russia

A nonautonomous dynamic system of the second order of the class of controlled dynamical systems with limited affine control (CDS) is considered. A singular point of the vector field is the same as the state of equilibrium of on auxiliary autonomous system. A behavior of nonautonomous system solutions in the neighborhood of the singular point is defined completely by the type of the state of equilibrium.

УВЕЛИЧЕНИЕ ПАРАМЕТРА КВАДРАТИЧНОЙ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ ПРИ УВЕЛИЧЕНИИ ЧИСЛА КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ

Бочкарёв Г.П.

Пермский государственный технический университет, Россия

Рассмотрим краевую вариационную задачу, заданную следующим образом:

$$\Phi x = \int_0^b \Big((\varphi x)^2 - p(Tx)^2 \Big) \to \min, lx = 0.$$

Здесь $T\colon H^n \to L_2$ – линейный ограниченный оператор, $l = \{l_1, \dots, l_N\}$, каждое l_i имеет вид $l_i x \equiv x(a_i) = 0$, $a_i \in [0, b], \varphi \in L_2$. Здесь H^n пространство функций, n-я производная которых принадлежит L_2, пространству суммируемых с квадратом функций.

Используем методы Пермского семинара. Рассмотрим модельную задачу (слева) и её решение (справа)

$$\varphi x'' = z,\ x(0) = x(b) = 0, \qquad x = \int_0^b \frac{G(t,s)z(s)}{\varphi(s)} ds = \Lambda z.$$

Подставив это выражение, называемое W-подстановкой, в Φ, и преобразовав полученный в L_2 функционал, получим, используя обозначения $Q = T\Lambda$, $K_0 = Q^*Q$, $K = pK_0$, $H = I - K$:

$$\Phi_1 z = \int_0^b \Big(z(t) - p(K_0 z)(t) \Big) z(t) dt = \int_0^b \Big(z(t) - (Kz)(t) \Big) z(t) dt = \int_0^b (Hz)(t) z(t) ds.$$

Согласно [1], минимумы функционалов Φ и Φ_1 взаимно однозначно соответствуют друг другу, а минимумом (единственным) последнего является решение уравнения $Hz = 0$, если оператор H строго положительно определён. В [2] говорится, что $\|K\| < 1$ – достаточное условие положительной определённости оператора H. В нашем случае это неравенство эквивалентно следующему $p < \|K_0\|^{-1}$. Таким образом, точная верхняя грань $\overline{p_2}$ в случае двухточечной задачи:

$$\overline{p_2} = \|K_0\|^{-1}.$$

Добавим теперь третье краевое условие $x(a_3) = 0$. При W-подстановке оно преобразуется к виду (обозначим $l_{(3)}(s) = G(a_3, s)/\varphi(s)$): $(l_{(3)}, z) = 0$. На ортогональности решения элементу $l_{(3)}$ основан метод двойной W-подстановки [3]. Оператор P_3 с ядром

$$\frac{l_{(3)}(t) l_{(3)}(s)}{(l_{(3)}, l_{(3)})}$$

является ортопроектором на подпространство, определяемое элементом $l_{(3)}$, а $I - P_3$ на его ортогональное дополнение. Если оператор $H_3 = I - (I - P_3)K = I - pK_{0_3} = I - K_3$ строго положительно определён, то решение уравнения $H_3 z = 0$ является условным минимумом функционала Φ_1 и решением вариационной задачи. Это гарантируется выполнением условия $\|K_3\| < 1$. Очевидно, $\|I - P_3\| < 1$. Следовательно, $\|K_3\| < \|K\|$, отсюда, очевидно, что условие выполнено, а $\|K_{0_3}\| < \|K_0\|$. Условие на p имеет вид $p < \|K_{0_3}\|^{-1}$. Таким образом, точная верхняя грань $\overline{p_2}$ в случае двухточечной задачи:

$$\overline{p_3} = \|K_{0_3}\|^{-1} > \|K_0\|^{-1} = \overline{p_2}.$$

Методом математической индукции доказывается для $q_1 < q_2$: $\overline{p_{q_1}} < \overline{p_{q_2}}$.

Литература

[1] Азбелев, Максимов, Рахматуллина. Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. – Москва, Ин-т комп. иссл., 2002 – 384 с.

[2] Азбелев, Култышев, Цалюк. Функционально-дифференциальные уравнения и вариационные задачи. – Москва-Ижевск, РХД, 2006.

[3] Цалюк. Метод двойной W-подстановкидля решения переопределённой квадратичной задачи – Рязань, Известия РАЕН. Дифференциальные уравнения, 2006, Т. 10, № 10, с. 72-80.

Increasing of the Quadratic Variational Problem Parameter with Rising the Number of Boundary Conditions

Bochkarev G.P.

Perm State Technical University

A quadratic variational initial boundary value problem is studied using the methods of Perm seminar.

ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ В МЕХАНИКЕ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ СИСТЕМ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Будочкина С.А.

Российский университет дружбы народов, Москва

Рассмотрим действие по Гамильтону вида

$$F_N^{t_1}[u] = \int_{t_0}^{t_1} \{< R_2 u_t, u_t > + < R_1(u) - \frac{\partial R_2}{\partial t} u, u_t > + B[u]\} dt + F_N^{t_1}[u_0]. \tag{1}$$

Функции $u(t)$ поставим в соответствие функцию $\overline{u}(t,\varepsilon)$ по правилу

$$\overline{u} = u + \varepsilon S(u). \tag{2}$$

Определение. Преобразование (2) называется симметрией до дивергенции действия по Гамильтону (1) на W, если существует функционал f такой, что

$$F_N^{T_1}[u+\varepsilon S(u)] = F_N^{T_1}[u] + \varepsilon \int_{t_0}^{T_1} D_t f[u] dt + r(u, \varepsilon S(u)) \;\; \forall u \in W, \forall T_1 : t_o \leq T_1 \leq t_1,$$

причем $\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{r(u,\varepsilon S(u))}{\varepsilon} = 0$.

Получены условия инвариантности до дивергенции действия по Гамильтону (1) и дан общий вид первых интегралов уравнений движения систем с бесконечным числом степеней свободы.

Теорема. *Если преобразование (2) – симметрия до дивергенции (1) на W, то выражение*

$$I[u] = < (R_2 + R_2^*) u_t + R_1(u) - \frac{\partial R_2}{\partial t} u, S(u) > - f[u]$$

определяет первый интеграл уравнения Эйлера-Лагранжа, соответствующего (1).

Теоретические результаты иллюстрируются конкретными примерами.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 06-01-00341а и № 06-01-04006-ННИО-а)

Л и т е р а т у р а

[1] *Савчин В. М.* Математические методы механики бесконечномерных непотенциальных систем. М.: Изд-во РУДН (1991).

[2] *Савчин В. М., Будочкина С. А.* О структуре вариационного уравнения эволюционного типа со второй производной по t *Дифференциальные уравнения.* Т.**39** (**1**) (2003), 118-124.

First Integrals in Mechanics of the Helmholtz Systems with Infinite Number of Degrees of Freedom

Budochkina S.A.

Russian Peoples' Friendship University, Moscow

Structure of some first integrals of Euler-Lagrange's equation corresponding to the given functional is obtained.

К ВОПРОСУ О ЛЯПУНОВСКОЙ ПРИВОДИМОСТИ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Быкова Т.С.

ГОУВПО «Ижевский государственный технический университет», Россия

Рассматривается система уравнений с последействием

$$\dot{x} = \int_{-r}^{0} dA(t,s)x_t(s), \quad t \in (-\infty, +\infty), \tag{1}$$

где функция $A\colon R \times [-r,0] \to M(n,R)$ удовлетворяет условиям, обеспечивающим правостороннее существование, единственность и непрерывную зависимость от начальных данных решения задачи Коши для системы (1). Здесь запись x_t означает функцию $s \to x_t(s) \doteq x(t+s)$ переменного $s \in [-r,0]$ со значениями в R^n.

В качестве пространства начальных функций рассматривается пространство S всех непрерывных функций $u\colon [-r,0] \to R^n$. Всякое решение $t \to x(t,u)$ системы (1), удовлетворяющее при $t \in [-r,0]$ начальному условию $x(t) = u(t)$, порождает *движение* $t \to x_t(\cdot,u)$ в пространстве S.

L_2-показателем Ляпунова движения $t \to x_t(\cdot,u)$ системы (1) будем называть число

$$\lambda(u) = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\ln \|x_t(\cdot,u)\|_2}{t}, \;\text{ где }\; \|u\|_2 = \left(\int_{-r}^{0} |u(s)|^2 ds\right)^{1/2}.$$

Пусть $S^- = \{u \in S\colon \lambda(u) = -\infty\}$, S^+ — прямое дополнение подпространства S^- до пространства S, т. е. $S = S^+ \oplus S^-$.

Доказано, что сужение системы (1) на конечномерное (размерности p) подпространство пространства S^+, приводимо ортогональным ляпуновским преобразованием к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{y} = B(t)y, \;\; t \geq 0, \;\; y \in R^p$$

с непрерывной верхней треугольной матрицей B. Получены достаточные условия, при которых $B(t)$ ограничена на R.

Для системы (1) с рекуррентной по времени t правой частью: для любых $\varepsilon > 0$ и $T > 0$ множество

$$\Theta_A(\varepsilon,T) \doteq \left\{\vartheta \in R\colon \max_{|t|\leq T}\left(|A(t+\vartheta,0) - A(t,0)| + \int\limits_{-r}^{0} |A(t+\vartheta,s) - A(t,s)|ds\right) \leq \varepsilon\right\}$$

относительно плотно на прямой R, показано, что матрица $B(t)$ ограничена на R при более слабых условиях, чем в случае системы (1) общего вида.

Основные результаты опубликованы в [1-3].

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 06-01-00258).

Литература

[1] Быкова Т.С., Тонков Е.Л. Ляпуновская приводимость линейной системы с последействием // Дифференциальные уравнения. 2003. Т. 39. № 6. С.731-737.

[2] Быкова Т.С., Тонков Е.Л. Приводимость линейной системы с последействием // Труды Института математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2005. Т. 11, № 1. С. 53-64.

[3] Быкова Т.С. О приводимости линейной рекуррентной системы с наследственностью // Известия ИМИ УдГУ. Ижевск. 2006. Вып. 3(37). С. 17-18.

On Lyapynov Reducibility of Systems with Aftereffect

Bykova T.C.

Izhevsk State Technical University, Russia

We show that under certain assumptions the restriction of a linear system with aftereffect and finite Lyapunov index to a finite-dimensional solutions subspace is asymptotically homothetic to a system of ordinary differential equations.

We obtain the sufficient conditions under which the restriction of a system with aftereffect subspace with the right-hand side recurrent with respect to time t to the finite dimensional solutions subspace is asymptotically homothetic to a system of ordinary differential equations with bounded and continuous upper triangle matrix of coefficients.

О СУЩЕСТВОВАНИИ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА В ЗАДАЧАХ УСТОЙЧИВОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

Гладилина Р.И., Игнатьев А.О.

Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Донецк

Одним из наиболее эффективных методов исследования устойчивости нелинейных импульсных систем является прямой метод Ляпунова. Вместе с тем, подавляющее большинство опубликованных работ, использующих метод функций Ляпунова, посвящено установлению достаточных признаков устойчивости решений импульсных систем, в то время, как проблема существования функций Ляпунова остается мало исследованной, что вызвано сложностью решения такой задачи.

Рассмотрим нелинейную импульсную систему [1].

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{dx}{dt} & = & f_i(t,x), \quad t \in [\tau_{i-1}, \tau_i) \quad i \in N, \\ \Delta x & = & x(\tau_i + 0) - x(\tau_i - 0) = I_i(x), \quad t = \tau_i, \quad i \in N, \\ x(t_0^+) & = & x_0, \end{array} \tag{1}$$

где $t \in R_+,\ x \in \Omega \subset R^n,\ f : R_+ \times \Omega \to R^n,\ f(t,x) \in Lip(x),\ f(t,0) \equiv 0;\ I_i : \Omega \to R^n, I_i(x) \in Lip,$ $I_i(0) \equiv 0;\ 0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots;\ \tau_i \to \infty$ при $i \to \infty$.

Решение $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ системы (1) предполагается непрерывным слева в точках $t = \tau_i$.

С помощью разрывных кусочно-дифференцируемых функций Ляпунова получены необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1) как по всем, так и по части переменных, что обосновывает универсальность прямого метода Ляпунова.

Литература

[1] *Samoilenko A, Perestyuk N.* Impulsive differential equations. Singapure - New Jersey - London: Word Scientific, 1995.

On the Existence of Lyapunov Functions for the Stability Problem of Differential Systems with Impulse Effect

Gladilina R.I., Ignatiev A.O.

Institute of Applied Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Ukraine, Donetsk

The stability problem of the solutions of nonline impulsive systems was studied by means of Lyapunov functions. Direct and converse theorems of uniform asymptotic stability were proved.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ $F(t,x,x')=0,\ x(0)=0$

Зернов А.Е., Кузина Ю.В.

Южноукраинский государственный педагогический университет им. К.Д. Ушинского, Одесса, Украина

В докладе изложены некоторые результаты, полученные при качественном анализе задач Коши

$$x'(t)=F(t,x(t),x'(t)),\ x(0)=0,$$
$$\textstyle\sum_{k=1}^{m}=(a_{1k}t+a_{2k}(t))(x'(t))^k=b_1t+b_2x(t)+f(t,x(t),x'(t)),\ x(0)=0,$$
$$t^\alpha(x(t))^\beta(x'(t))^\gamma=b_1t+b_2x(t)+f(t,x(t),x'(t)),\ x(0)=0,$$
$$P(t,x(t),x'(t))+f(t,x(t),x'(t))=0,\ x(0)=0,$$

где $x\colon(0,\tau)\to\mathbb{R}$ — неизвестная функция, $F\colon D\to\mathbb{R}$ и $f\colon D\to\mathbb{R}$ — непрерывные функции, $D\subset(0,\tau)\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, P — многочлен от своих переменных, a_{1k} и a_{2k} ($k\in\{1,\dots,m\}$), b_1, b_2 — постоянные, α, β — целые неотрицательные, γ — натуральное, $\alpha+\beta\geq 1$, функция f в некотором смысле мала.

Решением каждой из этих задач называется непрерывно дифференцируемая функция $x\colon(0,\rho]\to\mathbb{R}$ $(0<\rho<\tau)$, которая при всех $t\in(0,\rho]$ удовлетворяет соответствующему дифференциальному уравнению, причем $x(t)\to 0$ при $t\to+0$.

Исследуется вопрос о существовании указанных задач решений $x\colon(0,\rho]\to\mathbb{R}$, (где ρ — достаточно мало), удовлетворяющих одному из условий:

$$x(t)=(c_1+o(1))t,\quad t\to+0,$$

или

$$x(t)=\sum_{k=1}^{N}c_kt^k+o(t^N),\quad t\to+0,$$

где все $c_1,\dots,c_N$ — известные постоянные. Изучается асимптотическое поведение первых производных этих решений при $t\to+0$. Выясняется вопрос о количестве таких решений.

An Asymptotic Behavior of Solutions of the Initial Value Problem $F(t,x,x')=0,\ x(0)=0$

Zernov A.E., Kuzina Yu.V.

South Ukrainian State Pedagogical University, Odessa, Ukraine

We prove that some classes of implicit initial value problem possess nonempty sets of continuously differentiable solutions with required properties. We use qualitative methods.

СИНГУЛЯРНЫЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ: РАЗРЕШИМОСТЬ, КОЛИЧЕСТВО РЕШЕНИЙ, АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЙ

Зернов А.Е., Чайчук О.Р.

Южноукраинский государственный педагогический университет им. К.Д. Ушинского, Одесса, Украина

Рассматриваются задачи Коши вида

$$\alpha(t)x'(t) = f(t, x(t), x(g(t)), x'(t), x'(h(t))), \quad x(0) = 0, \tag{1}$$

где $x\colon (0,\tau) \to \mathbb{R}$ — неизвестная функция, $\alpha\colon (0,\tau) \to (0,+\infty)$ — непрерывная функция, $\lim\limits_{t\to+0} \alpha(t) = 0$, $g\colon (0,\tau) \to (0,+\infty)$, $h\colon (0,\tau) \to (0,+\infty)$ — непрерывные функции, $0 < g(t) \le t$, $0 < h(t) \le t$, $t \in (0,\tau)$, $f\colon D \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, $D \subset (0,\tau)\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Решением задачи (1) называется непрерывно дифференцируемая функция $x\colon (0,\rho] \to \mathbb{R}$, которая удовлетворяет уравнению (1) при всех $t \in (0,\rho]$ и при этом $\lim\limits_{t\to+0} x(t) = 0$.

Исследуются линейные, возмущенные линейные, нелинейные и возмущенные нелинейные сингулярные задачи вида (1). Формулируются эффективные достаточные условия, при которых каждая задача указанного вида имеет непустое множество решений $x\colon (0,\rho] \to \mathbb{R}$ (ρ — достаточно мало) с определенными асимптотическими свойствами при $t \to +0$. Изучается вопрос о количестве таких решений. Одновременно исследуется асимптотическое поведение первых производных этих решений при $t \to +0$.

Singular initial value problems for functional differential equations: solvability, number of solutions, asymptotics of solutions

Zernov A.E., Chaichuk O.R.

South Ukrainian State Pedagogical University, Odessa, Ukraine

Singular initial value problems for functional differential equations are under consideration. We find continuously differentiable solutions with required properties.

УСЛОВИЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ ОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Иванов Б.Ф.

Санкт-Петербургский государственный технологический университет растительных полимеров, Россия

Пусть $p \in (2, 3]$. Рассматривается вопрос о существовании при малых начальных условиях ограниченных на R^1 решений уравнения

$$\dot{x}(t) = \alpha_0(t) + \alpha_1(t) + \sum_{k=2}^{\infty} \alpha_k(t) x^k(t), \tag{1}$$

где коэффициенты $\alpha_k(t) \in L^p(R^1)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, а их преобразования Фурье совпадают в некоторой окрестности нуля с преобразованиями Фурье каких-либо функций класса $L^1(R^1)$. Обозначим через: $R_k \subseteq iR^1 \cup \{i\infty\}$ — множество, не содержащее точек, в окрестности каждой из которых преобразование Фурье функции $\alpha_k(t)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ совпадает с преобразованием Фурье какой-либо функции класса $L^q(R^1)$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Эти множества являются [1] аналогами множеств частот из классической теории резонанса.

Установлено, что при выполнении нерезонансных соотношений:

1) $\{i\infty\} \notin R_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

2) существует $\xi > 0$ для которого $\lfloor -\xi i, \xi i \rfloor \cap \{R_m + R_n\} = \varnothing$, $m, n = 0, 1, 2, \ldots$, $m \neq n$ можно указать такое $0 < \rho < 1$, что если нормы коэффициентов $\alpha_k(t)$ в некоторых специально построенных нормированных пространствах не превосходят соответственно величин ρ^k, $k = 2, 3, \ldots$, то решения уравнения (1) с малыми начальными условиями ограничены.

Настоящая работа является продолжением исследований автора [1, 2] и дополняет результаты Кучера [3] и Беллмана [4] по ограниченности решений нелинейных систем.

Литература

[1] Иванов Б.Ф. // Дифференц. уравнения. 1997. Т.33, №5. С. 704–706.
[2] Иванов Б.Ф. //Нелинейные динамические системы. Вып.1. СПб. 1997. С. 125–130.
[3] Кучер Д.Л. // ДАН СССР. 1949. Т.69, №5. С. 603–606.
[4] Bellman R. // Ann. of math. 1948. V. 49, №3. P. 515–522.

Some Condition of Existence of Bounded Solutions for One Class of Nonlinear Equations

Ivanov B.F.

Saint Petersburg State Technological University of Vegetate Polymers, Russia

The following statement for one class of nonlinear differential equations is proved. The bounded solutions exist on the real line if "nonresonance relations" — a notion introduced by the author — are valid and initial value is sufficiently small.

The reference list contains 4 items.

КОНТАКТНАЯ ГЕОМЕТРИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Кушнер А.Г.

Астраханский государственный университет, Россия

Настоящая работа посвящена решению проблемы классификации уравнений Монжа-Ампера гиперболического типа на двумерных многообразиях. Эта проблема восходит к работам Софуса Ли [1] и тесно связана с задачами классификации уравнений Монжа-Ампера и эффективных дифференциальных 2-форм [2, 4]. Основной идеей работы является описание уравнения Монжа-Ампера общего положения как e-структуры (абсолютного параллелизма) на гладком многобразии 1-джетов [3]. Для уравнений Монжа-Ампера мы указываем полную систему дифференциальных инвариантов относительно контактных преобразований. В качестве примера мы рассматриваем нелинейное волновое уравнение вида

$$v_{xy} = f(x, y, v, v_x, v_y).$$

Мы также приводим полное решение проблемы контактной линеаризации гиперболических и эллиптических регулярных уравнений Монжа-Ампера.

Литература

[1] Lie S. GesametteAhandlungen, Leipzig-Oslo, 1922–1935, vol. 1–7.
[2] Лычагин В.В. Контактная геометрия и нелинейные дифференциальные уравнения второго порядка // УМН, 1979, т. 34, № 1, С. 101–171.
[3] Кушнер А. Уравнения Монжа-Ампера и e-структуры // Докл. РАН, 1998, т. 361, № 5. С. 595-596.
[4] Kushner A., Lychagin V., Rubtsov V. Contact Geometry and Non-linear Differential Equations, Cambridge University Press, Series: Encyclopedia of Mathematics and its Applications (No. 101), 2006, 500 pp.

Contact Geometry of Nonlinear Wave Equation

Kushner A.G.

Astrakhan State University, Russia

We present a solution of the classification problem for classical hyperbolic and elliptic Monge-Ampere equations with respect to contact transformations. We also present a complete solution of contact linearization of Monge-Ampere equations. As an example we consider the nonlinear wave equation.

АНАЛИЗ СЛОЖНОСТИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ТРАЕКТОРИЙ АВТОНОМНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Макаренко А.В.

СКГМИ (ГТУ), Владикавказ, Россия

Введём в рассмотрение динамическую систему заданную автономным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка (подобный класс уравнений, в частности, широко применяется для описания нелинейных колебательных систем):

$$\ddot{x} = Q(x,\, \dot{x}). \tag{1}$$

Причём $x \in X \subset R^1$, функция $Q(x,\, \dot{x})$ – гладкая, непрерывная, определена в области $G \subset R^2$, и имеет в этой области непрерывные частные производные до порядка не ниже первого, а уравнение удовлетворяет теоремам о существовании и единственности решения.

В работе [1] были обозначены основные положения нового подхода, сообщающего качественную и, в определённом роде, количественную информацию о динамических характеристиках интегральных траекторий $x(t)$, $t \in T \subset R^1$ системы вида (1) в пространстве событий $\Omega = X \times T$. При этом носителем информации являются скалярные поля:

$$\varphi_0^T(x,\, \dot{x}) = \frac{Q(x,\, \dot{x})}{1+\dot{x}^2}, \quad \beta_2^T(x,\, \dot{x}) = \dot{x}\,\varphi_0^T(x,\, \dot{x}). \tag{2}$$

Дополнительные исследования показали, что через величины (2) также возможно выразить *сложность интегральных траекторий* $x(t)$ в пространстве Ω:

$$\begin{aligned} &c_{x\alpha}(x,\, \dot{x}) = \sqrt{\dot{x}^2 + Q^2(x,\, \dot{x})}, \;\; c_{\alpha\varphi}(x,\, \dot{x}) = \sqrt{Q^2(x,\, \dot{x}) + \left[\dot{\varphi}_0^T(x,\, \dot{x})\right]^2}, \\ &c_{\varphi}(x,\, \dot{x}) = \left|\varphi_0^T(x,\, \dot{x})\right|. \end{aligned} \tag{3}$$

Поля (3) задают распределения в фазовом пространстве $(x,\, \dot{x})$ мгновенных сложностей статической и динамической составляющих структуры интегральных траекторий $x(t)$ [2]. Для пробной интегральной траектории L_T возможно рассчитать абсолютные сложности

$$C_\circ = \int\limits_{(L_T)} c_\circ(x,\, \dot{x})\, \mathrm{ds}. \tag{4}$$

Причём в качестве L_T могут выступать: траектории управления; истинные траектории системы (точные, интерполированные, возмущённые); а также искусственные траектории позволяющие выявлять особенности и отличия в динамике системы в той или иной области фазового пространства $(x,\, \dot{x})$.

Отметим, что величины (3) и (4) несут важную информацию о динамических характеристиках исследуемой системы в пространстве Ω. Именно сложность интегральных траекторий, в частности, определяет предсказуемость и характер эволюции системы (детерминированное или хаотическое поведение).

Литература

[1] *Макаренко А.В.* Исследование динамической структуры автономных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка в пространстве «состояние-скорость-кривизна». // Сборник тезисов IX Международного семинара «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления». – Москва, ИПУ РАН, 2006.

[2] *Макаренко А.В.* Выражение структуры динамического процесса во временной области в терминах дифференциальной геометрии. // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2006. № 4.

Complexity Analysis of Integral Trajectories of the Second Order Autonomous Ordinary Differential Equations

Makarenko A.V.

NCIMM (STU), Russia, Vladikavkaz

The correlation of predictability and character of evolution (deterministic or chaotic behavior) of the dynamic systems to the complexity of its integrated trajectories has been established in the present contribution. Complexity calculation can be carried out both for the trajectory of control and for the true trajectories of a system (exact, interpolated, perturbed). Furthermore for the purpose of detection of singularities and differences in the system dynamics in different areas of phase space "condition-speed" the assumed so-called test trajectories are introduced. More comprehensively the ways of using the described analytical apparatus have been worked up for the systems given by the second order autonomous ordinary differential equations.

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ АЛГЕБРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С РАЗРЫВАМИ

Матросов И.В.

Центр исследований устойчивости и нелинейной динамики при ИМАШ РАН, Москва, Россия

В докладе рассматривается конечномерная система алгебро-дифференциальных уравнений с разрывами. В таком виде могут быть представлены например, задачи анализа динамики и синтеза управления для механических систем при наличии трения или логических элементов в контуре управления.

Для достаточно широкого класса рассматриваемых систем вводится общее определение решения и рассматривается вопрос его существования. В отличии от теории разрешенных относительно старших производных систем дифференциальных уравнений, в рассматриваемом классе систем феномен отсутствия решения встречается часто. Даются условия, достаточные для существования решения и доказывается теорема существования в невырожденном случае.

Для целей построения алгоритма приближенного решения, система приводится к эквивалентной системе разрывных дифференциальных уравнений, даются условия эквивалентности такого сведения. Это позволяет также выписать условия правосторонней единственности решения и сходимости численных методов.

On Existence and Uniqueness for Solutions of Discontinuous Systems of Algebraic-Differential Equations

Matrosov I.V.

Stability and Nonlinear Dynamics Research Center under Blagonravov Mechanical Engineering Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

The subject of this presentation is a finite-dimensional system of algebraic-differential equations. Several problems of dynamical analysis and control synthesis for mechanical systems with friction or logical elements in the control loop can be represented in this form.

For sufficiently wide class of the systems under consideration, the general definition of solution is introduced and the existence problem is formulated. In contrast with the theory of ordinary differential equations the phenomenon of inexistence here appears frequently. The sufficient conditions for existence are introduced and the existence theorem is proofed for nonsingular case.

For the purposes of constructing an algorithm to approximate solution, the initial system is reduced to equivalent resolved on higher derivatives discontinuous system of ordinary differential equations. The equivalency conditions for such reduction are given. This also makes it possible to formulate the uniqueness conditions and to investigate the convergence of a numerical approximation.

ПАРЫ ЛАКСА ПО КАЛОДЖЕРО ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ

Московских А.С.

ИДСТУ СО РАН, Россия

Одним из наиболее эффективных методов исследования и решения нелинейных эволюционных уравнений (НЭУ) является метод, основанный на их представлении в виде уравнения Лакса и построения аналога метода обратной задачи рассеяния. Наиболее существенным и нетривиальным моментом этого метода является отыскание пары Лакса для НЭУ. В связи с этим возникает проблема представления общего НЭУ с n пространственными переменными в виде уравнения Лакса. Представленная работа, используя определение пары Лакса из статьи [1], дает частичное решение этой проблемы, когда НЭУ имеет одну пространственную переменную.

Исходя из конструкции пары Лакса по Калоджеро [1] получены классы одномерных нелинейных эволюционных уравнений третьего порядка, решения которых связаны обобщенными преобразованиями Миуры и Беклунда. Доказано, что произвольное одномерное нелинейное эволюционное уравнение, представимое в форме локального закона сохранения, допускает пучок (несчетное множество) пар Лакса по Калоджеро, зависящих от нескольких спектральных параметров.

Литература

[1] Calogero F., Nucci M.C. Lax pairs galore// J. Math. Phys. 1991. V.32, №1. P.72–74.
[2] Ньюэлл А. Солитоны в математике и физике.-М.: Мир, 1989. 324с.
[3] Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи.-М.: Мир, 1987. 480с.
[4] Захаров В.Е., Шабат А.Б. Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния// Функциональный анализ и его приложения. 1974. Т. 8, вып. 3. С. 43-53.
[5] Рудых Г.А. (L,A)-пары Лакса для одномерного нелинейного эволюционного уравнения// Докл. РАН. 1997. Т. 356, №1. С. 19-21.

Lax Pairs for the Calogero Model for a One-dimensional Nonlinear Evolution Equation

Moskovskikh A.S.

Institute for System Dynamics and Control Theory Siberian Branch of Academy of Sciences of Russia, Irkutsk

A problem of representation of a general nonlinear evolution equation with n variables in terms of the Lax equation is considered. A partial solution of this problem is found for the case of one spatial variable.

ОБ УСЛОВИЯХ НАЛИЧИЯ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ И АВТОКОЛЕБАНИЙ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ НЕПРЕРЫВНОГО И ДИСКРЕТНОГО ТИПОВ

Мулкиджан Т.С.

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Россия

В докладе рассматривается вопрос об условиях наличия предельных циклов и автоколебаний в нелинейных динамических системах в смысле Биркгофа [1] непрерывного и дискретного типов. Для получения указанных условий использовано понятие асимптотической фазы [2, 3] (как для периодических траекторий, так и для множеств непериодических траекторий), а также понятие фазовой асимптотической прочности полутраектории. Полученные результаты базируются на ослаблении требования об асимптотической устойчивости и замене этого требования менее жестким требованием о фазовой асимптотической прочности полутраектории динамической системы, использующим линейную репараметризацию движения по полутраектории. Рассмотрен ряд примеров, иллюстрирующих полученные результаты. Настоящая работа является продолжением работ [3, 4].

Литература

[1] Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.: Гостехиздат, 1949.
[2] Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.
[3] Дружинина О.В., Шестаков А.А. О понятиях орбитальной устойчивости и фазовой устойчивости движений динамической системы // Доклады РАН. 1997. Т. 355. № 3. С. 339 - 341.
[4] Дружинина О.В., Мулкиджан Т.С. О существовании предельных циклов и автоколебаний в нелинейных динамических системах // Доклады РАН. 2006. Т. 409. № 3. С. 328 - 332.

On Conditions of Existence of Limit Cycles and Auto-oscillations for Nonlinear Dynamical Systems of Continuous and Discrete Types

Mulkidzhan T.S.

N.E. Bauman Moscow State Technical University, Russia

The question about conditions of existence of limit cycles and auto-oscillations for nonlinear dynamical systems of continuous and discrete types is considered. For obtaining these conditions the notion of asymptotic phase and Zhukovskij stability of trajectory.

НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫЕ И НЕЛОКАЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И НЕЛОКАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С ИНВОЛЮТИВНО ОТКЛОНЯЮЩИМИСЯ АРГУМЕНТАМИ

Огородников Е.Н.

Самарский государственный технический университет, Россия

Влияние спектра матричных коэффициентов при младших производных на корректность постановок классических начально-краевых задач для систем вырождающихся гиперболических уравнений является хорошо известным фактом.

В работе рассматривается система двух гиперболических уравнений

$$y^2u_{xx} - x^2u_{yy} + A(xu_x - yu_y) = 0, \;\; u(x,y) = (u_1, u_2)^T, \tag{1}$$

с инволютивной матрицей $A[2\times 2]$ в области Ω, ограниченной отрезком $[0,1]$ линии вырождения $y = 0$ и характеристиками $\xi = x^2 - y^2 = 0$ и $\eta = x^2 + y^2 = 1$.

Показано, что для системы уравнений (1) корректна задача Коши в классической постановке

$$u(x,0) = \tau(x), \quad x \in [0,1], \tag{2}$$

$$\lim_{y\to+0} u_y(x,y) = \nu(x), \quad x \in (0,1), \tag{3}$$

и ее решение получено в явном виде.

Пусть $\theta_0(x) = \left(\frac{x}{\sqrt{2}}; \frac{x}{\sqrt{2}}\right)$, $\theta_1(x) = \left(\sqrt{\frac{1+x^2}{2}}; \sqrt{\frac{1-x^2}{2}}\right)$. Рассмотрим условия:

$$u(\theta_0(x)) = \varphi(x), \quad x \in [0,1], \tag{4}$$

$$u(\theta_1(x)) = \psi(x), \quad x \in [0,1]. \tag{5}$$

Можно показать, что для системы уравнений (1) в задачах Коши-Гурса с данными (3), (4) и (3), (5) отсутствует единственность решения.

В работе обоснована корректность задач Дарбу с условиями (2), (4) и (2), (5), и нелокальных аналогов задач Коши-Гурса и Дарбу с условиями типа Бицадзе-Самарского

$$A(x)u(\theta_i(x)) = B(x)u(x,0) + C(x)\lim_{y\to+0} u_y(x,y) + c(x), \;\; i = 0,1,$$

или Нахушева

$$A(x)u(\theta_0(x)) + B(x)u(\theta_1(x)) = H(x)u(x,0) + K(x)\lim_{y\to+0} u_y(x,y) + c(x),$$

где $c(x)$ — заданная вектор-функция, $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $H(x)$, $K(x)$ — известные функциональные матрицы, или матрицы интегродифференциальных операторов типа Эрдейи-Кобера, или операторов дробного интегродифференцирования функций по другой функции.

Во всех случаях получены явные выражения для неизвестных в представлении решения задачи Коши вектор-функций через функции, заданные условиями соответствующих нелокальных краевых задач. Их корректность является следствием корректности задачи Коши.

Результаты используются для обоснования корректности начальных и начально-краевых задач для уравнения

$$\left(y^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} - x^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u(x,y) + \left(x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}\right)u(-x,-y) = 0,$$

содержащего инволютивный сдвиг по обеим переменным в младших производных искомой функции.

Local and Non-Local Boundary Value Problems for a System of Hyperbolic Type Equations and Non-Local Equation with Involutivly Transformed Arguments

Ogorodnikov E.N.

Samara State Technical University, Russia

In this paper, for some systems of degenerate hyperbolic type equations in case of loosing the uniqueness of the solution in Cauchy-Goursat problem, it is proved that the Darboux problem and non-local problem with Bitsadse-Samarsky and Nakhushev conditions are correctly defined. The result of this investigation is applied to studying the boundary value problems for some non-local equations with involutivly transformed arguments.

РАЗВИТИЕ МЕТОДА СРАВНЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Перегудова О.А.

Ульяновский государственный университет, Россия

В докладе рассматривается задача об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа с конечным запаздыванием по всем и по части переменных.

Развитие метода функций Ляпунова в задаче устойчивости функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа было осуществлено в нескольких направлениях: с использованием метода предельных функций и уравнений [1], что позволило локализовать положительное предельное множество решений и исследовать на этой основе предельные свойства решений таких уравнений; с применением метода сравнения [2], что привело к возможности свести изучение дифференциальных уравнений с запаздыванием к изучению соответствующего обыкновенного дифференциального уравнения (уравнения сравнения).

Применение метода предельных уравнений позволяет ослабить требования к уравнению сравнения, например, для установления асимптотической устойчивости нулевого решения исходной системы иногда достаточно потребовать, чтобы нулевое решение уравнения сравнения было устойчиво (не обязательно асимптотически). На этой основе получены достаточные условия асимптотической устойчивости решений систем первого, второго и $n-$го порядков.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №05-01-00765) и в рамках программы «Государственная поддержка ведущих научных школ» (НШ-6667.2006.1).

Литература

[1] Андреев А.С. Об устойчивости неавтономного функционально дифференциального уравнения // Доклады РАН. 1997. Т.356. №7. С.151–153.

[2] Лакшмикантам В., Лила С., Мартынюк А.А. Устойчивость движения: метод сравнения. Киев: Наукова думка, 1991. 248 с.

Development of the Comparison Method in the Stability Problem for a Functional-Differential Equation

Peregudova O.A.

Ulianovsk State University, Russia

In the report the stability problem for functional-differential equations of retarded type with finite delay is considered. New results on asymptotic stability of the equations are obtained. The problem is solved by constructing the Liapunov function and by use of the comparison method and the method of limiting equations.

ГАРАНТИРОВАННЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ НА КОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ ВРЕМЕНИ

Рогалев А.Н.

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, Россия

Первые постановки задач об устойчивости на конечном промежутке времени принадлежат Четаеву Н.Г., Моисееву Н.Д., Гермаидзе В. и Красовскому Н.Н., Каменкову Г.В. Они исследованы в их работах и получили дальнейшее развитие как теория практической или технической устойчивости на конечном интервале времени. Практическая устойчивость означает равномерную ограниченность решений относительно множества начальных значений Q_0 и совокупности P возмущающих воздействий. Для практической устойчивости требуется не только существование ограничивающей постоянной для решений, но и чтобы эта постоянная имела значения, достаточные для того, чтобы решения, начинающиеся в множестве Q_0, все время оставались в Q. В докладе описано применение гарантированных границ множеств решений для исследования практической устойчивости. Эти границы решений вычисляются при помощи гарантированных методов, основанных на аппроксимации оператора сдвига вдоль траектории [1]–[5] и учитывают влияние на решения постоянно действующих возмущений. Обеспечивается возможность формулировать математически строгие результаты, касающиеся практической устойчивости, для достаточно широких классов задач.

Литература

[1] Новиков В.А., Рогалев А.Н. Построение сходящихся верхних инижних оценок решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений// Журнал Вычислительной Математики и Математической Физики. 1993. Т.33 № 2. С. 219–231.

[2] Рогалев А.Н. Задачи практической (интервальной) устойчивости с заданной областью предельных отклонений. Труды пятой международнойконференции памяти академика А.П. Ершова.— Новосибирск: ИСИ СО РАН, 2003. — С. 90–100.

[3] Рогалев А.Н. Гарантированные методы решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений на основе преобразования символьных формул // Вычислительные технологии. — 2003. т. 8. №5. — С. 102–116.

[4] Рогалев А.Н. Методы определения верхних и нижних оценок решений дифференциальных уравнений и их применение// Труды Международной конференции по Вычислительной Математике МКВМ-2004./ Под редакцией Михайлова Г.А., Ильина В.П., Лаевского Ю.Е. —Новосибирск: ИВМ и МГ СО РАН. — 2004, ч.2. — С. 614–620.

[5] Рогалев А.Н. Гарантированные границы решений дифференциальных уравнений // Тихонов и современная математика: Вычислительная математика и информатика: Международная конференция, Москва МГУ им. М.В. Ломоносова, Российская Академия Наук./ Факультет ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова— Москва: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова.— 2006.—С. 100–103.

Study of Stability on a Finite Time Interval by the Guaranteed Method

Rogalyov A.N.

Institute of computing modelling, Siberian Branch of the Russian Academy of Science, Krasnoyarsk, Russia

Application of guaranteed bounds of solution sets for the investigation of practical stability is described. These solution bounds are computed by means of the guaranteed methods based on the approximation of the operator of shift along a trajectory [1]–[5] and take into account influence of permanent perturbations on the solution. The possibility to formulate the mathematical rigorous results concerning practical stability for enough wide classes of problems is provided.

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ КЛАССИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ФИЗИКИ ПЛАЗМЫ

Рудых Г.А.

Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск, Россия

Методами нелинейного анализа, основанными на теории монотонных операторов в частично упорядоченных пространствах для случая парных неподвижных точек и в сочетании с техникой верхних и нижних решений, изучаются свойства стационарных решений начально-краевой задачи для нелинейного нелокального параболического уравнения второго порядка с неявным вырождением. Данное интегродифференциальное уравнение возникает при математическом моделировании диффузии ограниченной тороидальной плазмы поперек магнитного поля и ее равновесных конфигураций. Задача о стабилизации нестационарных решений к стационарным сведена к исследованию разрешимости нелинейной краевой задачи с нелокальными (интегральными) операторами. Получены достаточные условия на параметры изучаемой интегродифференциальной краевой задачи, обеспечивающие существование и единственность ее классического решения, для которого конструктивно построена область притяжения.

Existence and Uniqueness of the Classical Solutions to a Nonlinear Nonlocal Boundary Value Problem of Plasma Physics

Rudykh G.A.

Institute for System Dynamics and Control Theory Siberian Branch of Academy of Sciences of Russia, Irkutsk

By methods of the nonlinear analysis, the solubility of the boundary problem with nonlocal (integral) operators is studied. Such a kind of problems appear in mathematical modeling of the diffusion of the confined plasma through magnetic field and investigation of its equilibrium state in the installations of the tokamak type. Sufficient conditions on parameters of boundary problem under consideration which provide the existence and uniqueness of classical stationary solution are obtained. For obtained stationary solution, the domain of attraction is constructed.

ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ

Савчин В.М.

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

Пусть задано уравнение

$$N(u) = 0, \quad u \in D(N), \tag{1}$$

где $D(N)$ — область определения оператора $N : D(N) \subset U \to V$; U, V — линейные нормированные пространства над полем действительных чисел R.

Пусть $S : D(S) \subset V \to D(N)$ — обратимый оператор, определяющий преобразование

$$u = S(v). \tag{2}$$

Предполагается, что рассматриваемые операторы имеют производные Гато.

Будем следовать терминологии работы [1].

Если N — оператор, потенциальный относительно выбранной непрерывной билинейной формы $< \cdot, \cdot >$: $V \times U \to R$, то оператор

$$\tilde{N}(v) = N(S(v)), \tag{3}$$

вообще говоря, не является потенциальным.

Определение. Преобразование (2) называется потенциальным, если оно переводит потенциальный оператор N (1) в потенциальный оператор $\tilde{N}$ (3).

Обозначим через N'_u, S'_u — производные Гато, соответственно, операторов N, S в точке u, S'^*_u — оператор, сопряженный оператору S'_u.

Будем считать, что $D(N)$ — односвязная область.

Теорема. *Преобразование (2) является потенциальным тогда и только тогда, когда*

$$N'_{S(v)} S'_v = S'^*_v N'_{S(v)} \quad \forall v \in D(S).$$

Основываясь на вариационном принципе, развивается аналог теории канонических преобразований для эволюционных уравнений вида $P(t,u)u_t - Q(t,u) = 0$, где P — линейный, а Q — в общем случае нелинейный оператор.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 06.01.04006-ННИО).

Литература

[1] *Савчин В. М.* Математические методы механики бесконечномерных непотенциальных систем. М.: Изд-во РУДН (1991).

Variational Principles and Transformations of Equations

Savchin V.M.

Peoples' Friendship University of Russia, Moscow

The notion of potential transformations is introduced in the present paper. Then, based on variational principles, an analogue of canonical transformations is developed for a wide class of evolutionary operator equations.

О РЕШЕНИЯХ ОДНОГО ТИПА СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Самойлова Э.Н.

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

Рассматривается сингулярное интегродифференциальное уравнение

$$A\varphi \equiv \varphi'(t) + a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - t} = f(t), \quad -1 \le t < 1, \tag{1}$$

с начальным условием

$$\varphi(-1) = 0, \tag{2}$$

где $a(t)$, $b(t)$, $f(t)$ — известные функции на сегменте $[-1,1]$, а $\varphi(t)$ — искомая функция, причем сингулярный интеграл понимается в смысле главного значения по Коши-Лебегу.

Приведем простые достаточные условия существования и единственности решения задачи (1)–(2) в парах функциональных пространств $(C^1[-1,1]; C[-1,1])$ и $(W_2^1[-1,1]; L_2[-1,1])$.

Теорема 1. *Пусть $a(t)$, $f(t) \in L_2[-1,1]$ и $b(t) \in C$, а $q_1 = \sqrt{2}\{\|a\|_{L_2} + \|b\|_C\} < 1$.*

Тогда задача (1)–(2) имеет единственное решение $\varphi^* \in W_2^1$ при любой правой части $f(t) \in L_2$ и

$$\|\varphi^*\|_{W_2^1} \le \frac{\|f\|_{L_2}}{1 - q_1}.$$

Теорема 2. *Пусть $a(t) \in L_2[-1,1]$, $b(t) \in C$ и $q_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{\pi} \cdot \|b\|_C \cdot e^{\|a\|_{L_2}} < 1$.*

Тогда задача (1)–(2) имеет единственное решение $\varphi^* \in W_2^1$ при любой правой части $f(t) \in L_2$ и

$$\|\varphi\|_{W_2^1} \le \|f\|_{L_2}\frac{e^{\|a\|_{L_2}}}{1 - q_2}.$$

Получение результатов, аналогичных теоремам 1 и 2, в паре пространств C^1, C требует выполнения более жестких условий относительно коэффициентов уравнения (1). Это видно хотя бы из следующих двух теорем

Теорема 3. *Пусть $a(t) \in C$ и $b(t) \in Lip\,\alpha(0 < \alpha \le 1)$, а $b(+1) = 0$. Если*

$$q_3 = 2\left\{\|a\|_C + \frac{1}{\pi}\left(\|b\|_C + \|b_1\|_C\right)\right\} < 1,$$

где $b_1(t) = b(t)\ln(1-t)$, то задача (1)–(2) имеет единственное решение $\varphi^* \in C^1$ при любой правой части $f(t) \in C$ и $\|\varphi^*\|_{C^1} \le \dfrac{\|f\|_C}{1 - q_3}$.

Теорема 4. *Пусть $a(t) \in C$ и $b(t) \in Lip\,\alpha(0 < \alpha \le 1)$, а $b(+1) = 0$. Если*

$$q_4 = \frac{2}{\pi}\left(\|b\|_C + \|b_1\|_C\right)e^{\|a\|_C} < 1,$$

то задача (1)–(2) имеет единственное решение $\varphi^* \in C^1$ при любой правой части $f(t) \in C$, причем $\|\varphi^*\|_{C^1} \le \|f\|_C \cdot \dfrac{e^{\|a\|_C}}{1 - q_4}$.

Solutions for One Kind of Singular Integrodifferentional Equations

Samoilova E.N.

Russian People's Friendship university, Moscow, Russia

This report comprises sufficient conditions of existence and singularity of solution for the Cauchy problem for a singular integrodifferentional equation. Four theorems have been proved in the pares of functional areas $(C'; C)$ and $(W_2'; L_2)$.

КЛАССИФИКАЦИЯ S^1-РАСШИРЕНИЙ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ ПОТОКОВ

Сахаров А.Н.

Нижегородская государственная сельскохозяйственная академия, Россия

S^1-расширением квазипериодического потока на торе называется поток $F^t : (\varphi, \theta) \to (\varphi_t, F^t_\varphi(\theta))$ на расслоении $\mathbb{T}^m \times S^1$, порождаемый системой

$$\dot\varphi = \omega, \quad \dot\theta = f(\varphi, \theta), \quad (\varphi, \theta) \in \mathbb{T}^m \times S^1, \tag{1}$$

где $f(\varphi, \theta)$ — гладкая периодическая по φ и θ функция, ω — вектор с рационально независимыми компонентами, а отображение слоя $F^t_\varphi(\theta)$ является сохраняющим ориентацию гомеоморфизмом окружности для любого $t \in \mathbb{R}$. Рассматривается задача о классификации таких потоков относительно понятия послойной сопряженности.

Поток F^t имеет инвариант — число вращения слоя ρ [1],[2], поэтому все траектории потока имеют одинаковое асимптотическое направление: (ω, ρ). Будем называть поток *регулярным*, если его поднятие $\widehat{F}^t$ на универсальное накрытие обладает свойством: существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$|\widehat{F}^t_\varphi(\theta) - \theta - \rho t| \le C, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

для любых $(\varphi, \theta) \in \mathbb{R}^{m+1}$. Геометрически это означает, что траектория $\widehat{F}^t_\varphi(\theta)$ имеет конечное отклонение от соасимптотической геодезической. Показывается, что из существования одной регулярной траектории следует регулярность всех остальных.

Теорема. *Пусть поток F^t — регулярен. Если вектор (ω, ρ) имеет рационально независимые на поле $\mathbb{Q}$ компоненты, то поток полусопряжен линейному потоку на $m+1$-мерном торе*

$$\dot\varphi = \omega, \quad \dot\vartheta = \rho.$$

В противном случае поток имеет минимальное множество, не совпадающее с $\mathbb{T}^m \times S^1$.

Если поток не является регулярным, то он топологически транзитивен.

Системы вида (1) возникают в результате триангуляции линейных расширений квазипериодических потоков

$$\dot\varphi = \omega, \quad \dot x = A(\varphi)x.$$

В этом случае полусопряженность в формулировке теоремы можно заменить сопряженностью (отсутствуют минимальные множества Данжуа). Это наблюдение позволяет доказать утверждение о том, что регулярность системы эквивалентна ее *приводимости.*

Автор благодарит РФФИ (грант 05-01-00501) за финансовую поддержку.

Литература

[1] Johnson R.A, Moser J. *The rotation number for almost periodic potentials* // Comm. Math. Phys. 1983. V. 84. n. 3. P. 403–435.

[2] Веременюк В.В. *Существование числа вращения уравнения $\dot x = \lambda(t, x)$ с периодической по x и почти периодической по t правой частью* // Дифференциальные уравнения. 1991. Т. 27. № 6. С. 1073–1076.

Classification of S^1-Extensions of the Quasi-Periodic Flows

Sakharov A.N.

Nizhny Novgorod State Agricultural Academy, Russia

We consider a problem of classification for the flows generated by the systems of differential equations on the bundle $\mathbb{T} \times S^1$:

$$\dot\varphi = \omega, \quad \dot\theta = f(\varphi, \theta), \quad (\varphi, \theta) \in \mathbb{T}^m \times S^1.$$

Such a flow is called a S^1-extension of a quasi-periodic flow. The classification is based on the existence of the fiberwise rotation number and the regularity condition.

НОВЫЕ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕАВТОНОМНОГО УРАВНЕНИЯ ЛИУВИЛЛЯ

Семенов Э.И.

Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск, Россия

В докладе приведены результаты по построению точных аналитических решений в виде конечных формул неавтономного эллиптического уравнения Лиувилля

$$\Delta u = \varphi(x,y)e^{\lambda u}, \;\; u \stackrel{\triangle}{=} u(x,y),$$

и неавтономного волнового уравнения Лиувилля

$$\Box u = (F+G)e^{\lambda u}, \;\; u \stackrel{\triangle}{=} u(x,t).$$

Здесь $F \stackrel{\triangle}{=} F(x+at)$, $G \stackrel{\triangle}{=} G(x-at)$, $\lambda, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\Delta\cdot = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\cdot + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\cdot$ — оператор Лапласа в $\mathbb{R}^2$, $\Box\cdot = \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\cdot - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\cdot$ — оператор Даламбера. Эти уравнения встречаются во многих прикладных задачах современной математической физики, особенно при исследовании процессов и явлений в нелинейных средах, например, в теории полупроводников, физике плазмы, квантовой оптике и т.д. Получены формулы новых точных аналитических решений неавтономного эллиптического уравнения Лиувилля в двумерном координатном пространстве со свободной функцией, зависящей специальным образом от произвольной гармонической функции. Предъявлены новые точные решения волнового уравнения Лиувилля с двумя произвольными функциями. Представлены оригинальные формулы общего решения для классического (автономного) и волнового уравнения Лиувилля. Приведены некоторые преобразования эквивалентности для эллиптического уравнения Лиувилля, зависящие от сопряженных гармонических функций. В частности, указано преобразование, приводящее исследуемое уравнение к автономному виду.

New Exact Solutions of Non-Autonomic Liouville Equation

Semenov E.I.

Institute for System Dynamics and Control Theory Siberian Branch of Academy of Sciences of Russia, Irkutsk

Formulas of new exact analytic solutions for non-autonomic elliptic Liouville equation in two-dimensional coordinate space with an arbitrary harmonic function are obtained. New exact solutions for wave Liouville equation with two arbitrary functions are constructed. The original formulas of general solution for classical Liouville equation are given. Some equivalence transformations depending on conjugate harmonic functions for elliptic Liouville equation are proposed.

РАЗРЫВНЫЕ РЕШЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОБОБЩЕННЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

Сесекин А.Н., Фетисова Ю.В.

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, Россия

Рассматривается система нелинейных функционально-дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x_t) + B(t, x(t))\dot{v}(t), \tag{1}$$

где $x_t = x(s)$, $t - \theta \leq s \leq t$, $\theta > 0$, $x(t) \in R^n$, $v(t)$ — m-мерная вектор-функция, имеющая на промежутке $[t_0, \vartheta]$ ограниченную вариацию, $\varphi(t)$ — начальная функция — функция ограниченной вариации, заданная на промежутке $[t_0 - \theta, t_0]$, производные в (1) понимаются в обобщенном смысле, $f(t, x(t), x_t)$ — n-мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных, $B(t, x(t))$ — $n \times m$ — матрица-функция. Особенностью уравнения (1) является то, что в правой части его содержится некорректная операция умножения разрывной функции на обобщенную. Предложено определение разрывного решения, основанное на замыкании множества гладких решений уравнения (1) в пространстве функций ограниченной вариации. Описано множество так формализованных решений. Доказана теорема о непрерывной зависимости решения от начальной функции, получена формула Коши для линейной системы с обобщенным воздействием в матрице системы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 06-01-00445.

Литература

[1] Zavalishchin S.T. and Sesekin A.N. Dynamic Impulse Systems. Theory and Applications. The Netherlands. Kluwer Academic Publishers, 1997.

[2] Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.

[3] Fetisova Yu.V., Sesekin A.N. Discontinuous solutions of differential equations with time delay. Wseas transactions on systems. Issue 5, Volume 4, 2005. P.487-492.

Discontinuous Solutions of Functional-differential Equations with Generalized Functions

Sesekin A.N., Fetisova J.V.

Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of RAS, Ekaterinburg, Russia

For the nonlinear functional-differential equation with generalized functions in the right hand side the concept of solution is formalized. The formalization is based on the closure of a set of smooth solutions generated by smooth approximations of generalized functions included in the right hand side of the functional-differential equation. The existence theorem of so formalized solution is obtained. The theorem of continuous dependence of the solution on the initial function is obtained. The Cauchy formula for the linear differential equation with generalized elements in a matrix of the system is proved.

КАСКАДЫ БИФУРКАЦИЙ РЕШЕНИЙ В НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ ДИФФУЗИОННОГО ТИПА

Сидоров С.В.

Российский заочный институт текстильной и легкой промышленности, Россия

В работе на примере нестационарного уравнения Гинзбурга-Ландау и системы уравнений «брюсселятор» численно исследованы решения, возникающие в системах дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа после потери устойчивости термодинамической ветви — стационарного пространственно однородного решения. Рассмотрены решения первой и второй краевой задачи на отрезке и на плоскости в квадрате.

При исследовании указанных систем на отрезке методом численного продолжения решения по параметру установлено, что в фазовом пространстве после потери устойчивости термодинамической ветви вначале возникает периодическое пространственно однородное (в случае задачи Неймана) либо пространственно неоднородное (в случае задачи Дирихле) решение. Дальнейшее изменение бифуркационного параметра приводит в задаче Неймана к появлению периодического пространственно неоднородного решения и к рождению устойчивых двумерных инвариантных торов, которые затем порождают каскады бифуркаций удвоения периода этих торов, как по внутренней, так и по внешней частоте. Данные каскады завершаются образованием простейшего хаотического аттрактора Фейгенбаума. В уравнении Гинзбурга-Ландау установлено существование субгармонических каскадов бифуркаций рождения устойчивых двумерных инвариантных торов, имеющих периоды по внешней частоте согласно порядку Шарковского. Субгармонические каскады бифуркаций порождают более сложные хаотические аттракторы — аттракторы Шарковского.

Для задачи Дирихле в фазовом пространстве уравнения Гинзбурга-Ландау установлен каскад рождения устойчивых многомерных инвариантных торов, а в фазовом пространстве системы «брюсселятор» — субгармонический каскад бифуркаций рождения устойчивых циклов, приводящий к появлению хаотических аттракторов Фейгенбаума и Шарковского. При исследовании решений в указанных выше системах на плоскости также установлено существование в фазовом пространстве каскадов бифуркаций удвоения периодов двумерных инвариантных торов, порождающих хаотический аттрактор Фейгенбаума.

Приведенные результаты показывают, что появление хаотической динамики в нелинейных дифференциальных уравнениях в частных производных параболического типа основано на тех же механизмах, которые определяют переход к хаосу в нелинейных диссипативных системах обыкновенных дифференциальных уравнений и в уравнениях с запаздывающим аргументом [1, 2]. Это субгармонические (в смысле порядка Шарковского) каскады бифуркаций рождения либо устойчивых циклов, либо устойчивых двумерных инвариантных торов. Данное обстоятельство позволяет предполагать существование структуры решений в нелинейных диссипативных системах дифференциальных уравнений.

Литература

[1] N.A. Magnitskii, S.V. Sidorov. New Methods for Chaotic Dynamics.// World Scientific, Series Nonlinear Science, Ser. A. Vol. 58. 363 pp.

[2] Сидоров С.В. Универсальность перехода к хаосу в динамических диссипативных системах дифференциальных уравнений.// Динамика неоднородных систем. Выпуск 9.–М.: КомКнига, 2005, с. 51-87.

Bifurcation Cascades of Solutions in Nonlinear Differential Diffusion Type Equations

Sidorov S.V.

Russian Correspondence Institute Textile and Light Industry, Moscow, Russia

On the basis of numerical simulation systems of the differential equations of reaction-diffusion type are studied. It is shown, that transition to spatial-temporal chaos in such systems occurs through a cascade of Feigenbaum-Sharkovskii bifurcations of stable cycles or stable two-dimensional invariant tori with respect to internal as well as external frequencies. Existence of cascades of a birth bifurcation of stable 3-dimensional and 4-dimensional tori is established also.

ИМПУЛЬСНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ВКЛЮЧЕНИЯ

Скрипник Н.В.

Одесский национальный университет им. И.И. Мечникова, Украина

В докладе рассматриваются дифференциальные включения с импульсными воздействиями в фиксированные моменты времени.

Для линейных импульсных дифференциальных включений вида

$$\dot{x} \in \mathcal{A}(t)x + F(t), \quad t \neq \tau_i, \quad \Delta x|_{t=\tau_i} \in \mathcal{B}_i x + P_i,$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in I = [t_0, T]$, $\mathcal{A} : I \to comp(\mathbb{R}^{n\times n})$, $F : I \to comp(\mathbb{R}^n)$ — многозначные отображения; $\tau_i \in I,\ i = 1, 2, ...,$ $\mathcal{B}_i \in comp(\mathbb{R}^{n\times n})$, $P_i \in comp(\mathbb{R}^n)$ рассмотрены вопросы существования и устойчивости обычных решений и R-решений [1]; получены необходимые и достаточные условия существования периодических обычных решений и R-решений, а также изучена связь между начальными множествами таких решений [2]. Данные результаты являются продолжением исследований А.М. Самойленко и Н.А. Перестюка для случая линейных импульсных дифференциальных включений. Также получена аппроксимация множества достижимости линейного импульсного дифференциального включения с использованием решений систем линейных дифференциальных уравнений с производной Хукухары и $\pi-$ производной [3,4,7]. Вопросам исследования свойств множества достижимости, а также различным приближенным методам его построения посвящены работы А. Дончева, А.Б. Куржанского, М.С. Никольского, А.И. Панасюка, В.А. Плотникова, А.А. Толстоногова, Ф.Л. Черноусько.

Для нелинейных импульсных дифференциальных включений доказан аналог теоремы М. Красносельского – С. Крейна в терминах обычных решений и R-решений [5,6]. Полученные результаты обобщают результаты работ В.А. Плотникова, О.П. Филатова, М.М. Хапаева, T. Donchev, в которых существенно использовалось выполнение условия Липшица (одностороннего условия Липшица) для исходного или усредненного включения.

Л и т е р а т у р а

[1] Плотникова Н.В. Устойчивость решений линейных импульсных дифференциальных включений // Нелінійні коливання.–2004.– Т.7,№1. – С.121–131.

[2] Плотникова Н.В. Периодические решения линейных импульсных дифференциальных включений // Нелінійні коливання.– 2004. – Т.7,№4. – С.495–515.

[3] Плотникова Н.В. Аппроксимация пучка решений линейных импульсных дифференциальных включений // Вісник Харківського нац. університету. – 2004. – Вип.54. – С.67–78.

[4] Плотникова Н.В. Системы линейных дифференциальных уравнений с $\pi-$производной и линейные дифференциальные включения // Матем. сб.–2005.– Т.196, №11.– С. 127–140.

[5] Плотникова Н.В. Теорема Красносельского - Крейна для дифференциальных включений // Дифференц. уравнения.– 2005. – Т.41, №7. – С.997 – 1000.

[6] Плотникова Н.В. Усреднение импульсных дифференциальных включений // Математичні студії. – 2005. – Т.23, №1. – С.52 – 56.

[7] Плотникова Н.В. Линейные дифференциальные уравнения с многозначными траекториями // Вестник С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. – Вып.1 – С. 57 – 63.

Impulsive Differential Inclusions

Scripnik N.V.

Odessa National University named after I.I. Mechnikov, Ukraine

For linear impulsive differential inclusions the existence of ordinary solutions and R-solutions is proved; the conditions of stability of ordinary solutions and R-solutions are obtained; the existence of periodic ordinary solutions and R-solutions is discussed. The approximation of attainability sets is obtained with the help of systems of differential equations with Hukuhara derivative and $\pi-$ derivative. For nonlinear differential inclusions the analogue of M. Krasnoselskij – S. Krein theorem in terms of ordinary solutions and R-solutions is proved.

О БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ СИСТЕМАХ ТИПА НАМБУ

Славко А.В.

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

Пусть задана система эволюционных уравнений вида

$$u_t^{ij} = X^{ij}(x,t,u_\alpha), \ \ (x,t) \in Q_T = \Omega \times (0,T) \ \ (i = \overline{1,n}; \ j = \overline{1,m}, \ |\alpha| = \overline{0,s}), \tag{1}$$

где $X^{ij} \in C^s(\overline{Q}_T \times \boldsymbol{R}^q)$, $u_\alpha(x,t) = \partial_\alpha u(x,t)$, $\alpha \in Z_+^m$, q — размерность вектора $\{u_\alpha\}(|\alpha| = \overline{0,s})$; Ω — ограниченная область в $\boldsymbol{R}^n$ с кусочно гладкой границей $\partial\Omega$, и введем следующее

Определение 1. Система эволюционных уравнений (1) допускает представление Намбу, если существуют функционалы

$$H_i[u] = \int\limits_\Omega h_i(x,t,u_\alpha)dx \ \ (i = \overline{1,n-1}, \ |\alpha| = \overline{0,s})$$

такие, что ее можно записать в виде следующей суммы функциональных определителей:

$$X^{ij} = \sum_{v=1}^m \frac{\delta(u^{ij}, H_1, \ldots, H_{n-1})}{\delta(u^{1v}, \ldots, u^{nv})} \quad (i = \overline{1,n}; \ j = \overline{1,m}). \tag{2}$$

Функциональные производные вычисляются по формуле

$$\frac{\delta H_k}{\delta u^{ij}} = \sum_\alpha (-1)^{|\alpha|} D_\alpha \frac{\partial h_k}{\partial u_\alpha^{ij}},$$

где D_α — полная производная, соответствующая мультииндексу α. Здесь и далее функции h_i считаются достаточно гладкими.

Рассмотрим случай системы (1) при $n = 3$, $m = 1$, то есть систему вида

$$u_t^i = X^i(x,t,u_\alpha), \ (x,t) \in Q_T = \Omega \times (0,T) \ \ (i = \overline{1,3}, \ |\alpha| = \overline{0,s}), \tag{3}$$

где $u(x,t) = (u^1(x,t), u^2(x,t), u^3(x,t))$ — неизвестная вектор-функция; $u^i \in C_{t,x}^{1,2s}(\overline{Q}_T)$, $H_i[u] = \int\limits_\Omega h_i(x,t,u_\alpha)dx$ $(i = \overline{1,2}, \ |\alpha| = \overline{0,s})$, Ω — ограниченная область в $\boldsymbol{R}^n$ с кусочно гладкой границей $\partial\Omega$. Неизвестная вектор-функция $u = u(x,t)$ подчинена услоиям $u|_{t=0} = u_0(x)$, $u|_{t=T} = u_1(x)$ $(x \in \Omega)$, $\left.\frac{\partial^v u}{\partial n_x^v}\right|_{\Gamma_T} = \varphi_v$ $(v = \overline{0,s-1})$, где $\varphi_v \in C(\Gamma_T)$, $(v = \overline{0,s-1})$, $\Gamma_T = \partial\Omega \times (0,T)$, n_x — единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$.

Теорема 1. Если правые части (3) представимы в виде скобок Намбу, то выполняется следующее соотношение:

$$\frac{\delta X^1}{\delta u^1} + \frac{\delta X^2}{\delta u^2} + \frac{\delta X^3}{\delta u^3} = 0.$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 06-01-00664.

On the Infinite Analogue of Nambus' Systems

Slavko A.V.

Peoples Friendship University of Russia, Moscow, Russia

The systems which assume the representation in the form of Numbus' are discussed. One important property of such systems is considered.

О НЕКОТОРЫХ ДИСКРЕТНЫХ АНАЛОГАХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА

Смирнова В.Б., Шепелявый А.И.

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

Рассматривается класс дискретных фазовых систем автоматического управления. Их математическое описание имеет вид

$$\begin{aligned} &x(n+1) = Ax(n) + b\xi(n), \\ &\sigma(n+1) = \sigma(n) + c^*x - \rho\xi(n), \\ &\xi(n) = \varphi(n), \quad n = 0, 1, 2, \dots . \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь A — постоянная $(v \times v)$ - матрица, b, c — постоянные v-векторы, $\rho \geq 0$ — число, x, σ — соответственно v-мерная и скалярная компоненты вектора состояния системы, $\varphi(\sigma)$ — скалярная Δ - периодическая функция. Предполагается, что функция $\varphi(\sigma)$ имеет два нуля на промежутке $[0, \Delta)$. Предполагается также, что все собственные значения матрицы A лежат внутри единичного круга $|p| < 1$ $(p \in \mathbf{C})$, пара (A, b) управляема, а пара (A, c) наблюдаема.

Проводится исследование асимптотического поведения решений системы (1) вторым методом Ляпунова. Доказываются как теоремы, гарантирующие градиентный тип системы (1), так и теоремы, позволяющие строить оценки числа проскальзываний циклов для ее решений. Используются модификации введенной в работе [1] дискретной функции Ляпунова типа «квадратичная форма плюс интеграл от периодической нелинейной функции, обладающей нулевым средним значением на периоде». Периодические нелинейные функции с нулевым средним синтезируются на основе исходной нелинейности $\varphi(\sigma)$ с помощью специальных процедур [1,2].

Условия существования функций Ляпунова получаются с помощью частотной теоремы Якубовича-Калмана в дискретном случае. Они выражены в терминах передаточной функции линейной части системы

$$\chi(p) = c^*(A - pE)^{-1}b + \rho, \quad (p \in \mathbf{C}),$$

где E — единичная $(v \times v)$ - матрица, и имеют форму частотных неравенств, содержащих варьируемые параметры. Так для системы (1) с дифференцируемой нелинейностью, имеющей производную $\varphi'(\sigma) \in [\alpha_1, \alpha_2]$ $(\alpha_1\alpha_2 < 0)$, условия существования периодической функции Ляпунова могут быть сформулированы с помощью неравенства

$$\mathrm{Re}\{\varkappa\chi(p) + \tau(k_1\chi(p) + (p-1))^*((p-1) + k_2\chi(p))\} \geq \varepsilon|\chi(p)|^2 - \eta, \quad (p \in \mathbf{C}), \tag{2}$$

где ε, η, $\tau > 0$, $\varkappa \neq 0$, $k_1 \leq 2\alpha_1 - \alpha_2$, $k_2 \geq 2\alpha_2 - \alpha_1$.

В докладе устанавливается, что выполнение для всех $|p| = 1$ $(p \in \mathbf{C})$ частотного неравенства (2), при условии, что варьируемые параметры τ, $\varkappa$, η удовлетворяют определенным алгебраическим неравенствам, гарантирует системе (1) градиентный тип. Устанавливаются также частотные оценки числа проскальзываний циклов для системы (1) градиентного типа. Они получаются включением в алгебраические неравенства для варьируемых параметров специальным образом сконструированных функций, зависящих от начальных значений функций Ляпунова.

Литература

[1] Корякин Ю.А., Леонов Г.А. Процедура Бакаева-Гужа для систем со многими угловыми координатами. // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. 1976. № 3.

[2] Brockett R.W. On the asymptotic properties of solutions of differential equations with multiple equilibria // J. Diff. Equations. 1982. Vol.44. P. 249-262.

On Discrete Analogues for Periodic Lyapunov Functions

Smirnova V.B., Shepelyavyi A.I.

Saint Petersburg State University, Russia

For discrete phase control systems, frequency-domain criteria of gradient-like behavior and frequency estimates of cycle-slipping are obtained. For this purpose, periodic Lyapunov-type functions and Yakubovich-Kalman theorem are used.

О ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ С РАЗРЫВНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Сурков А.В.

Институт динамики систем и теории управления СО РАН Иркутск, Россия

Пусть R^n — n-мерное векторное пространство с евклидовой нормой $\|\cdot\|$, C_τ — пространство всех непрерывных функций $\psi(\cdot)$, определенных на отрезке $[-\tau, 0]$ со значениями в R^n с обычной sup-нормой $\|\cdot\|_C = \sup\|\psi(\theta)\|_{-\tau\leq\theta\leq 0}$. Рассмотрим систему функционально-дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = f(t, x_t(\cdot)), \tag{1}$$

где $x(t)\colon R \times R^n$ — вектор-функция, $x(\cdot) \in C_\tau$ — непрерывная функция для каждого t, определяемая равенством $x_t(\theta) = x(t+\theta)$, $-\tau \leq \theta \leq 0$ и $x_{t_0} = \varphi_0(\cdot)$ — начальная функция, $f\colon R \times C_\tau \to R^n$ — кусочно непрерывная функция, т.е. функция f непрерывная всюду, кроме многообразий вида $S_j = \{(t, \psi(\cdot))\colon W_j(\psi(0), \psi(\cdot)) = 0\} \subset R \times C_\tau$, $j = 1, \ldots, m$, где $W_j\colon R \times C_\tau \to R^n$ — инвариантно дифференцируемый функционал [1]. Обозначим через $S = \bigcup\limits_j S_j$ и дополнение к множеству S представим в виде объединения множеств Ω_i, для каждого из которых функционалы $W_j \neq 0$ сохраняют знаки на любом сечении $\{\psi(\cdot)\colon (t, \psi(\cdot)) \in \Omega_i\}$ множества Ω_i точкой $t = const$. Будем предполагать, что для каждого Ω_i и любой его граничной точки $(t, \psi(\cdot)) \in S$ существует конечный предел $\bar{f}(t, \psi(\cdot))$ функции $f(t', \psi'(\cdot))$ при условии $(t', \psi'(\cdot)) \to (t, \psi(\cdot))$, где $(t', \psi'(\cdot)) \in \Omega_i$ (при фиксированном i). Под решением задачи (1) понимается решение функционально-дифференциального включения:

$$\dot{x} = F(t, x_t(\cdot)).$$

Оно является аналогом решения в смысле А.Ф. Филиппова [2] для дифференциальных уравнений с разрывной правой частью без запаздывания (см. также [3]). При сделанных выше предположениях «скользящие режимы» функционально-дифференциальных уравнений с разрывной правой частью могут быть определены корректно. При некоторых дополнительных предположениях в виде односторонних условий Липшица выписываются также уравнения движений системы в «скользящем режиме» в неявной форме.

Работа выполнена при поддержке гранта INTAS № 06-1000013-9019.

Литература

[1] Ким А. В. i-Гладкий анализ и функционально дифференциальные уравнения. - Екатеринбург: УрО РАН, 1996.
[2] Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. - М.: Наука, 1985.
[3] Финогенко И.А. О скользящих режимах регулируемых разрывных систем с последействием // Известия РАН. Теория и системы управления. 2004. N4. С.19-26.

Functional-Differential Equations with Discontinuous Right Hand Side

Surkov A.V.

Institute of System Dynamics and Control Theory SB RAS, Irkutsk, Russia

Functional-differential equations with discontinuous right hand side are considered. Implicit form in the case of sliding modes which is equivalent to original form of functional differential equations in terms of Caratheodory solutions set is obtained.

МЕТОД ЛИНЕАРИЗАЦИИ В КВАЗИЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОМ ИЛИ СЛУЧАЙНОМ ВОЗБУЖДЕНИИ

Товстик П.Е., Товстик Т.М.

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

Исследуются установившиеся движения в квазилинейной системе с одной степенью свободы при гармоническом или стационарном случайном возбуждении. Под квазилинейной подразумевается система с не слишком большим уровнем нелинейности, при котором хаотические движения не возникают. Приближенные аналитические решения, полученные в результате линеаризации, сравниваются с результатами численного моделирования. Обсуждаются способы численного моделирования стационарных процессов.

Рассматривается уравнение Дуффинга с жесткой нелинейностью и с линейным сопротивлением

$$\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + x + x^3 = \xi(t),$$

для которого линеаризация при гармоническом возбуждении правильно описывает поведение решения в окрестности главного резонанса. А именно, линеаризация предсказывает возможность появления в зависимости от начальных условий двух различных устойчивых периодических движений. Что касается стационарного случайного возбуждения, то здесь линеаризация может исказить качественную картину. В окрестности резонанса линеаризация приводит к двум устойчивым различным стационарным движениям в то время, как при численном моделировании всегда получается только одно движение.

Рассматривается уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + f(x) = c_1\frac{d^2\xi}{dt^2} - c_2\left(\frac{dx}{dt} - \frac{d\xi}{dt}\right)\left|\frac{dx}{dt} - \frac{d\xi}{dt}\right|,$$

описывающее колебания нелинейной системы, моделирующей колебания морской стационарной платформы при гармоническом и случайном волнении. Это уравнение содержит несколько нелинейностей, в числе которых имеется слагаемое, содержащее квадрат разности скорости и возмущения. Для этой системы (в отличие от уравнения Дуффинга) при линеаризации приходится определять три параметра. Как и для уравнения Дуффинга, при гармоническом волнении линеаризация удовлетворительно аппроксимирует движение системы, а при случайном волнении наблюдаются существенные качественные различия между поведением линеаризованной системы и результатами численного моделирования.

On the Linearization of the Quasi-Linear System with One Degree of Freedom under Harmonic or Under Random Excitation

Tovstik P.E., Tovstik T.M.

Saint Petersburg State University, Russia

The stable motions in the quasi-linear system with one degree of freedom under harmonic or under random excitation are studied. As a quasi-linear system we mind the system with the comparatively low level of the nonlinearity so that the chaos does not appear. The approximate analytical solutions obtained after linearization are compared with the results of the numerical simulation. The methods of the stationary random processes simulation are discussed.

ГЛАДКАЯ ПРИВОДИМОСТЬ К НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЕ В ОДНОМ КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

Токарев С.П.

Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций им. проф. М.А. Бонч-Бруевича, Россия

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений с бесконечно дифференцируемой в окрестности начала координат правой частью. Предположим, что начало координат является особой точкой, все собственные числа линейного приближения, в которой чисто мнимы, а соответствующие частоты рационально независимы. При этих условиях доказывается, что если исходная система имеет функцию Ляпунова с определенными свойствами, то локально обратимой бесконечно дифференцируемой заменой переменных ее можно привести к нормальной форме, то есть к виду, когда после перехода к полярным координатам правые части не будут зависеть от угловых переменных. Тем самым получено обобщение теоремы, доказанной автором в [1].

Изложенный результат имеет аналог для случая конечной гладкости, близкие утверждения верны для диффеоморфизмов.

Литература

[1] Токарев С.П. Гладкая эквивалентность систем дифференциальных уравнений на плоскости в случае негрубого фокуса. - Дифф. уравн., 1977, т. 13, №5, с. 892–897.

Smooth Reducibility to the Normal Form in One Critical Case

Tokarev S.P.

The Bonch-Bruevich Saint-Petersburg State University of Telecommunications, Russia

A set of ordinary differential equations is considered, whose right hands sides are infinitely differentiable in the vicinity of the the origin of coordinates which appears to be a singular point. For some assumptions about the eigenvalues and frequencies of the linear approximation, the generalization of the theorem proved by the author previously is given.

ЗАДАЧА СТЕФАНА-ВАЛЛЕ ПУССЕНА ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ОДНОМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Филимонов А.М.

Московский государственный университет путей сообщения, Россия

В 1929 г. Валле-Пуссен рассмотрел задачу, в которой требовалось построить на отрезке такое решение обыкновенного дифференциального уравнения, которое удовлетворяло бы дополнительным условиям в некоторых заданных внутренних точках этого отрезка. Позже Чезари рассмотрел аналог этой задачи для гиперболических систем квазилинейных уравнений с частными производными. При этом дополнительные условия ставились на заданных «временных» слоях.

Возможен и другой класс задач, связанный с так называемой задачей Стефана. В этом случае область построения решения делится на две подобласти неизвестной линией, на которой задаются дополнительные условия. Обычно предполагается, что на этой линии происходит скачок решения. Сравнительно недавно в некоторых областях физики твердого тела появились своеобразные гиперболические системы квазилинейных уравнений, у которых часть семейств характеристик является прямыми линиями, перпендикулярными временной оси. При этом некоторые дополнительные условия ставятся на неизвестных внутренних линиях (что роднит эти задачи с задачей Стефана), на которых, однако, нет скачка решения (что роднит эти задачи с задачей Валле-Пуссена). В настоящей работе мы вводим новый класс задач, являющийся естественным обобщением выше упомянутых физических задач. Для этого класса задач доказана теорема о локальной разрешимости.

Работа поддержана РФФИ, грант 06-01-00356.

Stephan - Vallèe-Poussin Problem for Singular One Dimensional Hyperbolic Systems of Quasilinear Partial Differential Equations

Filimonov A.M.

Moscow State University of Communications, Russia

We take in consideration a new class of problems which related with Vallèe-Poussin problem and with Stephan problem for one dimensional hyperbolic systems of quasilinear partial differential equations. We obtain the theorem of local existence of continuous solution of this problem. We discuss some physical applications too.

The work was supported by grant RFBR 06-01-00356.

О ВНУТРЕННИХ ТОЧКАХ МНОЖЕСТВА УРАВНЕНИЙ С ОСОБЫМИ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ РЕШЕНИЯМИ

Чурин Ю.В.

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

Исследуя вопрос о числе решений периода ω уравнений вида

$$\dot{x} = x^n + p_1(t)x^{n-1} + \ldots + p_n(t), \tag{1}$$

где $p_j(t)$ — вещественные, ω-периодические функции, удовлетворяющие условию Липшица, В. А. Плисс в работах [1] и [2] показал, что при изменении коэффициентов p_j главной причиной изменения этого числа является превращение какого-либо из непрерывных периодических решений в разрывное, и обратно: превращение какого-либо разрывного периодического решение в непрерывное. Разрывные периодические решения указанного типа В. А. Плисс назвал *особыми периодическими решениями.* Вводя естественную метрику в множестве уравнений вида (1), А. П. Бегун доказал, что при $n \geq 3$ подмножество B уравнений, обладающих особыми периодическими решениями, не содержит внутренних точек. Оказывается, что для $n = 2$ это не так. Сформулировано условие того, чтобы уравнение (1) являлось внутренней точкой в B, и приведен соответствующий пример.

Литература

[1] *Плисс В.А.* О числе периодических решений уравнения с полиномиальной правой частью // ДАН СССР, 1959. Т. 127, № 5. С. 965–968.

[2] *Плисс В.А.* Нелокальные проблемы теории колебаний. М.: Наука, 1964. 320 с.

[3] *Бегун А.П.* Неплотность множества уравнений с особыми периодическими решениями // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31, № 8. С. 1445–1446.

On Inner Points of Manifold of Equations with Singular Periodic Solutions

Churin Yu.V.

Saint Petersburg State University, Russia

The condition for having singular periodic solutions of Riccati type equation and all nearly equations is determined. The example of equation with this condition is constructed.

НЕЛИНЕЙНОСТЬ — ПОРОЖДЕНИЕ ГЛОБАЛЬНОСТИ И НЕКОММУТАТИВНОСТИ

Яковенко Г.Н.

Московский физико-технический институт (государственный университет), Долгопрудный, Россия

Динамический процесс моделируется обыкновенными дифференциальными уравнениями. Процесс считаем линейным, если существует выбор переменных, при которых дифференциальные уравнения линейны. В противном случае — процесс считаем нелинейным. Известно [1], что, если у неавтономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений $\dot{x} = \varphi(t, x)$, $x \in R^n$ в области $O \subset R^{n+1}(t, x)$ существует общее решение $x = f(t, t_0, x_0)$, то неавтономной заменой переменных $y = f(t_0, t, x)$ система упрощается до "дальше некуда": $\dot{y} = 0$. Известно [1], что, если у автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений $\dot{x} = \varphi(x)$, $x \in R^n$ в области $O \subset R^{n+1}(t, x)$ существуют функционально независимые первые интегралы $w_1(x) - t = c_1$, $w_2(x) = c_2$, $\ldots$, $w_n(x) = c_n$ (это предположение, в частности, справедливо в окрестности неособой точки), то автономной заменой переменных $y = w(x)$ ($w(x)$ — функции, определяющие первые интегралы) система приводится к виду $\dot{y_1} = 1$, $\dot{y_2} = 0, \ldots, \dot{y_n} = 0$ (выпрямление векторного поля $\varphi(x)$). Таким образом, при естественных предположениях есть принципиальная возможность в некоторой области $O \subset R^{n+1}(t, x)$ автономной или неавтономной заменой переменных модель существенно упростить, то есть исходный процесс — линеен (локально!).

Пусть динамический процесс моделируется сепарабельной системой обыкновенных дифференциальных уравнений $\dot{x} = u_1(t)\varphi_1(x) + \cdots + u_m(t)\varphi_m(x)$, $x \in R^n$, $u_k \in R^1$. Такие модели типичны для управляемых, возмущённых, робастных процессов. Каждое векторное поле $\varphi_k(x)$ в приведённых предположениях можно выпрямить автономной заменой переменных. Спрашивается, можно ли автономной заменой переменных $x \leftrightarrow y$ упростить совокупность векторных полей $\varphi_k(x)$. Сформулируем два результата [2] с использованием операторов $X_k = \varphi_k(x)\partial_x$ и коммутаторов $[X_i, X_k]h(x) = X_iX_kh(x) - X_kX_ih(x)$.

1. Сепарабельную систему при $m \leqslant n$ автономной заменой переменных $y = g(x)$ можно привести к виду $\dot{y}_i = u_i(t)$, $i = \overline{1, m}$, $\dot{y}_i = 0$, $i = \overline{m+1, n}$ (все векторные поля выпрямлены) в том и только в том случае, если выполняется $[X_i, X_k] = 0$, $i, k = \overline{1, m}$ (операторы X_k коммутируют).

2. Сепарабельную систему при $m = n + 1$ автономной заменой переменных $y = g(x)$ можно привести к линейному виду $\dot{y} = u_1(t)Ax + u(t)$, $x, u \in R^n$, $u_1 \in R^1$, в том и только в том случае, если выполняется $[X_i, X_k] = 0$, $i, k = \overline{2, n+1}$, $[X_i, X_1] = \sum\limits_{j=2}^{n+1} a_jX_j$ (операторы $X_2, \ldots, X_{n+1}$ коммутируют и являются базисом идеала в алгебре Ли с базисом $X_1, \ldots, X_{n+1}$).

Таким образом, для того, чтобы сепарабельная модель приводилась к линейному виду (процесс линеен!) требуется коммутативность (или почти коммутативность) векторных полей, определяющих уравнения модели.

Работа поддержана РФФИ (проект 05-01-00940).

Литература

[1] Егоров А.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 384 с.
[2] Яковенко Г.Н. Обыкновенные дифференциальные уравнения и системы с управлением — сравнительный групповой анализ // Электронный журнал "Дифференциальные уравнения и процессы управления" . — 3, 2002. — С. 40–83. (http://www.neva.ru/journal)

Nonlinearity as a Result of Globality and Noncommutativity

Yakovenko G.N.

Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russia

The system of the ordinary differential equations in a normal form by nonsingular transition to other variables is locally reduced in the system, which in a right member has numbers. The system, for which the right member is a linear combination of vector fields with variable coefficients, by a change of variables is locally reduced in linear sort, if the field of vectors commute. Otherwise — globality and/or noncommutativity — the system to linear sort is not reduced.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЕСТЕСТВЕННЫХ, ТЕХНИЧЕСКИХ И ГУМАНИТАРНЫХ НАУКАХ

MATHEMATICAL MODELING IN NATURAL, TECHNICAL AND HUMANITARIAN SCIENCES

THE GENERALIZED MODEL OF CONSUMER DEMAND WITHOUT A UTILITY FUNCTION

Gorbunov V.K.

Ulyanovsk State University, Russia

The contemporary theory of consumer demand (CD) is developed on the basis of concept of the binary *preference relation* that is complete, transitive and continuous [1, 2]. These properties in aggregate provide existence of a continuous ordinal utility function being the indicator of the given preference relation. Accordingly, the rational behavior of consumers is modeled as maximization of an ordinal utility function. Properties of completeness and transitivity are restrictive for modeling real effects of a consumer choice, and many researchers last decades undertake attempts of revision of the CD theory on the basis of refusal from these properties. The most known result in this direction by A.Mas-Colell (1974) [3] is an abstract model that allows proving the existence of the demand correspondence, but the analytical instruments for the decision of applied problems within this model is not created yet.

In our modification of the CD model [4] instead of the complete, transitive and continuous preferences relation, or instead of a utility function, the vector field of consumer preferences is entered. Components of the field have a meaning of relative values of the goods, and their paired relations have a meaning of corresponding marginal rate of substitution. This field monotonously non-decreasing. The principle of an optimality of a consumer choice corresponds to the second Gossen's law in Hicks' interpretation [1, 2]. The demand functions generated by a field of preferences have almost all fundamental properties of the classical theory, except of symmetry of Slutsky matrix. In the case of potentiality of the preferences' field, its potential is a utility function, and the new model coincides with the classical one.

References

[1] Mas-Colell, A., Whinston M. and Green J. *Microeconomic Theory.* New York: Oxford Univ. Press, 1995.

[2] Gorbunov, V.K. *Mathematical model of consumer demand: Theory and applied potential (Matematicheskaya model' potrebitelskogo sprosa: Teoriya i prikladnoy potential).* Moscow: Economics Publishers, 2004 (in Russian).

[3] Mas-Colell, A., An equilibrium existence theorem without complete and transitive preferences, in *Journal of Mathematical Economics.* 1974. V.1. P. 237–246.

[4] Gorbunov, V.K. The generalized model of consumer demand, in *Equilibrium models of economics and power: Proc. of Conference and Section Math. Econ. of 13-th Baikal Internat. School-seminar "Optimization methods and their applications".* Irkutsk: MelentjevInst. Energy Systems SB RAS, 2005. P. 20–24.

EVALUATION OF LYAPUNOV EXPONENTS IN GENERALIZED LINEAR STOCHASTIC DYNAMICAL SYSTEMS

Krivulin N.K.

Saint Petersburg State University, Russia

The dynamics of many actual systems in engineering, manufacturing, communications, and other areas can be represented through a vector state equation, which proves to be linear in some idempotent algebra [1], and has a random state transition matrix. In the analysis of these systems, the mean (asymptotic) growth rate of the system state vector normally referred to as Lyapunov exponent, presents one of the main performance measures of interest.

Exact evaluation of the exponent may appear to be a difficult computational problem even for quite simple systems. The related results are mainly limited to systems of second order. Among them is the solution presented in [2] for the system with the state transition matrix having all its entries independent and exponentially distributed with unit mean. Another result has been obtained in [3] for a symmetric matrix with diagonal entries independent and exponentially distributed with unit mean, and the off-diagonal entries equal to zero.

For systems of arbitrary order, the Lyapunov exponents have been calculated in the case when the entries of the state transition matrix are all identically distributed with either a normal distribution [4] or a discrete uniform distribution [2]. In [5] the exponent is evaluated for the system with triangular matrix provided that its random entries have arbitrary probability distributions with finite mean and variance, and may be dependent.

In the current paper, we extend some results in [2,3] for second-order systems to cover more general cases of the state transition matrix with independent and exponentially distributed random entries. First, we evaluate the Lyapunov exponent for the case of symmetric matrix when the diagonal entries have the distributions with different parameters. Furthermore, the case is considered when the diagonal entries have one common distribution, whereas the off-diagonal entries have another distribution. Finally, we examine a general system with the matrix having all its entries exponentially distributed with arbitrary parameters. It is shown that evaluation of the Lyapunov exponent in that case can be reduced to solution of linear algebraic system followed by calculation of a linear functional of the solution.

The work was partially supported by the Russian Foundation for Basic Research, Grant 06-01-00763.

References

[1] Kolokoltsov V.N., Maslov V.P. Idempotent Analysis and Its Applications. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997. (Mathematics and its Applications, Vol. 401.)

[2] Olsder G.J. et al. Discrete event systems with stochastic processing times // IEEE Trans. Automat. Contr. 1990. Vol. 35. N 3. P. 299-302.

[3] Jean-Marie A. Analytical computation of Lyapunov exponents in stochastic event graphs // Performance Evaluation of Parallel and Distributed Systems. Solution Methods: Proc. 3rd QMIPS Workshop. Amsterdam: CWI, 1994. P. 309-341. (CWI Tracts, Vol. 106.)

[4] Cohen J.E. Subadditivity, generalized products of random matrices and operations research // SIAM Review. 1988. Vol. 30. N 1. P. 69-86.

[5] Krivulin N.K. The growth rate of state vector in a generalized linear dynamical system with random triangular matrix // Vestnik St. Petersburg Univ. Math. 2005. Vol. 38. N 1. P. 25-28.

SENSITIVITY ANALYSIS OF NONLINEAR SYSTEMS VIA WAVELET TRANSFORM

Musolino A., Rizzo R.

Department of Electrical Systems and Automations, University of Pisa, Italy

Physical systems may (and usually do) perform not exactly according to the design because of several reasons such as tolerance of their elements, environmental effects (temperature, humidity etc.) and aging. The design process should include an analysis of the effects of the parameters variation on the overall system response. With the term "response of a system" we indicate either the value of a single quantity (e.g. the efficiency of a system) or a characteristic function of the system.

Sensitivity analysis provides a first order approximation of the variation of system performance with respect to the parameters' variation. The transient sensitivity of nonlinear systems is a challenging problem as it may require substantial amount of storage and CPU time also on modern computers. A discussion about the related drawbacks, for example in the theory of circuits, is reported in [1] where an efficient but approximate method for the sensitivity evaluation in the time domain is introduced. The same problem is also addressed in [2, 3] where the authors treat the nonlinearities by the harmonic balance and the circuits are in periodic steady state.

In this paper we propose an innovative method based on the adjoint system for the sensitivity analysis of nonlinear systems. Although the presented procedure is developed in the field of the electrical circuits, it can be easily extended to a wide class of dynamic nonlinear systems. A wavelet [4] based description of frequency dependent devices is used [5]. Because of their generality and easiness of use, the scattering parameters are adopted to represent linear frequency dependent N-ports while nonlinearities are inherently described in the time domain. A wavelet balance approach is then employed to convert the original system of differential equations into a nonlinear algebraic system. The sensitivity analysis of the solution of this latter system is then approached by the adjoint system method.

The harmonic balance and its modifications are a well established set of techniques for the periodic steady state analysis of nonlinear circuits. With the harmonic balance the linear components are evaluated in the frequency domain, thus obtaining reduced computational times especially for distributed devices (i.e. transmission lines, microstrips, waveguides). Substantially the harmonic balance converts a set of differential equations in a nonlinear algebraic system that can be solved for the periodic steady state solution of the original differential equations. Once the algebraic system is obtained the adjoint system method described in [6] allows the evaluation of the sensitivities. The adjoint based approach is a classical method for sensitivity analysis of linear and nonlinear circuits; as known two system analysis are sufficient to obtain the sensitivities of the response of a circuit regardless the number of design parameters. When analyzing nonlinear circuits the adjoint system is obtained from the Jacobian of the last iteration; if its LU decomposition is available the computational overhead for sensitivity analysis is reduced to the evaluation of the Fourier transforms of all the time-domain derivatives at the nonlinear element level.

The sensitivity analysis of nonlinear circuits in transient behaviour is more complex especially in presence of frequency dependent devices. In these cases the time domain equations would contain convolution integrals and the harmonic balance is not immediately applicable.

The hierarchical approach, commonly used in the description of the linear parts of the circuits by modern microwave CAD, makes the analysis very efficient. At the highest level of hierarchy the overall system is reduced to a linear N port circuit loaded by the nonlinear devices and fed by the independent sources. The sensitivity formulas reported and the adopted hierarchical approach allow obtaining an elegant expression of the sensitivity. Furthermore the properties of the basis functions of the Multi Resolution Analysis (MRA) [7, 8] and the availability of analytic expression of the wavelet transforms of the time-domain derivatives at the nonlinear element level make the proposed method computationally efficient both in term of CPU times and memory requirements. Throughout the paper the Daubechies wavelets on the interval will be used and the sensitivity of nonlinear circuits in transient behaviour will be addressed.

References

[1] Feldmann P., Nguyen T.V., Director S.W., Rohrer R.A. // IEEE Trans. on Comp. Aided Des. of Int. Circ. and Syst. Vol. 10, pp. 171-183, Febr. 1991.

[2] Bandler J.W., Qi-Jun Zhang, Biernacki R.M. // IEEE Trans. on Microwave Theory and Tech. Vol. 36, n. 1, pp. 93-102, Jan. 1986.

[3] Bandler J.W., Qi-Jun Zhang, Biernacki R.M. // IEEE Trans. on Microwave Theory and Tech. Vol. 38, n. 11, pp. 1701–1710, November 1990.

[4] Daubechies I. Ten Lectures on Wavelets. Philadelphia, PA, SIAM 1992.

[5] R. Araneo, S. Barmada, S. Celozzi, M. Raugi. // IEEE Trans. on Microwave Theory and Tech. Vol. 53, n. 3, pp. 907–918, March 2005.

[6] Barmada S., Musolino A., Raugi M. // IEEE Trans. on Advanced Packaging., vol. 30, n. 1, pp. 86–96, February 2007.
[7] S. G. Mallat. // IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell., vol 11, no. 7, pp. 674–693, July 1989.
[8] A. Choen, I. Daubechies, P. Vial. // Appl. Comput. Harmon. Anal. V. 1, no. 1, pp. 58 81, Dec. 1993.

INFLUENCE OF THE DISPERSION IN MATHEMATICAL MODELS

Prozorova E.V.

Saint Petersburg State University, Russia

The mathematical modeling of different phenomena, roughly speaking, can be reduced to the solution of two problems: physical, that is creation of adequate model, and mathematical, that is formulation of the problem and the development of the solution method. The most bright interaction of these aspects appears for the Boltzmann equation, both for classical and modified ones [1–3]. Deriving the Boltzmann equation, one has a truncation error which is proportional to the product of the free path for the particle velocity by the time increment and by the gradients of the distribution function. By using the mean free path, we have the macroscopic equation for some velocity of molecules and one must use the velocity of considered molecule.

Another problem for the solving of this equation is the asymptotical methods. It is essential that selecting the local equilibrium distribution function f_0 as the basis in solution of the Boltzmann equation by the Chapman-Enskog method. Then tensor P is symmetric. Formally in that way we have values (density, linear moment, energy) with an error of the first order. This fact was noted by Hilbert without further use and correction

$$f(t, \boldsymbol{x}, \xi) = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left\{-\frac{m}{2kT}c^2\right\}, \quad (c^2 = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2) = (\xi - \boldsymbol{u})^2.$$

As the movement of the body is investigated in coordinates connected with the body it is the more

$$f = f_0\left[1 + \frac{p_{ij}m}{2pkT}c_i c_j - \frac{q_i m}{pkT}c_i\left(1 - \frac{mc^2}{5kT}\right)\right].$$

Besides that, it is essential for the value of viscosity consisted of two terms: one is traditional and second appeared from the calculation P_{ij}. So it is necessary to do iterations for all values (density, linear moment, energy). But in theory of the classical Boltzmann equation we have not the second term. Tensor P is entering as p in the Euler equations and as symmetric tensor in the Navier-Stokes equations. Consequently the theoretical p is not equal to p for the macroscopic Euler equations. Numerical solution of the Boltzmann equation does not have those mistakes. Numerical networks received from variation of functional are optimality do not coincide with the received from networks which are building at base of different equations. Then we have additional dissipation of energy and a more wide matrix. As an example we can consider the Heviside function. The present study confirms questions mentioned above.

References

[1] E.V. Prozorova. Influence of dispersion in mechanics. Seventh International Workshop on Nondestructive testing and Computer Simulations in Science and Engineering. Proceedings of SPIE, Washington, V. 5400, 2003, pp. 212–219.
[2] E.V. Prozorova, Influence of the dispersion on some structures in solids and fluids. Eighth International Workshop on Nondestructive testing and Computer Simulations in Science and Engineering. Proceedings of SPIE, Washington, V. 5831, 2004, pp. 174–177.
[3] E.V. Prozorova. The influence of dispersion in problem of aerodynamics. Mathematical Modeling, № 6, 2005, pp. 13–20 (Russian)

NUMERICAL MODELING OF AN UNSTEADY GLASS FIBER DRAWING PROCESS

Radev St.*, Boyadjiev T.**

*Institute of Mechanics, Bulgarian Academy of Sciences, Bulgaria
**Faculty of Mathematics and Informatics, Sofia University, Bulgaria

In real conditions the glass fiber drawing process appears as unsteady. There exist different sources of disturbances, e.g. draw velocity and temperature fluctuations, take-up velocity variations etc. The disturbances provoke undesirable variations of the fiber diameter.

We present numerical results on the propagation of disturbances downstream the fiber. The applied non-isothermal fiber model is based on a system of coupled one-dimensional continuity, momentum and heat transfer equations. In the latter the effects of heat convection and heat radiation cooling are included together with the axial heat transfer. The momentum equation is written for temperature dependent viscosity and additionally takes into account the effects of gravity, surface tension and air drag.

The problem is treated as unsteady, reflecting the response of the fiber to time dependent boundary conditions. A numerical scheme is proposed, using spline approximation of the unknown functions and their space derivatives.

The time dependent axial profiles of the fiber radius, axial velocity and temperature are analyzed as originated from different sources. The Fourier spectrum of the fiber radius response is calculated and analyzed, provided the drawing process operates in stable conditions.

The above described approach is extended to study the fiber instability in the draw resonance zone. In the latter self sustained perturbations appear, provoking periodical variations of the fiber radius. The critical values of the draw ratio parameter are obtained as function of the Stanton number as well as of the radiative transfer coefficient, when keeping the remaining governing parameters fixed. Our results are compared to the available results of some other authors listed below.

References

[1] Gupta G.K., Schultz W.W., Arruda E.M., Lu X. Non isothermal model of glass fiber drawing stability. Rheol. Acta 35(1996) 584–596.
[2] Onofri F., Lenoble A., Radev S., Guering P.H. Optical measurement of the drawing tension of small glass fibres, Meas. Sci. Technol. 15 (2004) 1279–1284.
[3] Shah Y.T., Pearson J.R.A. On the stability of non isothermal fibre spinning, Ind. Eng. Chem. Fundam. 11(1972) 145–149.

ON A METHOD OF THE INVESTIGATION OF DYNAMIC ECONOMIC MODELS

Simonov P.M.

Perm State University, Russia

A new approach to investigation of differential equations with aftereffect is considered in the report. Modifications of some well-known models of micro- and macroeconomics are proposed. Effective sufficient stability conditions of such models are demonstrated.

In the last 50 years models with delay (with lag, with aftereffect) are applied in all sciences: from mechanics to sociology. These models are more adequate for miscellaneous processes of reality. One of central problems is the problem of the correctness or the stability of models. Academician N.N. Krasovskii has elaborated and has extended to the given subjects Lyapunov's second method. In our research an other approach is offered. This approach has received the title a "method of elementary models" (a "method of model equations"). Ideas of the method may be found in classical publications of J. Liouville as well as in some works of G. Fubini and F.G. Tricomi. Mathematicians from Perm (N.V. Azbelev and his colleagues) offered the investigation method based on a reduction of a differential equation to an operator equation of the second kind. As a result, it has become possible to study the linear differential equation with delay by methods of the linear functional analysis. The new approach allowed one to reduce both differential equations with delay and boundary value problems for them. Subsequently these methods of transformation and the research of differential equations were called as the $W-$method of Azbelev. Then this idea has been applied to the problem of stability.

In our report we describe some models of microeconomics and macroeconomics. The elementary models method is applicable to these models. All of these have the inertial delay with the finite transient period. We offered the model of such time delay between an input process and an output process in the form of the linear differential equation with piecewise constant argument (step argument)

$$T\dot{y}(t) + y([t/T]) = x(t), \quad t \leq 0,$$

where $x(t)$ is an input process, $y(t)$ is an output process, $[\alpha]$ is the integer part of a number α. In all models such inertial delay with piecewise constant argument (IDPCA) was taken into account. In some models there are also other new features. We shall consider in detail some models of macroeconomics. For example, in the neoclassical nonlinear one-sector model of F.P. Ramsey, R.M. Solow, and T. Swan (RSS) of dynamics of the gross domestic product (GDP) there is used the idea by the paper of V.E. Nakoryakov, and V.G. Gasenko about the separation on the investments in the fixed assets (in the fixed capital) and the induced investment in the current assets (in the working capital). Last investments are determined by the link of the GDP accelerator. In the neoclassical nonlinear model of W.-B. Zhang of the GDP dynamics there is used the IDPCA between an input of the investments and the formation of the human capital. In the neoclassical nonlinear model of H. Uzawa and R.E. Lucas (jr.) for the dynamics of the GDP and the human capital are entered the similar delays. In the neoclassical nonlinear one-sector model of J. Tobin and M. Sidrauski of the GDP dynamics with regard for the money market there are considered the static and the adaptive expectations of inflation, including the adaptive expectations of inflation of IDPCA type. In all models the general production functions are used.

The research was supported by RFBR (№07–06–96028, №07–01–96060, №06–01–72020, №06–01–00744, №04–01–96016, №04–06–96002), by the Program "Universities of Russia" (ur.03.01.238), and by the Joint-Stock Company "PROGNOZ".

ОПТИМИЗАЦИЯ ДИНАМИКИ *ЛА* С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МОДЕЛИ СПИРАЛЬНОГО ПРОГНОЗА

Александров А.А., Кабанов С.А.

Балтийский государственный технический университет ВОЕНМЕХ им. Д.Ф. Устинова, Санкт-Петербург, Россия

Рассматривается задача управления летательным аппаратом (ЛА) при посадке с учётом ограничений на управление. В качестве прогнозирующей модели для пространственного траекторного движения летательного аппарата как твёрдого тела используется модель спирального движения (спиральный прогноз).

За управления для такой системы принимаются векторы перегрузки и угловой скорости, или их производные по времени [1, 2].

Такая форма модели рассматривалась при обеспечении автоматизированной посадки возвращаемых космических летательных аппаратов с использованием методов оптимизации по критерию Красовского [3, 4].

Синтез оптимального управления с учётом ограничений по принципу максимума сводится к решению двухточечной краевой задачи. При этом вычислительная трудоёмкость во многом определяется необходимостью численного интегрирования системы канонических уравнений.

На участках с предельным управлением используются аналитические соотношения для прогнозируемых компонент вектора состояния, что облегчает решение краевой задачи. Особое управление находится из условия равенства нулю вторых производных по времени от производной гамильтониана по управлению. Это условие приводит к нелинейным алгебраическим уравнениям.

Полученное решение позволяет использовать маневренные возможности ЛА в ситуациях с жёсткими ограничениями на управление. Оно допускает реализацию в темпе полёта.

Литература

[1] Красовский, А.А. Основы алгоритмического обеспечения систем автоматического управления полётом с глубокой интеграцией. М.: Научный совет АН РСФСР по комплексной проблеме: Кибернетика, 1992, с. 6-30.
[2] Красовский, А.А. Метод быстрого численного интегрирования одного класса динамических систем // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1989. №1. с.3-14.
[3] Кабанов, С.А. Управление системами на прогнозирующих моделях. СПбГУ, 1996.
[4] Wang, H.M., Kabanov, S.A. Optimal control of the Return of a Flying Object on the Hierarchy of Criterion of Quality // 2002 FIRA Robot World Congress. Seoul, Korea.

Optimization of the Flying Object Dynamics Using Spiral Prognosis Model

Aleksandrov A.A., Kabanov S.A.

Baltic State Technical University "Voenmech", Saint Petersburg, Russia

The problem of control of flying object boarding with account of restrictions on control is considered in this paper. The solution is built on Pontriagin's principle of maximum with use the spiral prognosis models of the air ship motion.

The obtained solution allows to use manoeuvrable capabilities of flying object in situations with stringent restrictions on control.

ОБ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ МЕХАНИКИ ГРУНТОВ

Алтынбеков Ш., Иманбаев Н.С., Ниязымбетов А.Д.

Шымкентский институт Международного казахско-турецкого универстета им. Х.А. Ясави, Казахстан

В работе исследовано распространение волн в неоднородной земляной среде и их влияние на процесс уплотнения грунтов. Решены следующие начально-краевые задачи:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C(x,t,u,H)L(u), \;\; L = \sum_{s=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_s}\left(K_s \frac{\partial u}{\partial x_s}\right), \;\; x = (x_1, x_2, x_3), t \in Ц_T,$$

$$U = (x, \tau_1) = \varphi_1(x), \;\; U_t(x, \tau_1) = \varphi_2(x), \;\; x \in \bar{D},$$

$$\pm K_s(x,t,u,H)\frac{\partial u}{\partial x_s} + X_3^{(\alpha)} u \mid_\Gamma = \psi_1(x,t) \mid_\Gamma,$$

$$\tau_i < t < T < \infty, \;\; S = 1,2,3; \;\; \alpha = 1,2,3,$$

$$\bar{Ц}_T = Dx(\tau_i \le t \le T < \infty), \; \bar{D} = (-l_1 \le x_1 \le l_1, \; -l_2 \le x_2 \le l_2, \; 0 \le x_3 \le h),$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = C_v(x,t,H,u)L(H), \;\; L = \sum_{s=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_s}\left(K_{\phi s} \frac{\partial H}{\partial x_s}\right), \;\; x = (x_1, x_2, x_3), t \in Ц_T,$$

$$H = (x, \tau_1) = H_0(x), \;\; x \in \bar{D},$$

$$\pm K_{\phi s}(x,t,H,u)\frac{\partial H}{\partial x_s} + \chi_{\phi s}^{(\alpha)} H \mid_\Gamma = \psi_2(x,t) \mid_\Gamma,$$

$$\tau_1 < t < T < \infty, \;\; S = 1,2,3; \;\; \alpha = 1,2,3,$$

$$\bar{Ц}_T = Dx(\tau_1 \le t \le T < \infty), \; \bar{D} = (-l_1 \le x_1 \le l_1, \; -l_2 \le x_2 \le l_2, \; 0 \le x_3 \le h).$$

Обоснованы методы их решения: метод итерации, метод суммарной аппроксимации, метод прогонки. Исследована погрешность, устойчивость и сходимость этих методов.

About one Mixed Problem of Ground Mechanics

Altynbekob S., Imanbaev N.S., Nijazymbetov A.D.

Shymkent Institute of the International Kazakh – Turkish University after H.A. Jasavi, Kazakhstan

In this work, the statement of a mixed problem of ground mechanics is formulated, and methods for its solution are proposed. Distribution of waves in a non-uniform earthen environment and their influence on the process of ground condensation are investigated.

О НОВОМ ПОДХОДЕ К ИДЕНТИФИКАЦИИ ПОЛИНОМОВ ВОЛЬТЕРРА

Апарцин А.С., Солодуша С.В., Спиряев В.А., Щербинин М.С.

Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, Россия

В [1] изложен способ идентификации ядер Вольтерра в математической модели

$$y(t)=\sum_{m=1}^{N}\int_{0}^{t}\cdots\int_{0}^{t}K_m(s_1,\ldots,s_m)\prod_{k=1}^{m}x(t-s_k)ds_k,\quad t\in[0,T],\tag{1}$$

дающей представление отклика $y(t)$ нелинейной динамической системы типа черного ящика на входной сигнал $x(t)$. Недостаток подхода [1] заключается в том, что многомерные интегральные уравнения Вольтерра I рода, к которым сводится идентификация K_m, имеют решения в нужных классах функций при весьма обременительных условиях разрешимости. Однако для целей прогнозирования реакции системы на то или иное внешнее возмущение знание самих K_m, вообще говоря, избыточно. При достаточно малом шаге сетки h можно аппроксимировать многомерные свертки в (1) согласно product integration method [2] и перейти от (1) к конструкции

$$y(ih)=\sum_{m=1}^{N}\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{i}g_{i_1,\ldots,i_m}\prod_{k=1}^{m}x((i-i_k+\frac{1}{2})h),\quad i=\overline{1,n},\quad nh=T,$$

где

$$g_{i_1,\ldots,i_m}=\int_{(i_1-1)h}^{i_1h}\cdots\int_{(i_m-1)h}^{i_mh}K_m(s_1,\ldots,s_m)ds_1\ldots ds_m,\quad i_1,\ldots,i_m=\overline{1,n},\tag{2}$$

так что достаточно уметь идентифицировать набор (2). Это можно сделать как с помощью тестовых возмущений из [1], так и иным способом, на базе специальных семейств кусочно-постоянных тестовых сигналов с носителем ширины h. Такой подход описан в [3] применительно к скалярному случаю. В настоящее время разрабатывается комплекс программ для идентификации некоторых «эталонных» математических моделей с векторным входом, а также для моделирования реальных процессов в теплообменных аппаратах.

Работа поддержана грантами РФФИ 05–01–00336 и NATO NR RIG 9812876.

Литература

[1] Апарцин А.С., Солодуша С.В. Об оптимизации амплитуд тестовых сигналов при идентификации ядер Вольтерра // Автоматика и телемеханика. – 2004. – № 3. – С. 116–124.

[2] Linz P. Product integration method for Volterra integral equations of the first kind // BIT, 1971. – Vol. 11. — P. 413 – 421.

[3] Солодуша С.В., Спиряев В.А., Щербинин М.С. Применение кубичного полинома Вольтерра к моделированию динамики теплообмена // Вестник ИрГТУ.– 2006, № 2(26), Т.3. – С. 179–185.

On New Approach for the Identification of the Volterra Polynomials

Apartsyn A.S., Solodusha S.V., Spiryaev V.A., Scherbinin M.S.

Melentiev Energy Systems Institute SB RAS, Russia

The algorithm for modeling nonlinear dynamic systems with vector input by the Volterra polynomials is proposed. It's based on the product integration method applied to multi-dimensional convolutions. The efficiency of proposed approach is illustrated on reference models of dynamic systems.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ В ПРОЦЕССЕ ИЗНОСА ПРИ УПРУГОМ КОНТАКТЕ

Аргатов И.И.

Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Россия

В работе [1] для описания динамики контактного взаимодействия шероховатых поверхностей при трении без смазки с учетом износа было предложено использовать математическую модель, основанную на применении нелинейной системы дифференциальных уравнений Лотки-Вольтерра. В частности, такая модель позволяет описать совместные флуктуации фактической площади контакта и скорости износа. Ранее все параметры линеаризированной модели, пригодной для моделирования малых флуктуаций, были определены аналитически.

Для моделирования периодических явлений, проявляющихся в тяжелонагруженных контактах предлагается применить асимптотические методы [2,3].

Литература

[1] Фадин Ю.А. Динамика разрушения поверхности при сухом трении // Письма в ЖТФ. 1997. Т. 23, № 15. С. 75–78.

[2] Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х. Дифферециальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. – М.: Наука, 1975. 248 с.

[3] Колесов А.Ю., Колесов Ю.С. Релаксационные колебания в математических моделях экологии. – М.: Наука, 1993. 125 с. (Тр. МИРАН. Т. 199)

Asymptotic Modelling of Periodical Phenomena during the Wear Process at the Elastic Contact

Argatov I.I.

Institute for Problems of Mechanical Engineering, RAS, Saint Petersburg, Russia

In the present work, periodical phenomena arising in heavy-loaded contacts are studied. Asymptotic methods are proposed for mathematical modelling.

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ИЗУЧЕНИЮ УСТОЙЧИВОСТИ УДАРНЫХ ВОЛН В ВЯЗКОМ ГАЗЕ

Блохин А.М., Мищенко Е.В.

Институт математики СО РАН, Россия

При описании движений с ударными волнами в моделях сплошной среды с диссипацией используются два подхода: структурный подход, когда ударная волна представляется в виде узкой переходной зоны, в которой параметры течения сплошной среды изменяются непрерывным образом, и подход, основанный на представлении ударных волн как поверхностей сильного разрыва. При применении последнего задача о развитии возмущений сводится (как и в невязком газе) к исследованию линейной смешанной задачи с линеаризованными граничными условиями на фронте ударной волны. Для математической модели Навье-Стокса в сжимаемой среде доказана неприемлемость указанного подхода. В результате изучения корректности линейной смешанной задачи, полученной путем линеаризации нестационарных уравнений Навье-Стокса и уравнений сильного разрыва относительно кусочно-постоянного решения, установлено, что ударная волна неустойчива (по Ляпунову). Предложена модификация смешанной задачи путем добавления таких граничных условий, чтобы для вновь полученной смешанной задачи можно было бы доказать асимптотическую устойчивость (по Ляпунову) тривиального решения.

On an Approach to Studying the Stability of Shock Waves in a Viscous Gas

Blokhin A.M., Mishchenko E.V.

Institute of Mathematics, Siberian Branch of RAS, Russia

A modified initial-boundary problem on stability of shock waves in a viscous gas is constructed and studied.

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ ПРИБЛИЖЕНИЯ ОБОБЩЕННЫМИ ГЛАДКИМИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫМИ СПЛАЙНАМИ

Бурова И.Г., Демина А.Ф.

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

Пусть l, s, m, n, r, N — целые числа, $r \geq 1$, $l \geq 1$, $s \geq 1$, $l+s = m+n+1 = N$, $\{x_j\}$ — сетка упорядоченных узлов на $[a,b]$. Функция $\varphi \in C^N[a,b]$ строго монотонна и отлична от нуля на $[a,b]$ и Вронскиан $W(x)$ системы функций $\varphi^i(x)$, $i = -n, \ldots, m$ отличен от нуля. Приближение $\widetilde{\widetilde{u}}(x) \in C^r[a,b]$ для $u \in C^N[a,b]$ при $x \in [x_j, x_{j+1}]$ берем вида $\widetilde{\widetilde{u}}(x) = \sum_{k=j-l}^{j+s} u(x_k)\widetilde{\omega}_k(x)$, где

$$\widetilde{\omega}_j(x) = \begin{cases} p_k(x)\left(\dfrac{\varphi(x_j)}{\varphi(x_{k-l})}\right)^n \displaystyle\prod_{\substack{j' \neq j \\ -l+1 \leq j'-k \leq s}} \dfrac{\varphi(x_{k-l}) - \varphi(x_{j'})}{\varphi(x_j) - \varphi(x_{j'})} + \\ + \left(\dfrac{\varphi(x_j)}{\varphi(x)}\right)^n \displaystyle\prod_{\substack{j' \neq j \\ -l+1 \leq j'-k \leq s}} \dfrac{\varphi(x) - \varphi(x_{j'})}{\varphi(x_j) - \varphi(x_{j'})} \quad x \in [x_k,\ x_{k+1}), \\ \qquad k = j-s, \ldots, j+l-1; \\ -p_{j+l}(x); \quad x \in [x_{j+l}, x_{j+l+1}); \\ 0, \quad x \notin [x_{j-s},\ x_{j+l+1}], \end{cases}$$

$$p_k(x) = \sum_{\lambda=1}^{r} \frac{1}{\lambda!} p_k^{(\lambda)}(x_k)(x - x_{k+1})^{r+1} \sum_{q=0}^{r-\lambda} (-1)^q \frac{(r+q)!}{r!\ q!} \frac{(x - x_k)^{\lambda+q}}{(x_k - x_{k+1})^{r+q+1}},$$

$$p_k^{(\lambda)}(x_k) = -\frac{\left(\varphi^{-n}(x) \displaystyle\prod_{-l+1 \leq j'-k \leq s-1} (\varphi(x) - \varphi(x_{j'}))\right)^{(\lambda)}_{x=x_k} \varphi^n(x_{k-l})}{\displaystyle\prod_{-l+1 \leq j'-k \leq s-1} (\varphi(x_{k-l}) - \varphi(x_{j'}))}.$$

В этом случае $u(x) \equiv \tilde{u}(x)$ при $u(x) = \varphi^i(x)$, $i = -n, \ldots, m$. Для удобства обозначим $\varphi_k = \varphi^{k-n-1}$, $k = 1, \ldots, N$. Тогда если $Lu = 0$ — однородное уравнение, имеющее фундаментальную систему решений $\varphi^\nu(x)$, $\nu = -n, \ldots, m$, а $Lu = f(x)$ — соответствующее неоднородное уравнение, то при $x \in [x_j, x_{j+1}]$, ξ_k, η_k между x и x_k,

$$\widetilde{\widetilde{u}}(x) - u(x) = \widetilde{R}(x) + p_j(x)\widetilde{R}(x_{j-l}), \quad \text{где}$$

$$\widetilde{R}(x) = \sum_{k=j-l+1}^{j+s} \frac{(x_k - x)^N}{N!} \omega_k(x) f(\xi_k) \sum_{i=1}^{N} \frac{\varphi_i^{(N-1)}(\eta_k) W_{Ni}(\xi_k)}{W(\xi_k)},$$

$W_{Ni}(\xi)$ — алгебраические дополнения элементов N-ой строки $W(\xi)$.

The Error of Approximation by Smooth Interpolation Splines

Burova I.G., Demina A.F.

Saint-Petersburg State University, Russia

Formulas of smooth non-polynomial interpolation splines with the "precision" property on the functions $\varphi^i(x)$ $i = 1, \ldots, n$ are obtained. The error of approximation by these splines using the solution of associated differential equation is estimated. The results of calculations are presented.

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ КОШИ С ПОМОЩЬЮ НЕПОЛИНОМИАЛЬНЫХ МИНИМАЛЬНЫХ СПЛАЙНОВ

Бурова И.Г., Демина А.Ф., Хассан И.Р.

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

Решаем задачу Коши $y' = g(x,y)$, $x \in [x_0,\ X]$, $y(x_0) = y_0$. Пусть N — целое число, $N \geq 2$, $\{x_j\}$ — упорядоченная по возрастанию сетка узлов на промежутке $[x_0,\ X]$, $x_0 < x_1 < \ldots < x_n = X$.

В интегральном тождестве

$$y(x_{j+1}) = y(x_j) + \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} y'(x)dx$$

заменим $y'(x)$ на выражение

$$\widetilde{y}'(x) = \sum_{k=j-l+1}^{j+s} y'(x_k)\omega_k(x),$$

где $l,\ s,\ n$ — целые числа, связанные соотношениями $l+s=n,\ l \geq 1,\ s \geq 1$. Если $\varphi_i(x),\ \ i=1,\ \ldots,\ n$ — достаточно гладкие линейно независимые функции, тогда функции $\omega_k(x)$, называемые базисными, находим при $x \in [x_j,\ x_{j+1}]$ из условий

$$y'(x) \equiv \widetilde{y}'(x),\ \text{при}\ y'(x) = \varphi_i(x),\ \ i=1,\ \ldots,\ k.$$

Считая, что $\operatorname{supp}\omega_j = [x_{j-s},\ x_{j+l}]$, для определения $\omega_j(x),\ \ x \in [x_j, x_{j+1}]$, получаем систему уравнений

$$\sum_{k=j-l+1}^{j+s} \varphi_i(x_k)\omega_k(x) = \varphi_i(x),\ \ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Обозначим $u(x) = y'(x),\ \ y_j \approx y(x_j)$. Пусть $Lu=0$ — однородное уравнение, имеющее фундаментальную систему решений $\varphi_1(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x)$, $Lu = f(x)$ — соответствующее неоднородное уравнение. Так как при $x \in [x_j,\ x_{j+1}]$

$$R(x) = \tilde{u}(x) - u(x) = \sum_{k=j-l+1}^{j+s} \frac{(x_k-x)^n}{n!}\omega_k(x)f(\xi_k)\sum_{i=1}^{n}\frac{\varphi_i^{(n-1)}(\eta_k)W_{ni}(\xi_k)}{W(\xi_k)},$$

где $\xi_k,\ \eta_k$ находятся между x и x_k , $W(x)$ — вронскиан системы функций $\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x)$ (считаем, что он отличен от нуля), W_{ni} — алгебраические дополнения элементов n-ой строки определителя $W(x)$, то для погрешности r_j метода

$$y_{j+1} = y_j + \sum_{k=j-l+1}^{j+s} g(x_k, y(x_k))v_k,\ \ v_k = \int_{x_j}^{x_{j+1}} \omega_k(x)dx,\ \ j=l,\ l+1,\ldots,\ N-s.$$

на промежутке $[x_j, x_{j+1}]$ имеем $r_j = \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} R(x)dx$. Приводятся результаты численных экспериментов.

The Solution of a Cauchy Problem Using Minimal Non-polynomial Splines

Burova I.G., Demina A.F., Hassan I.R.

Saint-Petersburg State University, Russia

The application of the minimal interpolation non-polynomial splines to the solution of a Cauchy problem is suggested. The results of calculations are given.

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СДВИЖЕНИЯ ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ С НЕЧЕТКОЙ АДАПТАЦИЕЙ

Вершинин М.И.*, **Вершинина Л.П.****

**Северо-Западный государственный заочный технический университет, Россия*
***Санкт-Петербургский государственный университет культуры и искусств, Россия*

Строительство подземных сооружений различного назначения, как правило, сопровождается процессом сдвижения вышележащей толщи грунтового массива. При определенных условиях этот процесс достигает земной поверхности, вызывая вертикальные сдвижения и горизонтальные перемещения ее точек. Характерными проблемами сложных динамических систем, к которым относится описываемая система, являются: проблема размерности — необходимость учета большого количества параметров, влияющих на результат; проблема неопределенности среды функционирования — принципиальная невозможность измерения некоторых параметров среды; проблема измерений — наличие большого количества параметров, для которых не существует точных способов количественного измерения; проблема формального описания эмпирических данных качественного характера; проблема изменения характеристик системы во времени. Отсюда — необходимость разработки и использования математических методов учета имеющихся качественных знаний, не представимых классическими средствами.

В этих условиях при моделировании динамических систем наиболее приемлемым является метод двухэтапной идентификации: проводится идентификация системы в широком смысле, т.е. математически записываются феноменологические зависимости системы. По мере исследования чисто математический аппарат дополняется логико-семантическим. На следующем этапе выполняем идентификацию системы в узком смысле, т.е. оцениваем и уточняем параметры модели. Это этап «настройки» феноменологической модели, полученной на предыдущем этапе.

Ядром компьютерной модели является алгоритм расчета сдвижений и деформаций, который основывается на аналитическом методе прогноза сдвижения земной поверхности. Динамическая составляющая процесса описывается модельной кривой накопления оседаний на период до 10 лет. При исследовании объекта, содержащего десятки выработок, возникает значительная погрешность, что вызывает необходимость адаптации модели. Модель содержит сотни параметров, описывающих процесс сдвижения, что затрудняет ее непосредственную адаптацию. Содержательный анализ позволяет выделить подмножество из нескольких десятков параметров, оказывающих основное влияние на процесс сдвижения. Такой набор параметров уже позволяет приступить к настройке модели.

Параметрическая идентификация выполняется путем адаптационной настройки модели. Для оценки и уточнения параметров модели авторами разработан алгоритм нечеткого покоординатного спуска с учетом ранжирования параметров. Ранжирование параметров осуществляется с использованием критериев, учитывающих чувствительность модели к изменению параметра, точность измерения параметра, геомеханическую значимость параметра. Для определения значений критериев привлекаются эксперты.

Предлагаемая авторами процедура ранжирования разработана на основе использования нечеткого отношения предпочтения и представляет собой модификацию метода построения множества недоминируемых альтернатив в условиях группового и индивидуального выбора. Адаптированная модель дает отклонение в пределах 10% на конец периода прогнозирования, что следует признать успешным результатом. Описанный подход был применен для прогнозирования сдвижений при проходке тоннелей Санкт-Петербургского метрополитена на площадках с самыми различными геомеханическими условиями.

Non-linear Dynamic Model of The Process for the Earth Surface Shift with Elements of Fuzzy Adaption

Vershinin M.I.*, **Vershinina L.P.****

**North-West State Correspondence Technical University, Saint-Petersburg, Russia*
***Saint Petersburg State University of Culture and Arts, Russia*

Traditional methods for identification, evaluation and forecasting of the state of complex systems and objects are based, mainly, on analytical, numerical and statistical methods. In practice, however, their use to identify the systems calls difficulties. Characteristic example of a difficulty to use traditional methods is the task to forecast a shift of the earth surface under conditions of uncertainty. Authors of this contribution have developed the adaptive non-linear dynamic model of the process for the earth surface shift under conditions of incompleteness and inaccuracy of information about the features of the rock mass being undermined, and it is a model with fuzzy dynamics' parameters. The model submitted has been implemented as a software and successfully tested in practice.

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ И СИНТЕЗ НЕЛИНЕЙНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ С ПРЕДПИСАННЫМ ПРОЦЕССОМ УПРУГОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ

Гаврюшин С.С.

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Россия

Излагаются теоретические основы, численные алгоритмы и накопленный практический опыт реализации принципа управляемой упругой деформации при проектировании функциональных элементов технических устройств, представляющих собой нелинейно деформируемые тонкостенные механические конструкции.

Для достижения требуемых эксплуатационных характеристик в процессе численного моделирования осуществляется своеобразное программирование нелинейных деформационных свойств будущей конструкции с целью последующей реализации требуемых процессов. Подобные элементы получили в литературе [1,2] название элементов управляемой упругой деформации. Процесс деформирования может быть инициирован действием внешних сил, давления, температуры или происходить благодаря эффекту памяти формы. Методика анализа элементов управляемой упругой деформации опирается на идею мультипараметрического подхода при математическом моделировании на ЭВМ процессов нелинейного деформирования тонкостенных конструкций. Для получения дискретного отклика на монотонное изменение внешнего воздействия в процесс деформирования закладывается эффект упругого перескока. При численном анализе используется стратегия последовательного исследования однопараметрических нелинейных задач, принадлежащих многопараметрическому семейству, в которое погружена анализируемая задача, что позволяет выйти на решение задачи численного синтеза конструкции.

Анализ рассматриваемых в работе упругих элементов проводится с помощью алгоритмов продолжения решения по параметру в сочетании с приемом смены подпространства управляющих параметров [3]. В качестве определяющих используются соотношения геометрически нелинейной лагранжевой теории тонких упругих стержней и оболочек. В соотношения целенаправленно вводятся два и более независимых параметра, позволяющих управлять процессом нелинейного упругого деформирования. Параметры управления могут быть включены в описание геометрии элемента, свойств материала, условий закрепления, внешних термомеханических воздействия и т.д. С помощью разработанной численной методики, реализованной в виде пакета прикладных программ, проведены исследования ряда перспективных конструкций [4,5,6].

Литература

[1] Александрова А.Т. Новые способы передачи и формирования движения в вакууме. М.: Высшая школа, 1979. 69с.

[2] Гаврюшин С.С. Элементы управляемой упругой деформации для функциональных устройств робототехнического оборудования// Мехатроника, № 5, 2000. С. 16-18.

[3] Гаврюшин С.С. Численное моделирование и анализ процессов нелинейного деформирования гибких оболочек// Изв. АН СССР. МТТ, 1994. № 1. С. 109-119.

[4] Гаврюшин С.С. Численный анализ и синтез гибких элементов конструкций с управляемой упругой деформацией. Проблемы прикладной механики, динамики и прочности машин: Сб. статей. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. С. 114-129.

[5] Патент СССР№ 1797699 Манометрическая трубчатая пружина/ Гаврюшин С.С.- № 4942927/10, Заявл. 06.06.91. Опубл. 23.02.93. Бюл. № 7.

[6] Патент РФ № 2218191 Эндовазальный мини-робот/ Г.В. Саврасов, А.В. Покровский, С.С. Гаврюшин, О.С. Нарайкин, А.С. Ющенко, В.И. Поспелов - № 200210938/14; Заявл. 11.04.2002.; Опубл. 10.12.2003. Бюл. № 34.

Computer Analysis and Synthesis of Nonlinear Mechanical Structures with Guided Elastic Deformation

Gavriushin S.S.

Moscow Bauman State Technical University, Russia

Theoretical principles, strategy and algorithms are stated for numerical analysis and syntheses of mechanical structures and devices, realizing the principle of the guided elastic deformation. For numerical simulation, a strategy of consequent analysis of single-parametric nonlinear problems is used, belonging to the multi-variable family, in which the problem under investigation is embedded that allows solving the structures syntheses problem. The algorithm of the computer analysis is based on the parameter continuation methods combined with the "control parameter sub-space changing" technique proposed by the author. Prospects approach is illustrated by examples of analysis and syntheses of new types of mechanical designs and devices.

СИНЕРГЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОГНОЗА ВАЛОВОГО ВНУТРЕННЕГО ПРОДУКТА

Галеева Е.И., Гафиятов И.З., Потапов Г.П.

Нижнекамский филиал ИЭУП, Казань, Россия,
Нижнекамский филиал КГТУ им. А.Н. Туполева – КАИ, Казань, Россия

Проблема моделирования социально-экономических систем (СЭС) является актуальной, но сложной задачей. Сложность проблемы обусловлена синергетическими свойствами СЭС, такими как открытость, нелинейность, неравновесность и энтропийность.

Равновесное состояние, то есть состояние саморегуляции исследуется методами моделирования кибернетических систем, математическим аппаратом, разработанным А.Н. Колмогоровым, Н. Винером, В.А. Котельниковым, К. Шенноном, У. Эшби, Л. Столерю, Н.Н. Моисеевым, В.М. Глушковым и другими известными специалистами в области кибернетического моделирования.

Что касается СЭС, то модели их кибернетического саморегулирования представлены в работах С. Бира, К.А. Багринского, Н.Н. Моисеева, Н.Е. Кобринского, Е.З. Майминаса, Л. Столерю, С.С. Шаталина и других исследователей. Однако кибернетические модели СЭС оказываются недостаточно эффективными при постановке задач экономического роста, развития и качественных изменений системы, поскольку они фетишизируют тенденцию системы к равновесию.

Пока очень мало исследований посвящено практическому применению синергетических методов в области решения проблем СЭС, а большинство из них до сих пор носят декларативный характер. Кроме того, до настоящего времени остаются трудности в формализованном описании нелинейных процессов в экономике.

Для описания поведения системы Г. Хакен считает важным установить в ней связи между эффектом какого либо действия в системе или на систему и его причиной в зависимости от времени. Для описания процессов самоорганизации в системах Г. Хакен предложил модель фазовых переходов Л. Ландау, где вводится параметр порядка в виде величины, которая подчиняет себе другие параметры или подсистемы.

В настоящей работе в качестве такого параметра порядка используется величина активности системы (АС), обусловливающего синергетический подход к процессу динамического моделирования СЭС. Указанные выше связи между эффектом от какого-либо действия в системе и его причиной в зависимости от времени показаны в виде некоторой величины, представляющей собой коэффициент выхода АС за счет синергетического преобразования определяющих производственных факторов: цены, затрат, прибыли и прочих. Показаны практические результаты использования синергетического моделирования для динамики изменения ВВП (на примере России), определяемого как произведение трудоспособного населения (трудовых ресурсов) на их стоимость. Здесь трудовые ресурсы — это «продукт» страны соответствующего количества и качества. Прибыль СЭС определяется как разность между ВВП и расходами в виде затрат на воспроизводство трудовых ресурсов.

С помощью АС показано влияние различных факторов на значимые параметры СЭС. К числу таких факторов помимо производственных, можно отнести: экономические, экологические, социально-политические, правовые, психологические, религиозные, этнические и другие, если обнаруживается взаимосвязь этих факторов с прогнозируемыми технико-экономическими параметрами СЭС.

Синергетическая модель позволяет использовать еще мало изученные синергетические процессы, присущие развитию, как живых, так и костных систем, с целью поиска детерминированных подходов в определении точек бифуркаций и оптимальных результатов при решении поставленных задач с учетом возможных флуктуаций в развитии СЭС.

Предлагаемая синергетическая модель прогноза ВВП может служить одной из альтернатив для разработки и практического использования моделирования синергетических систем в экономике и переосмысления вопросов экономического развития.

The Synergy Model of the GDP Projections

Galeeva Y.I., Gafiyatov I.Z., Potapov G.P.

Nizhnekamsk branch of IEML, Kazan, Russia,
Nizhnekamsk branch of Kazan state technical university named by A.N. Tupolev, Russia

The synergy model of the GDP projection is presented here. The parametrical analysis of basic GDP (with Russia in view) economic indexes has been done. The interaction of starting and projecting GDP points are shown. The results of basic parameters calculations are proved by statistic data.

НЕЛИНЕЙНЫЙ ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ РАБОТЫ МАЛОЙ НАУЧНОЙ ГРУППЫ

Герасимова И.Б., Хасанова Н.В., Уразбахтина Л.Р.

Уфимский государственный авиационный технический университет (УГАТУ), Россия

При анализе деятельности малых научных групп (МНГ) представляет интерес изучение механизма управления процессом реализации научных проектов как нелинейным объектом управления. Сложность исследования обусловлена: наличием человека как элемента системы, поведение которого является источником различного рода неопределенностей; сложностью отношений (от дружелюбного до конфликтного) между субъектами, изменение которых ведет к изменению структуры организационной системы; неопределенностью уровня сложности научной проблемы, для решения которой и построена организационная система.

Исследования в нелинейных оргсистемах процессов управления проводились на основе достижений синергетики, которая охватывает почти все современные отрасли знаний. Рассмотрены несколько типов нелинейных динамических моделей эффективного управления процессом реализации научного проекта. Все модели адекватно отражают качественную сторону взаимодействия участников проекта. В частности, был проведен анализ эффективности работы МНГ, состоящей из трех участников, выполняющих два проекта:

$$\begin{cases} \dot{Y} = -a_0Y + k_{01}X_1Y + k_{02}X_2Y - b_{01}X_1(Z_1+Z_2) - b_{02}X_2(Z_1+Z_2) + u_0, \\ \dot{X}_1 = -a_1X_1 + k_{10}YX_1 - b_1YZ_1 + u_1, \\ \dot{X}_2 = -a_2X_2 + k_{20}YX_2 - b_2YZ_2 + u_2, \\ \dot{Z}_1 = -c_1Z_1 + (X_1+X_2)Y, \\ \dot{Z}_2 = -c_2Z_2 + (X_1+X_2)Y. \end{cases}$$

Здесь Z_1 и Z_2 — темпы выполнения работ по двум проектам, а Y, X_1 и X_2 соответственно темпы выполнения работ научным руководителем и двумя сотрудниками.

В этой модели можно достичь режима поддержания постоянного темпа выполнения работ по проекту. При ослаблении стабилизирующих связей здесь возникает хаос в поддержании темпов выполнения проекта. Возникновение конфликтных ситуаций между участниками проекта приводит к значительному снижению темпов выполнения работ. В этой системе также могут появляться автоколебательные режимы, колебания типа «странного» аттрактора, а также могут возникнуть более сложные формы хаотических движений.

Проведенные исследования показали, что при определенной организации взаимодействия между активными элементами (участниками проекта) и внешней координацией работ можно обеспечить поддержание желаемого темпа выполнения работ по научной проблеме.

Дальнейшие исследования направлены на усложнение нелинейной модели в сторону увеличения как количества элементов в системе, так и параметров, характеризующих состояние каждого из участников проекта, т.к. для научных организаций характерна одновременная работа над несколькими научными проектами, программами, проблемами, над которыми работают несколько малых групп, лабораторий, отделов, используя имеющийся интеллектуальный, научно-технический, инновационный потенциалы, а также финансовые ресурсы.

На основе когнитивного анализа можно организовать рациональное использование накопленных потенциалов в решении научной проблемы, выявить причины неэффективного функционирования системы и, ликвидировав эти причины, вскрыть внутренние резервы системы и повысить тем самым эффективность работы малой научной группы.

Nonlinear Dynamic Efficiency Analysis of Small Science Group Activity

Gerasimova I.B., Khasanova N.V., Urazbakhtina L.R.

Ufa State Aviation Technical University, Russia

The use of the procedure of the maximal possible scientific-technical potential of small science teams on the basis of the mathematical modeling methods is proposed. Nonlinear models of implementation of two scientific projects for three performers with different relation variants between them are investigated.

ОЦЕНКА ДИНАМИКИ СИСТЕМ ЛОГИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Горбатов В.А., Горбатов А.В., Горбатова М.В., Денисенко М.В.

Московский государственный горный университет, Россия,
Московский государственный индустриальный университет, Россия

При проектировании систем логического управления на алгоритмическом, абстрактном, кодировании нетерминальных символов, структурном этапах не учитываются переходные процессы, во многом определяющие безотказность цифровой аппаратуры. На заключительном этапе проектирования — этапе моделирования для учета приходных необходимо построение аномальной области пространства, в котором проявление переходных процессов может породить ложную информацию. Это порождение определяется риском в логических структурах, особенно реализованных на базе нанотехнологий.

Используя теорию трасс, в докладе предложены аналитические выражения, определяющие условия появления риска в логических структурах. Распределение вычислительных рисковых трасс определяет аномальную зону пространства, в котором определен алгоритм функционирования системы логического управления.

Построение оптимальной по емкостной и временной сложностям программы моделирования логических структур сведено к построению введенного графа связности, обладающего свойствами эйлеровости и гамильтоновости.

Разработан инструментарий автоматизированного проектирования программ моделирования логических структур.

Evaluation of Logical Control Systems Dynamics

Gorbatov V.A., Gorbatov A.V., Gorbatov M.V., Denisenko M.V.

Moscow State Mining University, Russia
Moscow State Industrial University, Russia

Analytical expressions determining the conditions of risk occurrence in logical systems are derived in the present contribution. A new technique for the automated design of programs for logical structures simulation is elaborated.

АНАЛИЗ СВОЙСТВ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА КОГНИТИВНЫХ МОДЕЛЯХ. МЕТОДОЛОГИЯ И ПРОГРАММНАЯ СИСТЕМА

Горелова Г.В.

Таганрогский государственный радиотехнический университет, Россия

В докладе представлены возможности и результаты моделирования структуры, динамики, исследования устойчивости, связности, сложности и других свойств социально-экономических систем на их когнитивных моделях.

Последнее время с помощью когнитивных информационных технологий удается учитывать и исследовать многие слабоструктурированные проблемы сложных систем, характерные для функционирования их в условиях неопределенности. Это особенно полезно в ситуациях современной «нелинейной экономики» России. Основное направление работы определяется концепцией устойчивого развития России и находится в русле научных исследований и проектирования допустимых (лучших в том или ином смысле) стратегий развития систем разного уровня (страна, регион, ..., организация). В настоящее время исследования посвящены разработке моделей и методов теории принятия решений в сложных системах, когнитивному моделированию и управлению ситуациями в них, разработке блоков в интеллектуальных системах поддержки управленческих решений, основанных на когнитивных моделях. Разработана методология комплексных исследований сложных систем и соответствующая ей программная система когнитивного моделирования (ПС КМ), отличающаяся от похожих по назначению программ структурой, разнообразием выполняемых исследовательских функций, возможностями решать комплекс взаимосвязанных задач системного анализа. Основные задачи: идентификации объекта в виде когнитивных моделей разного типа, анализа сложности и связности, управляемости, наблюдаемости, устойчивости, чувствительности, сценарного (импульсного) моделирования, прогнозирования развития ситуаций, принятия решений.

К настоящему времени совместно с рядом исследователей выполнены теоретические и практические работы: по исследованию устойчивости, проектированию стратегий устойчивого развития региона и исследованию взаимодействия системы образования и социально-экономической системы (на примере Республики Адыгеи), по моделированию экологических проблем (на примерах Краснодарского водохранилища и экологического состояния г. Таганрога), по моделированию деятельности перестраховочной компании и разработке стратегий ее устойчивого развития, по моделированию инвестиционной деятельности и разработке стратегий устойчивого развития (внедрены в практику местного самоуправления г. Таганрога в форме различных нормативно-правовых документов и конкретных инвестиционных решений), по моделирование взаимодействия рекреационной отрасли с социально-экономической системой и туристского бизнеса (на примере Ростовской–на–Дону области) и ряд других практических приложений.

По материалам исследований опубликованы статьи и книги [1–4]. Проведенные исследования позволили выйти за рамки традиционных когнитивных информационных технологий. Получен также ряд новых теоретических результатов: определена взаимосвязь топологической структуры графа со свойствами импульсных процессов, разработаны модели взаимодействия сложных систем (коалиционного или конфликтного), представляемых предложенными динамичными иерархическими когнитивными структурами.

Литература

[1] Горелова Г.В., Джаримов Н.Х. Региональная система образования, методология комплексных исследований.– Краснодар: изд. ГУП «Печатный двор Кубани», 2002.
[2] Пьявченко О.Н., Горелова Г.В., Боженюк А.В., Клевцов С.А., Каратаев В.Л., Радченко С.А., Клевцова А.Б. Методы и алгоритмы моделирования развития сложных ситуаций. Таганрог: ТРТУ, 2003.
[3] Горелова Г.В., Захарова Е.Н., Гинис Л.А. Когнитивный анализ и моделирование устойчивого развития социально-экономических систем. – Ростов н/Дону: Изд-во РГУ, 2005.
[4] Горелова Г.В., Захарова Е.Н., Радченко С.Н. Исследование слабоструктурированных проблем социально-экономических систем: когнитивный подход. – Ростов н/Дону: Изд-во РГУ, 2006.

Analysis of the Characteristics of the Socio-Economical Systems on the Basis of Cognitive Models, Methodology and Program System

Gorelova G.V.

Taganrog Technological Institute of the South Federal University, Russia

In this report methodology, opportunities and results of modeling the structure, dynamics, research of stability, sensitivity, connectedness, complexity and the other characteristics of socio-economical systems and their other cognitive models are introduced.

The program system of cognitive modeling (PS CM) is elaborated, it is notable for it's structure, varieties of executable researching functions, possibilities to search complex interrelated problems of system analysis. A whole series of new theoretical results is getting on. The main of them are:
- determination of interrelations of topological structure of the graph with characteristics of impulse processes,
- models of interrelation (coalition or conflict) of complicated systems, that are realized by dynamical hierarchical cognitive structures.

There are practical elaborations for a number of territories of the South Federal region, and several books and articles on the investigation materials are published.

СРАВНЕНИЕ ЛОКАЛЬНО НАИБОЛЕЕ МОЩНОГО НЕСМЕЩЕННОГО КРИТЕРИЯ С КЛАССОМ КРИТЕРИЕВ ДЛЯ ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗ О ПАРАМЕТРЕ НЕЛИНЕЙНОЙ РЕГРЕССИИ

Григорьев Ю.Д.

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет, Россия

В докладе представлен метод сравнения мощности критериев для проверки близких гипотез о скалярном параметре нелинейной регрессии. Сравниваются локально наиболее мощный несмещённый l_n – критерий с критериями $\psi_n^{(m)}$ заданного класса Ψ_n, включающим, в частности, известные критерии Неймана-Пирсона, Рао, Вальда и т.д. Показано, что мощность соответствующих критериев начинает отличаться, начиная с членов порядка малости n^{-1}, и это отличие определяется только членами порядка малости $n^{-1/2}$ стохастических разложений соответствующих статистик. Показано, что если в модели наблюдений $\{R^n, B^n, P_\theta^n : \theta \in \Theta\}$ распределение P_θ^n симметрично, то l_n – критерий является локально наиболее мощным относительно критериев $\psi_n^{(m)} \in \Psi_n$. Это опровергает предположение Рао, что критерий, носящий его имя, является наилучшим в классе критериев Ψ_n. Если распределение P_θ^n асимметрично, то l_n – критерий свойством наибольшей мощности не обладает. В этом случае он может доминироваться каким-либо из критериев $\psi_n^{(m)}$. Полученные результаты интерпретируются геометрически в полуплоскости статистических инвариантов $OB_{1n}B_{2n}$, где $B_{1n} \geq 0$ – статистическая кривизна Эфрона.

Comparison Between the Locally Most Powerful Unbiased Test and the Class of Tests for Hypotheses on the Nonlinear Regression Parameter

Grigoriev Yu.D.

State Electrotechnical University, Saint-Petersburg, Russia

We present a method for the comparison of the powers of tests for testing contiguous hypotheses on the scalar nonlinear regression parameter. In this report locally the most powerful unbiased l_n – test and the class Ψ_n of the $\psi_n^{(m)}$ – tests known as Neyman-Pirson's, Rao's, Wald's tests are considered. It is shown, that the l_n – test is locally the most powerful with regard to $\psi_n^{(m)} \in \Psi_n$ for the observation model $\{R^n, B^n, P_\theta^n : \theta \in \Theta\}$ with a symmetrical distribution P_θ^n. It is don't verify the Rao's conjecture, that Rao's test is the most powerful one among the all tests. When the distribution the l_n is asymmetrical, the l_n – test has no the locally the most powerful property. In the asymmetrical case the l_n – test any of $\psi_n^{(m)}$ – tests is dominated. In this report we give a geometric interpretation of the results obtained in terms of statistical invariants.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПРОЦЕССОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ И ОПТИМИЗАЦИИ АЭРОКОСМИЧЕСКИХ СИСТЕМ (АКС)

Давидсон Б.Х., Исаев В.К.

Центральный аэрогидродинамический институт имени проф. Н.Е. Жуковского, Жуковский, Россия

Метод функций Ляпунова и метод сравнения В.М. Матросова играют важную роль в качественном анализе устойчивости и других свойств динамических систем. Методы редукций и представимости, развитые С.Н. Васильевым [1], позволяют освободиться от некоторых ограничений метода сравнения и расширить классы допустимых моделей исследуемых, вспомогательных систем и класс отображений (редукторов), отвечающих за переносимость свойств. Математические модели основных задач механики полета АКС, построенные в рамках принципа максимума Понтрягина и численных методов решения краевых задач, представляют собой нежесткие системы, функционирующие в условиях хаоса разного уровня и происхождения. Методы В.М. Матросова и С.Н. Васильева перспективны для анализа общих свойств (устойчивости, ограниченности, инвариантности, управляемости, притяжения и др.) подобных систем. В этом свете в докладе дан обзор основных задач механики полета современных и перспективных АКС с использованием математических моделей, допускающих аналитическое исследование структуры оптимального управления. Предпочтение отдается моделям, разработанным ранее авторами [2]: однородное центральное поле тяготения (ОЦП) и его модификации, квазикеплерова модель и др. Изучаются условия переносимости свойств, в частности, законов сохранения (плоскости оптимального управления в ОЦП, других интегралов динамических систем).

Рассмотрена задача оптимального управления для АКС, включающих летательные аппараты с различными типами двигателей. Сформулированы универсальные условия оптимальности управления величиной тяги и ориентацией самолета-носителя и ракеты-носителя, допускающие сквозное решение задачи от начала предстартового маневра самолета-носителя до выхода космического аппарата на орбиту. Исследованы качественные особенности оптимального управления при движении ракетного аппарата в пустоте. Аналитически решена краевая задача и получен синтез оптимального управления на активных участках. Исследованы вычислительные аспекты решения краевой задачи для системы уравнений оптимального движения. Особое внимание уделяется анализу влияния различных факторов на устойчивость процедур математического моделирования, оптимизации и терминального управления, обеспечивающих реализацию оптимальных траекторий АКС при действии возмущений.

Построено параметрическое семейство оптимальных траекторий выведения космических аппаратов с помощью АКС. Рассмотрены особенности оптимального предстартового маневра самолета-носителя. Дан численный анализ оптимальных траекторий выведения КА на низкие орбиты ИСЗ для трёх схем выведения. Определены предпочтительные области для различных схем выведения.

Литература

[1] С.Н. Васильев. Функции сравнения, морфизмы и другие редукторы в качественном анализе динамических систем. IX Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. Аннотации докл-в. Т. I, (Н. Новгород, 22-28 августа 2006): Н. Новгород, изд-во Нижегородского госун-та им. Н.И. Лобачевского, 2006, с. 31.

[2] Б.Х. Давидсон, В.К. Исаев. Исследование оптимальных траекторий авиационно-космических систем (АКС). Там же, с. 42–43.

Mathematical Modeling Processes Stability and Airspace Systems Optimization

Davidson B.Kh., Isaev V.K.

Central Aerohydrodynamic Institute by name of N.E. Zhukovsky, Russia

Lyapunov method and Matrosov comparison method are playing important role in qualitative assay of stability and other properties of dynamical systems. Vasyliev reduction and representativity methods allow to get rid of some limits of comparison method and to enlarge classes of obtainable models of systems under investigation. Mathematical models of the main problems in the airspace systems flight mechanics are constructed using Pontryagin maximum principle and numerical methods of solution of the boundary value problems look like flexible systems functioning in the chaos conditions of different scale and origin.

In that case there is a review of basic flight mechanics problems of the airspace systems using mathematical models permitting the opportunity of analytical research of optimal control structure. Conditions of transferability properties are considered, in particular, some conservation laws. The problem of optimal control for airspace systems with different jet types is discussed. Universal conditions of optimal control of thrust value and orientation of the carrier aircraft and carrier vehicle are formulated. These conditions allow the solution-through from the carrier aircraft pre-launch until the vehicle ascent. The boundary value problem is solved analytically and optimal control synthesis on the active arcs is received. Special priority was given to analysis of the influence of the different factors on the stability of the mathematical modeling procedures, optimization and terminal control, that provide airspace systems optimum trajectory under perturbations.

АЛГОРИТМЫ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ВЭЙВЛЕТНОГО АДАПТИВНОГО СЖАТИЯ

Демьянович Ю.К., Косогоров О.М.

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

Как известно, эффективные алгоритмы обработки больших потоков информации (с точки зрения экономии ресурсов компьютера: памяти и времени обработки) связаны с разложением потока информации на составляющие: выделяется основной информационный поток, уточняющий информационный поток и информационный поток с несущественной информацией. Вопрос о том, какая информация является основной, какая уточняющей, а какая несущественной, выходит за рамки математических исследований и должен решаться в каждом отдельном случае специалистом предметной области. Широко используемым средством обработки являются наборы вложенных пространств функций и их представлений в виде прямой (а иногда и ортогональной) суммы вэйвлетных пространств (см., например, [1-2]).

В данной работе строятся и исследуются адаптивные параллельные алгоритмы обработки потоков числовой информации с резко меняющимися характеристиками, а также предлагаются программные реализации упомянутых алгоритмов. В первом приближении упомянутые числовые потоки характеризуются наличием регулярной и сингулярной частей. Разработанные программные средства позволяют повысить эффективность сжатия (по сравнению с имеющимися алгоритмами JPEG и др.) для рассматриваемых потоков. Предлагаемый алгоритм позволяет полностью загрузить двухъядерную или двухпроцессорную архитектуру. Возможно рассмотрение нескольких следующих приближений: второго, третьего и т.д. В этом случае число эффективно загружаемых ядер (параллельных процессоров) равно числу используемых приближений. Алгоритм восстановления позволяет провести восстановление с потерей последних приближений или (при необходимости) полностью восстановить сжатый числовой поток. Разрабатываемые алгоритмы и программы отлажены на модельных примерах.

Общий ход рассуждений состоит в следующем (см. [3-4]). Первоначально с каждой сеткой связываются B-сплайны второй степени. Пространство B-сплайнов, построенных для крупной сетки, содержится в пространстве аналогичных сплайнов, построенных для мелкой сетки. Использование биортогональной (к B-сплайнам) системы функционалов позволяет получить прямое разложение на вэйвлетные пространства и соответствующие формулы реконструкции и декомпозиции для бесконечной сетки узлов с двумя (конечными или бесконечными) точками сгущения. Все результаты верны в случаях конечного числа узлов на конечном отрезке, а также для полубесконечного интервала.

Литература

[1] Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. Москва-Ижевск. 2004.
[2] Малла С. Вэйвлеты в обработке сигналов. М. 2005.
[3] Демьянович Ю.К. Всплесковые разложения в пространствах сплайнов на неравномерной сетке // Докл. РАН.– 2002.– Т. 382.– № 3. – С. 313–316.
[4] Демьянович Ю.К. Калибровочное соотношение для B-сплайнов на неравномерной сетке// Математическое моделирование.– 2001.– Т. 13.- № 9.– С. 98–100.

Algorithms of Parallel Wavelet Adaptive Compression

Demjanovich Yu.K., Kosogorov O.M.

Saint Petersburg State University, Russia

Adaptive parallel algorithms of signal processing are investigated. Formulas of decomposition and reconstruction are deduced. Program realizations of the algorithms for two-processors system are proposed. Schemes of the program realizations are demonstrated.

КАЛИБРОВОЧНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ НЕПОЛИНОМИАЛЬНЫХ СПЛАЙНОВ ЛАГРАНЖЕВА ТИПА

Демьянович Ю.К., Макаров А.А.

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

Как известно, сплайны можно построить с помощью гладкой склейки функций, задаваемых на соседних сеточных интервалах; после этого обычно изучаются их аппроксимационные свойства (см., например, работу [1] и библиографию в ней).

В предлагаемой работе используется другой подход: рассматриваются аппроксимационные соотношения как система уравнений, из которой выводятся (как полиномиальные, так и неполиномиальные) сплайны; при этом аппроксимационные, а зачастую и интерполяционные свойства не требуют специального изучения, поскольку они вытекают из аппроксимационных соотношений.

Цель данной работы состоит в построении системы вложенных пространств упомянутых сплайнов при произвольном измельчении исходной сетки, что ведет к вэйвлетному разложению сигналов с быстро меняющимися характеристиками (см. [2]); это существенно экономит ресурсы (время счета и память) вычислительных систем. Здесь рассмотрены дважды непрерывно дифференцируемые сплайны третьего порядка (с минимальным носителем) на неравномерной сетке; при этом координатные сплайны имеет минимальный носитель.

Основной результат этой работы — калибровочные соотношения (см. [3]) для упомянутых сплайнов, дающие представление координатных сплайнов на крупной сетке с помощью линейной комбинации такого же рода сплайнов на мелкой сетке. Известные кратно-масштабные уравнения (см., например, [4]) является частным случаем калибровочных соотношений. В данной работе используются полные цепочки векторов (см. [3]), вводятся понятие локальной ортогональности для двух цепочек векторов, рассматриваются обобщенные сплайны и условия их гладкости, вводится специальная полилинейная вектор-функция, зависящая от девяти четырехмерных векторных аргументов, и рассматриваются ее свойства; на базе этих свойств устанавливаются упомянутые выше калибровочные соотношения. Основное утверждение может быть представлено как операторное соотношение между вектором координатных сплайнов на крупной сетке и вектором координатных сплайнов на мелкой сетке, причем упомянутый оператор может быть представлен бесконечной матрицей. Получаемые в результате калибровочные соотношения содержат не более двух ненулевых слагаемых и допускают простую реализацию на параллельной вычислительной системе.

Литература

[1] Buchwald B., Muhlbach G. Construction of B-splines for generalized spline spaces generated from local ECT-systems // Journal of Computational and Applied Mathematics, 2003. vol. 159 (2), pp. 249–267.
[2] Демьянович Ю.К. Гладкость пространств сплайнов и всплесковые разложения // Доклады РАН. 2005. Т. 401, № 4. С. 1–4.
[3] Демьянович Ю.К. О вложенности пространств минимальных сплайнов // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2000. Т. 40. № 7. С. 1012–1029.
[4] Малла С. Вэйвлеты в обработке сигналов. М. 2005.

Caliber Relations for Non-Polynomial Splines of Lagrange's Type

Demjanovich Yu.K., Makarov A.A.

Saint Petersburg State University, Russia

The aim of the paper is construction of caliber relations for coordinate non-polynomial splines connected with refinement of grids. The obtained relations contain less then three terms and therefore the relations can be easily realized with two-processor computer.

СОВРЕМЕННОЕ РАЗВИТИЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МЕТОДОВ

Ермаков С.М.

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

Как известно, стохастические вычислительные методы (метод Монте-Карло) используют представление решений широкого круга прикладных задач в виде континуальных интегралов (в частности, интегралов по траекториям случайных процессов). Подобные представления позволяют строить алгоритмы, обладающие естественным свойством параллелизма.

В докладе обсуждаются вопросы оптимальности (с вероятностью близкой к 1) таких алгоритмов, а также обобщения на случай обобщенных интегралов в смысле главного значения. Возникают новые интересные задачи определения возможностей распараллеливания и исследования стохастической устойчивости. Обсуждаются приложения к задачам газовой динамики и гидродинамики.

Modern Development of Stochastic Numerical Methods

Ermakov S.M.

Saint Petersburg State University, Russia

Stochastic numerical methods (the Monte-Carlo method) use representation of solutions for a wide class of applied problems in terms of continual integrals. This allows to build algorithms possessing a natural parallelism property. In the present contribution, optimality of such algorithms is discussed as well as their generalizations. Applications to the problems of gas dynamics and hydrodynamics are discussed.

КАНОНИЧЕСКИЙ МЕТОД ИНТЕГРИРОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Ефимов И.Н., Морозов Е.А.

Чайковский технологический институт (филиал)
Ижевского государственного технического университета, Россия

В работах [1–3] рассмотрен и теоретически обоснован канонический метод численного интегрирования динамических уравнений Гамильтона. Исходя из теории канонических преобразований, было доказано, что сам процесс численного интегрирования указанным методом можно рассматривать как малое, по порядку шага, консервативное возмущение исследуемой динамической системы. Вывод о консервативности возмущений позволяет использовать метод для исследования устойчивости нелинейных гамильтоновых систем численными методами.

Одним из направлений развития указанного метода является построение функциональных рядов канонических преобразований, позволяющих исследовать влияние консервативных возмущений различной степени малости по параметру шага интегрирования.

В предлагаемой работе строится теория канонических функциональных рядов и исследуются некоторые общие их свойства. Производится исследование характера нелинейности консервативного возмущения вносимого старшими членами рядов (первого, второго и третьего). Выполненные исследования позволяют сделать вывод о возможности использования канонического интегрирования для исследования динамических систем в условиях малых консервативных возмущений.

Для решения прикладных задач нелинейной динамики рассматриваются различные алгоритмы численного интегрирования, построенные на основе теории канонических рядов и исследуются их свойства.

В качестве примера рассмотрено использование метода для исследования устойчивости фазового ансамбля точек в условиях нелинейного потенциала.

Литература

[1] Ефимов И.Н., Морозов Е.А. Каноническое интегрирование гамильтоновых систем. Екатеринбург: Изд-во Института экономики УрО РАН, 2006. – 143 с.
[2] Ефимов И.Н., Морозов Е.А. Каноническое интегрирование динамических систем. Екатеринбург-Ижевск: Изд-во Института экономики УрО РАН, 2006. – 199 с.
[3] Морозов Е.А. Каноническое интегрирование в проектирование динамических систем. Екатеринбург-Ижевск: Изд-во Института экономики УрО РАН, 2006. – 196 с.

Canonical Method of Integration of Nonlinear Dynamic Systems

Efimov I.N., Morozov E.A.

Chaykovskiy technology institute (branch) of the Izhevsk state technical university, Russia

In works [1–3] a canonical method of numerical integration of Hamilton's dynamic equations is considered and theoretically proved. Starting from the canonical transformations theory, it has been proved, that the process of the numerical integration by this method can be considered as a small (regarding the order of step) and conservative perturbation of the investigated dynamic system. The conclusion about conservatism of this perturbation allows using this method for the numerical study of the stability of Hamilton's nonlinear systems.

One of the directions of the development of this method is a construction of the functional series of the canonical transformations. They allow investigating the influence of the conservative perturbation of various degree of infinitesimal, using the step of integration.

In this work we construct the canonical functional series theory and investigate some their general properties. There is a study of the behavior of the nonlinearity of the conservative perturbation, which brings in by the senior terms of series (the first, the second and the third). These studies allow drawing a conclusion about the availability of the canonical integration for the investigation of the dynamic systems in the conditions of the small conservative perturbation.

For the solution of the applications of nonlinear dynamics we consider the various algorithms of the numerical integration based on the canonical series theory and we investigate their properties.

As an example we consider the use of this method for the investigation of stability of the phase ensemble of points in the conditions of nonlinear potential.

References

[1] Efimov I.N., Morozov E.A. Canonical integration Hamilton's systems. Ekaterinburg: Publishing house of Institute of economy of the Russian Academy of Science Ural branch, 2006. – 143p.

[2] Efimov I.N., Morozov E.A. Canonical integration of dynamic systems. Ekaterinburg-Izhevsk: Publishing house of Institute of economy of the Russian Academy of Science Ural branch, 2006. – 199p.

[3] Morozov E.A. Canonical integration in dynamic systems designing. Ekaterinburg-Izhevsk: Publishing house of Institute of economy of the Russian Academy of Science Ural branch, 2006. – 196p.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КАНОНИЧЕСКОГО МЕТОДА ИНТЕГРИРОВАНИЯ В ПРОЕКТИРОВАНИИ СИСТЕМ ЭЛЕКТРОННОЙ И ИОННОЙ ОПТИКИ

Ефимов И.Н., Морозов Е.А.

Чайковский технологический институт (филиал)
Ижевского государственного технического университета, Россия

При разработке систем электронно-ионной оптики возникает необходимость анализа нелинейных динамических систем в обобщенно потенциальных статических полях (электрических и магнитных). Одним из важных частных случаев таких полей, являются магнитные поля с аксиальной симметрией, обладающие свойством фокусировки заряженных частиц, что позволяет использовать их в магнитных спектрометрах, бетатронах, ускорителях [1].

В работе рассматриваются вопросы использования метода канонического интегрирования динамических уравнений Гамильтона [2] для моделирования движения заряженных частиц в аксиально-симметричных магнитных поля. Исследуются фокусирующие свойства указанных полей и аберрации вызванные нелинейностью динамической системы.

На основе проведенного анализа найден специальный вид магнитного поля обладающего наименьшими аберрациями при фокусировке фазовых ансамблей заряженных частиц от линейно-протяженных источников.

Предельно высокие фокусирующие свойства найденного поля делают перспективным его использование в областях микро- и нанотехнологий.

Литература

[1] Стэррок П. Статистическая и динамическая электронная оптика. М.: Мир, 1958, С. 72.
[2] Ефимов И.Н., Морозов Е.А. Каноническое интегрирование гамильтоновых систем. Екатеринбург: Изд-во Института экономики УрО РАН, 2006. – 143 с.

Use of Canonical Method of Integration in Designing of Electronic and Ionic Optics Systems

Efimov I.N., Morozov E.A.

Chaykovskiy technology institute (branch) of the Izhevsk state technical university, Russia

In the design of electron-ion optics systems there is a necessity of the analysis of the nonlinear dynamic systems in the integrated potential static fields (electric and magnetic). One of the important special cases of such fields is the magnetic fields with axial symmetry, which focus the charged particles. This makes it possible to use them in the magnetic spectrometers, the betatrons and the accelerators [1].

In this work we consider the use of the method of canonical integration of Hamilton's dynamic equations [2] for modeling the movement of the charged particles in the axial-symmetric magnetic fields. We investigate the focusing properties of these fields and the aberrations induced by the nonlinearity of the dynamic system.

On the basis of the lead analysis we found the special kind of the magnetic field, which has the least aberrations when focusing the phase ensembles of the charged particles of the linearly- extensive sources.

The very high focusing properties of this field do its use more perspective in the areas of the micro- and nanotechnology.

References

[1] Sterrok P. Statistical and dynamic electronic optics. Moscow.: the World, 1958, p.72.
[2] Efimov I.N., Morozov E.A. Canonical integration Hamilton's systems. Ekaterinburg: Publishing house of Institute of economy of the Russian Academy of Science Ural branch, 2006. – 143p.

К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ЭФФЕКТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫМ ПРОСТРАНСТВОМ УНИВЕРСИТЕТА

Захарченко В.С.

Иркутский государственный университет, Россия

Необходимость повышения качества подготовки специалистов диктует новые приемы управления университетами, базирующиеся на системно-аналитических методах принятия решений [1]. Одним из путей повышения эффективности управления является создание систем поддержки принятия решений, обеспечивающих комфортную информационно-аналитическую среду подготовки решений при ведущей роли человека.

Автором рассматривается задача построения адекватной математической модели образовательного пространства университета, которое выбирается в качестве объекта управления. Понятие образовательного пространства, представляющее собой динамичное единство субъектов образовательного процесса и системы их отношений, является важной характеристикой образовательного процесса. Образовательное пространство, как и его основные элементы (подсистемы), относятся к числу сложных слабоструктурированных систем, имеющих существенные особенности [2]. Это определяет специфический характер задачи управления в образовании и частично объясняет тот факт, что до настоящего времени основным инструментом управления являются неформализованные механизмы принятия решений, опирающиеся на опыт и интуицию управленцев, при ограниченном применении объективизированной информации.

Постановка задачи управления не всегда рассматривается как отдельная процедура в процессе формирования системы управления, т.к. в большинстве ситуаций организация системы и процесса управления являются типовыми процедурами. Особенно это характерно для задач управления техническими системами. При рассмотрении развивающихся систем прямой перенос опыта управления техническими системами часто приводит к отрицательным результатам — системы управления оказываются неэффективными. Одной из причин таких неудач является недостаточное внимание к этапу постановки задачи управления в развивающихся системах, в первую очередь за счет специфичных для данных систем особенностей: целеполагания, целеустремленности и адаптивности подсистем.

Характер поведения развивающихся систем также специфичен. Для таких систем не характерно детерминированное поведение, при котором повторение воздействия ведет к однозначному повторению реакции системы. Лишь при очень ограниченных условиях ее поведение может рассматриваться как стохастическое, при котором воспроизведение условий состояния среды функционирования системы влечет за собой восстановление определенного набора законов распределения входных переменных системы, рассматриваемых как случайные величины. В большинстве случаев рассматриваемая система ведет себя как индетерминированная (при воспроизведении совокупности условий функционирования вступает в действие механизм функциональной адаптации).

Формулируется специфика целей эффективного управления в современной университетской системе; предлагается аппарат формализованного описания образовательного пространства университета, обеспечивающий учет специфики и условий функционирования и взаимодействия подсистем изучаемого объекта. Все это является важным этапом в решении задачи эффективного управления современным вузом.

Литература

[1] Захарченко В.С. Системный анализ и проблема подготовки конкурентоспособной личности в университетской системе // Материалы X Международной научно-практической конференции «Системный анализ и управление».– С.-Петербург, 2006.

[2] Захарченко В.С. К построению концептуальной модели образовательного пространства университета // Вестник БГУ. Серия 13: Математика и информатика.– Выпуск 3.– Улан-Удэ: Изд-во Бур.госун-та, 2006.– с. 210–217.

On the Solution of the Problem of Modern University Effective Management

Zakharchenko V.S.

Irkutsk State University, Russia

The important stage in the effective management of the modern higher educational establishment is the creation of definite systems for supporting of decisions, ensuring the comfort information — analytical environment for the preparation of these decisions with the leading role of a person.

The author considers the construction of the adequate mathematical model of the educational space of the university which is the object of management. The author formulates the specific purposes of the effective management of the modern university system and suggests the system of the formalized description of the modern university, ensuring the consideration of the specific character and conditions of functioning and interaction of subsystems of the investigated object.

АСИМПТОТИКА СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ К ПРЕДЕЛЬНОМУ РЕЖИМУ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Зейфман А.И.

Вологодский государственный педагогический университет и ВНКЦ ЦЭМИ РАН, Россия

Рассматривается система линейных дифференциальных уравнений, описывающая процесс рождения и гибели с пространством состояний $S_N = \{0, \ldots, N\}$. Матрица A такой системы является якобиевой; ее поддиагональные элементы a_k и наддиагональные элементы b_k положительны, а сумма элементов каждого столбца равна нулю.

Пусть Σ_N — спектр матрицы A, а $-\xi_N$ и $-\beta_N$ — соответственно нижняя и верхняя грани множества $\Sigma_N \backslash \{0\}$. Как известно, все точки $\Sigma_N \backslash \{0\}$ действительны, отрицательны и различны. Более того, $-\xi_N$ и $-\beta_N$ соответственно дают показатели максимальной и минимальной скоростей сходимости к предельному режиму (для общего нестационарного случая эти вопросы изучены в [1]). Положим $\alpha_k = a_k + b_{k+1} - \delta_{k+1}a_{k+1} - \delta_k^{-1}b_k$, $\chi_k = a_k + b_{k+1} - \sigma_{k+1}a_{k+1} - \sigma_k^{-1}b_k$, где $\delta_k > 0$, $\sigma_k > 0$. Ранее было доказано (см., например, [2]), что существуют единственная положительная последовательность $\{\delta_k\}$ и единственная положительная последовательность $\{\sigma_k\}$ такие, что все $\alpha_k = \beta_N$, а все $\chi_k = \xi_N$. В настоящей работе с помощью изучения вспомогательных последовательностей $\{\delta_k\}$ и $\{\sigma_k\}$ исследуется асимптотика β_N и ξ_N (при $N \to \infty$) для некоторых новых классов приложений.

Для модели системы массового обслуживания типа $M/M/N/N+R$ с соответствующими коэффициентами $a_k = \lambda \geq 0$, $b_k = \mu \cdot \min(k, N) > 0$ получаем: $\beta_{N+R}/\mu \to 1$, $\xi_{N+R}/N\mu \to 1$ при $N \to \infty$ и любом поведении R.

Для простой стохастической модели химической кинетики (см. [3]) коэффициенты определяются формулами $a_k = a(N-k)^2/V$, $b_k = kb$, где $V = N^r$, а a, b — положительные константы. Получаем: при $r > 1$ $\beta_N/b \to 1$, $\xi_N/Nb \to 1$ при $N \to \infty$; при $r = 1$ $\beta_N = O(1)$, $\max(a, b \leq \xi_N/N \leq a + b)$ при $N \to \infty$; при $0 \leq r < 1$ $O(N^{(l-r)/2} \leq \beta_N) \leq O(N)$, $\xi_N/aN^{2-r} \to 1$ при $N \to \infty$.

Работа поддержана РФФИ, грант № 06-01-00111.

Литература

[1] Zeifman A. I. Upper and lower bounds on the rate of convergence for nonhomogeneous birth and death processes.// Stochastic Processes and Their Applications. 1995. 59. 157–173.
[2] Грановский Б.Л., Зейфман А.И. О нижней границе спектра для некоторых моделей среднего поля // Теория вероятностей и ее применения. 2004. 49. 164–171.
[3] Pollett P.K., Vassalo A. Diffusion approximations for some simple chemical reaction schemes// Advances in Applied Probability. 1992. 24. 875–893.

Asymptotics of the Convergence Rate to the Limit Regime for Some Linear Systems of Differential Equations

Zeifman A.I.

Vologda State Pedagogical University, Russia

A system of linear differential equations describing birth and death processes with the state space $S_N = \{0, \ldots, N\}$ is considered. Based on the study of auxiliary sequences $\{\delta_k\}$ and $\{\sigma_k\}$, asymptotics β_N and ξ_N (at $N \to \infty$) are investigated for some new classes of applied problems. A simple stochastic model of chemical kinetics is considered as an example.

ОБРАТИМЫЕ МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ И МЕТОДЫ СИНТЕЗА ВЫСОКОКАЧЕСТВЕННОГО УПРАВЛЕНИЯ

Зотов Ю.К.[*], **Тимофеев А.В.**[**]

[*] *Санкт-Петербургский государственный университет, Россия,*
[**] *Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН, Россия*

Для широкого класса нелинейных моделей динамики механических и мехатронных систем, роботов и летательных аппаратов получены критерии их обратимости (на подпространстве), глобальной управляемости, стабилизируемости и декомпозируемости. Синтезированы в аналитическом виде программные движения и программные управления такими объектами, а также алгоритмы высококачественной робастной стабилизации программных движений и адаптивного и нейронного управления. Предложены нелинейные канонические преобразования координат пространства состояний и управлений, упрощающие синтез и анализ декомпозирующих и высококачественных регуляторов движения объектами с обратимыми нелинейными моделями динамики, имеющими нелинейные перекрёстные связи. На основе полученных результатов синтезированы оптимальные, стабилизирующие, робастные, адаптивные и нейронные регуляторы движений роботов и автономных (беспилотных) летательных аппаратов, использующие обратные связи по физическим или каноническим координатам вектора состояний.

Работа выполнена при частичной поддержке грантов РФФИ № 05–01–08044–офи и № 06–08–01612.

Reversible Models for Non-Linear Dynamics and Methods for Synthesis of High-Quality Control

Zotov Yu.K.[*], **Timofeev A.V.**[**]

[*] *Saint Petersburg State University, Russia,*
[**] *Saint-Petersburg Institute for Informatics and Automation of the Russian Academy of Sciences, Russia*

Criteria of reversibility (on subspace), global controllability, stabilizability and decomposability for a wide class of non-linear models of dynamics for mechanical and mechatronic systems, robots and flying vehicles have been obtained. Software motions and controls for such object and also algorithms of high-quality robust stabilization of program motions and adaptive and neural control have been synthesized. Non-linear canonical transformations for coordinates of space of states and controls reducing synthesis and analysis of decomposing and high-quality regulators with reversible non-linear dynamics models with non-linear crossed links have been suggested.

ПРИМЕНЕНИЕ СПЕЦИАЛЬНОЙ ФОРМЫ УРАВНЕНИЙ ЛАГРАНЖА К НЕСУЩЕЙ ПЛАТФОРМЕ ТЕЛЕСКОПА

Зуев С.М., Трифоненко Б.В.

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

В данной работе для описания динамики механизма платформы управления активной поверхностью зеркала телескопа предлагается использование применение специальной формы уравнений динамики [1]. Данная форма основывается на уравнении Лагранжа I рода и позволяет записать уравнение движения системы твёрдых тел в векторной форме, удобной для численного решения.

Положение и ориентация подвижной платформы регулируется за счёт целенаправленного изменения длин стержней, на которые она опирается, и соответствующего изменения углов их наклона к основанию. В зависимости от типа шарнирных соединений стержней с основанием и платформой реализуется тот или иной набор движений платформы.

Первые такого рода телескопы работают на Гавайских островах и строятся в Мексике.

Исследована устойчивость по Ляпунову горизонтального положения равновесия платформы в случае управления с линейной обратной связью.

Литература

[1] Зегжда С.А., Солтаханов Ш.Х., Юшков М.П *Управления движения неголономных систем и вариационные принципы механики* СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 1976. -276 с.

Special Form of the Lagrange's Equations of Dynamic Carrier Telescope Platform

Zuev S.M., Trifonenko B.V.

Saint-Petersburg State University, Russia

Special form of the Lagrange dynamic equations of Stewart Platform with 3 degree of freedom is discussed. Mobile Motion of mobile platform is controlled by three rigid rods. Necessary and sufficient stability conditions of Horizontal position is dealt with.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЛОХО ФОРМАЛИЗОВАННЫХ СИСТЕМ

Игнатьев М.Б.

Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, Россия

Рассматривается лингво-комбинаторное моделирование плохо формализованных систем, для которых существует лишь описание на естественном языке, и которое базируется на использовании ключевых слов, основных понятий, сложившихся в предметной области. Модель состоит из трех групп переменных — характеристик основных понятий, изменения этих характеристик и структурированной неопределенности в эквивалентных уравнениях, которая может быть использована для адаптации и управления. В качестве примеров рассматриваются модели города, организма и атмосферы.

Структурированная неопределенность задается произвольными коэффициентами в структуре эквивалентных уравнений, их распределение определяется рекурсивно, число произвольных коэффициентов S определяется как

$$S = C_n^{m+1}, \quad n > m,$$

где n — число переменных системы, m — число ограничений. Рассматриваются два вида адаптации к изменениям окружающей среды — во-первых, настройка (или самонастройка), когда в качестве инструмента используются произвольные коэффициенты, и чем больше этих коэффициентов, тем больше адаптационные возможности системы, во-вторых, обучение(или самообучение системы), когда в качестве инструмента используется наложение новых ограничений или снятие старых ограничений. В процессе непрерывного обучения, как очевидно из формулы, для систем с числом переменных больше шести, имеет место наличие феномена адаптационного максимума. Основная задача системы управления в потоке перемен — удержать систему в зоне адаптационного максимума.

Лингво-комбинаторное моделирование рассматривается как эвристический прием для моделирования плохо формализованных систем в естественных, технических и гуманитарных науках.

Литература

[1] Игнатьев М.Б. "Голономные автоматические системы" изд. АН СССР, М-Л, 1963, 204 стр.
[2] Ignatyev M.B.,D.M.Makina, N.N.Petrischev, I.V.Poliakov, E.V.Ulrich, A.V.Gubin "Global model of organism for decision making support" Proceedings of the High Performance Computing Symposium – HPC 2000, Ed. A. Tentner, 2000 Advanced Simulation Technologies Conference, Washington D.C. USA, 2000, p.66-71.
[3] Ignatyev M. B. "Linguo-combinatorial method for complex systems simulation" Proceedings of the 6th World Multiconference on Systemics, Cybernetics and Informatics, vol. XI, Computer science II, Orlando, USA, 2002, p.224-227.
[4] Ignatyev M. "The study of the Adaptation Phenomenon in Complex System" AIP Conference Proceedings, Melville, New York, 2006, vol. 839, p.322-330.

Modelling of Badly Formalized Systems

Ignatiev M.B.

Saint Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, Russia

Linguo-combinatorial modelling of complex systems is discussed. Models of town, organism and atmosphere are considered as examples.

МОДИФИЦИРОВАННАЯ МОДЕЛЬ МИРОВОЙ ДИНАМИКИ. СЦЕНАРНЫЙ АНАЛИЗ СОЦИАЛЬНОЙ БЕЗОПАСНОСТИ И ВОЗМОЖНОСТИ УСТОЙЧИВОГО РАЗВИТИЯ В XXI ВЕКЕ

Измоденова К.В., Масленникова А.В.

Центр исследования устойчивости и нелинейной динамики при ИМАШ РАН, Москва, Россия

В докладе представлена разработка модифицированной модели мировой динамики, улучшающая классическую модель Дж. Форрестера (1969) в отношении учета стратификации населения, динамики биомассы растительности суши, социально-политической напряженности и т.д. с использованием новых информационных технологий и языков программирования.

Приводятся результаты многовариантного сценарного анализа в рамках данной модели, выполненного на персональных компьютерах. Особо исследованы варианты социальной безопасности и возможности устойчивого мирового развития в 21 веке с учетом стратификации бедных и богатых слоев населения.

Исследованные сценарии развития показывают возможность выбора сценария социальной безопасности мирового населения в 21 веке. Но не удается найти сценарий устойчивого развития в 21 веке. Этой возможности препятствуют причины, связанные с политической напряженностью и антагонизмом богатых и бедных слоев населения.

Как показывает сценарный анализ на модифицированной модели мировой динамики, есть возможность осуществления устойчивого развития человечества в гармонии с природой только при достижении соглашения между богатыми и бедными слоями населения, соглашения, связанного с уменьшением диспаритета доходов и социальной обеспеченности богатых и бедных слоев населения.

Высокий уровень агрегирования моделей без разделения на страны и регионы мира не позволяет учесть структурные особенности системы, поэтому следующий этап — выделение, следуя отчету ЮНЕПКОМА ГЕО-3, семи регионов мира: Африка, Азиатско-Тихоокеанский регион, Европа, Латинская Америка и страны Карибского бассейна, Северная Америка, Западная Азия и Полярные регионы. Строится база данных и знаний о межконтинентальном мировом развитии в 21 веке. Среди исследуемых показателей: демографические, экономические, социальные, природные, в том числе состояние лесных, водных, воздушных ресурсов и др. Выполнена структуризация модели динамики этих регионов мира во взаимодействии.

Литература

[1] Геловани В.А., Егоров В.А., Митрофанов В.Б., Пионтковский А.А. «Решение одной задачи управления для глобальной динамической модели Форрестера», М.: препринт, № 56, 1974

[2] Глобальная экологическая перспектива-3. Прошлое, настоящее и перспективы на будущее (ГЕО-3). Издание книги на русском языке осуществлено Российским национальным комитетом содействия ЮНЕП (ЮНЕПКОМ). Изд-во: ЗАО «Интердиалект+», 2002. 504с.

[3] Дубовский С.В. «Выбор типа научно-технического прогресса при моделировании экономического роста», М.: Сб. тр. ВНИИ Системных исследований, вып. 13, 1989, С. 4–9.

[4] Крапивин В.Ф., Свирежев Ю.М., Тарко А.М. «Математическое моделирование глобальных биосферных процессов», М.: «Наука», 1982.

[5] Медоуз Деннис, Медоуз Донелла, Рандерс Й., Беренс III Вильям «Пределы роста», М.: Изд. МГУ, 1971.

[6] Форрестер Дж. «Мировая динамика», М.: «Наука», 1978.

[7] Матросов В.М., Измоденова-Матросова К.В. Учение о ноосфере, глобальное моделирование и устойчивое развитие. Курс лекций / М.: Academia, 2005. – 368 с.

Modified Model of World Dynamics. Scenario Analysis of Social Security and Sustainable Development Possibility in the XXI century

Izmodenova K.V., Maslennikova A.V.

The Stability and Nonlinear Dynamics Research Center under Blagonravov Mechanical Engineering Research Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

In this paper, we present the development of modified model of world dynamics, which uses new information technologies and programming languages, and improves the classical J. Forrester model (1969) while taking into account the stratification of population, the dynamics of the land flora biomass, the social and political tension.

We give the results of poly-variant scenario analysis, performed on PC within the frames of this model. In particular, we studied the variants of social security and possibility of sustainable development during the XXI century, considering the stratification of poor and rich layers of society.

ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КРАТКОСРОЧНОЙ ПАМЯТИ

Клиньшов В.В., Некоркин В.И.

Институт Прикладной Физики РАН, Нижний Новгород, Россия

Исследование функции памяти центральной нервной системы является одно из важный и актуальных задач современной нейродинамики. В соответствии со временем, в течение которого осуществляется хранение информации, память подразделяется на долгосрочную и краткосрочную, или рабочую. В последней информация сохраняется до тех пор, пока продолжается ее непосредственное использование. После этого информация либо забывается, либо записывается в долгосрочную память.

Известно, что краткосрочная память связана с возникновением в неокортексе самоподдерживающейся нейронной активности в результате краткосрочной стимуляции. Однако до настоящего времени среди ученых не существует единого мнения относительно нейронного механизма формирования краткосрочной памяти. В последние годы появилась интересная гипотеза, основывающаяся на колебательной природе рабочей памяти. В соответствие с данной гипотезой, формирование краткосрочной памяти осуществляется в сети пирамидальных нейронов при ее стимуляции периодическим подпороговым сигналом. Информация в такой сети сохраняется в виде структур, или кластеров периодической нейронной активности. Каждый такой кластер соответствует одному запомненному образу, или представлению.

В данной работе предложена и исследована модель сети пирамидальных нейронов под действием подпорогового периодического сигнала в виде многомерной неавтономной динамической системы. Показано, что в такой сети возможно запоминание информации. Наиболее интересным свойством данной системы является способность сохранения нескольких образов, или представлений, одновременно, что соответствует известным свойствам реальной системы рабочей памяти. Хранение нескольких образов соответствует существованию в системе нескольких последовательно возбуждающихся кластеров периодической активности. Каждый кластер представляет один образ и возбуждается в своей фазе внешнего сигнала. Максимальное число образов, которое система может хранить одновременно, т.е. емкость системы памяти, зависит от параметров связи нейронов. Эта зависимость была исследована, найдены параметры, отвечающие максимальной емкости.

Проведен бифуркационный анализ и изучены динамические механизмы, лежащие в основе наблюдаемых эффектов. Свойство памяти у отдельного нейрона объясняется тем, что при стимуляции периодическим сигналом он может находиться в одном из двух динамических режимов — в режиме подпороговых колебаний или периодической активности. Возникновение в системе двух устойчивых траекторий происходит в результате седло-узловой бифуркации. Возможность хранения одновременно нескольких образов в ансамбле нейронов связана с тем, что в результате взаимодействия элементов экспоненциально возрастает мультистабильность системы. Если в случае системы N несвязанных нейронов число аттракторов в системе равно 2^N, то при введении взаимодействия это число увеличивается до $(C+1)^N$, где C — емкость системы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 06–02–16137) и Фонда некоммерческих программ «Династия».

Mathematical Modeling of Working Memory System

Klinshov V.V., Nekorkin V.I.

Institute of Applied Physics of the RAS, Nizhny Novgorod, Russia

A mathematical model of working memory in the form of network of neuron-like units is developed. We show that this network can store information images as clusters of periodical spiking activity. Several sequentially excited clusters can coexist simultaneously, corresponding to several images stored in the memory.

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА КОНДЕНСИРОВАННЫХ СРЕД СО СТРУКТУРОЙ

Ковалевский М.Ю., Логвинова Л.В., Мацкевич В.Т.*

Белгородский государственный университет, Россия

**Национальный научный центр*

«Харьковский физико-технический институт», Украина

В докладе представлены результаты исследований конденсированных сред с анизотропными структурными элементами (одноосные и двухосные нематики с молекулами дископодобной и стержнеподобной формы, кровь). Термодинамика и неравновесные процессы в таких средах описываются дополнительными физическими величинами. Для нематиков они представляют собой ориентационные и конформационные степени свободы, которые учитывают форму и размер молекул. В случае одноосных нематиков конформационной степенью свободы является длина стержня для стержнеподобных молекул, либо диаметр диска для дископодобных молекул. В случае двухосных нематиков конформационными параметрами являются размеры молекулы вдоль осей анизотропии и угол между ними. Ориентационные и конформационные степени свободы нами введены как определенные функции тензора дисторсии. Выведены нелинейные уравнения идеальной гидродинамики данных жидких кристаллов [1–3]. Найдены спектры коллективных возбуждений и показано, что учет конформационных степеней свободы приводит к появлению новых спектров коллективных возбуждений. Детально прослежено влияние формы и размера молекул на процессы массопереноса. Найдены и проанализированы уравнения, обобщающие уравнения Фика. Получены решения указанных нелинейных уравнений в стационарном и нестационарном случаях в условиях различной геометрии и дана их физическая интерпретация.

В качестве приложения рассмотренного подхода предложена модель динамики крови, учитывающая форму и размер эритроцитов на макроскопическом уровне. Дополнительным параметром является диаметр эритроцита. Получены нелинейные уравнения гемодинамики с учетом диссипативных процессов. Выяснено, что учет формы и размеров эритроцитов приводит к возникновению новых механизмов релаксации.

Литература

[1] Kovalevsky M.Yu., Shishkin A.L. //Journal of Molecular Liquids. 2003, v. 105/2-3, pp. 197–200.
[2] Ivashin A.P., Kovalevsky M.Yu., Logvinova L.V. //International J. of Quantum Chemistry. 2004, v. 100, Issue 4, pp. 636–644.
[3] Ivashin A.P., Kovalevsky M.Yu., Logvinova L.V. // Theoretical and mathematical physics. 2004, v. 140, № 3, pp. 500–512.

Nonlinear Dynamics of Condensed Matters with Structure

Kovalevsky M.Y., Logvinova L.V., Matskevych V.T.*

Belgorod State University, Russia

**National Science Center "Kharkov Institute of Physics and Technology", Ukraine*

The nonlinear equations of ideal hydrodynamics of uniaxial and biaxial nematic liquid crystals are derived. It is shown, that taking into account conformational degrees of freedom leads to appearance of new spectra of collective excitations. The influence of molecules size and shape on mass transfer processes is analyzed in details. The equations generalizing Fick's equations are obtained and analyzed. As the application of the developed approach the model of dissipative blood dynamics taking into account erythrocytes size and shape on macroscopic level is offered.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ МЕТОДА ТОПОЛОГИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВ, ПРИМЕНЯЕМОГО К РЕШЕНИЮ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Колесников А.П.

Российский университет дружбы народов, Россия

В [1] описан метод построения точных вариационных решений конечных систем линейных функциональных уравнений в векторных пространствах с локально выпуклой топологией, которые названы алгебраическими сплайнами. Там же изучены вопросы сходимости вариационных решений к точным при $n \to \infty$ (n-размерность системы). Полученные таким способом объекты названы топологическими сплайнами. В данном докладе рассмотрено применение топологических (односторонних) сплайнов, введенных в [2]–[3], к начально-краевым задачам. В частности, показано применение метода к решению задач Коши для систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка, охватывающих стохастические модели. Теорию топологических сплайнов для исследования свойств решения мы используем считая, что случайные функции, входящие в дифференциальные уравнения, достаточно регулярны. Это исследование включает в себя изучение вопросов устойчивости численного метода.

Для решения начально-краевых задач наиболее распространены сеточные методы, в которых исследование величины приращения $\Delta \boldsymbol{x}_k$ решения $\boldsymbol{x}(t)$ для совершения k-го шага локализовано на отрезке $[t_k, t_{k+1}]$ или область исследования дополнительно расширена на некоторое малое число предшествующих отрезков. В предложенном методе для получения приближенного решения задачи в точке t используется информация, полученная на всех k предыдущих шагах таких, что $t_k \leq t$. Это свойство алгоритма обеспечивает устойчивость численного решения по отношению к случайным возмущениям в коэффициентах и правых частях дифференциальных уравнений.

Используя сеточные методы, высокого порядка алгебраической точности можно достичь, если уравнение характеризуется коэффициентами и правыми частями высокой степени гладкости. В противном случае они не имеют преимуществ по точности перед решениями, полученными методом сплайнов. Более того, можно говорить об определенном преимуществе сплайновых решений по сравнению с сеточными, особенно, если коэффициенты и правые части заданы с ошибками. Оно достигается тем, что рекуррентная версия сплайнового метода в каждый фиксированный момент времени использует все имевшиеся к этому моменту данные. Исследование модельных примеров показывает, что ошибки с симметричными распределениями даже значительной амплитуды в задании коэффициентов и правых частей усредняются при вычислении аппроксимирующего решение сплайна и практически не влияют на точность получаемых приближенных решений дифференциальных уравнений. Кроме того, в методе сплайнов мы получаем аналитически заданные решения, которые принадлежат требуемому классу гладкости, в то время как в сеточных методах имеем конечное дискретное множество точек, наследующее свойство случайности, присущее оценке решения.

Литература

[1] Колесников А.П. Топологические методы в теории приближений и численном анализе. //М.: Изд-во УРСС, 2001., с. 378

[2] Колесников А.П. Алгебраические сплайны в локально выпуклых пространствах// Математические заметки, 2005, т. 77, вып. 3, стр. 339–353.

[3] A.P. Kolesnikov. Algebraic Spline in Locally Convex Spaces. Mathematical Notes, vol 77, № 3, 2005, pp. 311–325.

On the Stability of the Topological Spline Method Applied to Initial-Boundary Value Problems

Kolesnikov A.P.

Russian Peoples' Friendship University, Moscow

In the present report, application of topological splines introduced previously by the author to the initial-boundary value problems is considered. In particular, the method is applied to the Cauchy problem for the first order linear differential equations involving stochastic models. This study includes investigation of the numerical method stability.

ЯВЛЕНИЕ БУФЕРНОСТИ В НЕЛИНЕЙНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ

Колесов А.Ю.*, Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х.*****

**Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Россия*

***Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Россия*

****Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Россия*

Феномен буферности — свойство нелинейной математической модели распределенной автоколебательной системы допускать существование любого a priori заданного числа однотипных аттракторов (устойчивых состояний равновесия, устойчивых периодических по времени решений, торов и т.д.) при надлежащем выборе ее параметров.

Видимо, первой публикацией по данному вопросу является работа А.А. Витта [1], который исследовал математическую модель автогенератора на длинной двухпроводной линии с равномерно распределенными индуктивностью, емкостью и сопротивлением. На эвристическом уровне им были указаны условия существовании явления, названного впоследствии буферностью. Впервые увеличение числа автоколебательных режимов при изменении параметров автогенератора удалось заметить экспериментально [2].

Строгое теоретическое исследование феномена буферности осуществлено [3–8] с помощью бесконечномерного аналога асимптотического метода Крылова – Боголюбова – Митропольского – Самойленко. Оказалось, что явление буферности типично для широкого класса математических моделей, которые адекватно описывают многие нелинейные процессы, встречающиеся в естествознании (радиофизике, механике, оптике, теории горения, экологии); установлена связь буферности с возникновением турбулентности и рождением динамического хаоса [9, 10]. Исследуемые математические модели — краевые задачи для дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического или параболического типа, а сценарий возрастания числа устойчивых периодических по времени решений разворачивается при стремлении некоторого параметра к нулю. Существенно, что понятие «буферность» предполагает наличие бифуркационного процесса, в результате которого и происходит неограниченный рост числа сосуществующих аттракторов.

Литература

[1] Витт А.А. Распределенные автоколебательные системы // Журн. техн. физ. 1934. Т. 4. Вып. 1. С. 144–157.

[2] Азьян Ю.М., Мигулин В.В. Об автоколебаниях в системах с запаздывающей обратной связью // Радиотехн. и электроника. 1956. Т. 1. № 1. С. 126–130.

[3] Колесов А.Ю., Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х. Асимптотические методы исследования периодических решений нелинейных гиперболических уравнений // Тр. МИАН. 1998. Т. 222. С. 1–192.

[4] Колесов А.Ю., Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х. Явление буферности в резонансных системах нелинейных гиперболических уравнений // УМН. 2000. Т. 55. Вып. 2. С. 95–120.

[5] Колесов А.Ю., Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х. Феномен буферности в нелинейной физике // Тр. МИАН. 2005. Т. 250. С. 112–182.

[6] Колесов А.Ю., Розов Н.Х. К вопросу о теоретическом объяснении явления диффузионной буферности // Журн. выч. матем. и матем. физ. 2004. Т. 44. № 11. С. 2020–2040.

[7] Колесов А.Ю., Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х. Явление буферности в системах, близких к двумерным гамильтоновым // Тр. ИММ УрО РАН. 2006. Т. 12. № 1. С. 109–141.

[8] Колесов А.Ю., Розов Н.Х. О природе явления буферности в слабо диссипативных системах // Теор. и матем. физ. 2006. Т. 146. № 3. С. 447–466.

[9] Мищенко Е.Ф., Садовничий В.А., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.

[10] Колесов А.Ю., Розов Н.Х., Садовничий В.А. Жизнь на кромке хаоса // Сб.: Тр. семинара им. И.Г.Петровского. 2003. Вып. 23. С. 219–266.

The Buffer Phenomenon in Non-Linear Mathematical Models

Kolesov A.Yu.*, Mishchenko E.F., Rozov N.Kh.*****

**Yaroslavl Demidov State University, Russia*

***Steklov Mathematical Institute of RAS, Russia*

****Lomonosov Moscow State University, Russia*

The buffer phenomena were established for some non-linear mathematical models of science that are described by boundary value problems for partial differential equations. This phenomenon is as follows: the models under consideration can have an arbitrary fixed number of attractors if the equation parameter is properly chosen.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ И ПРОГНОЗА ОБЩЕСТВЕННОГО ЗДОРОВЬЯ В РЕГИОНЕ НА ОСНОВЕ ПРИМЕНЕНИЯ ПОЛИНОМОВ ЧЕБЫШЕВА

Крачун Г.П.

Приднестровский государственный университет им. Т.Г. Шевченко, НИЛ «ГИППОКРАТ», Тирасполь, Молдова

При исследовании ряда аспектов общественного здоровья в регионе Приднестровья нами использовался материал госстатистики, позволяющий осуществить выборку малого объема в виде годовых колебаний с одинаковыми по протяженности временными интервалами (длительность каждого интервала — один год). В качестве математического аппарата для целей моделирования динамики и построения прогноза общественного здоровья избран метод параболического сглаживания — метод Чебышева, — позволяющий аппроксимировать искомую зависимость в виде полинома некоторой степени (функция Чебышева), а также получить коридор существования модели.

Применение нами метода Чебышева для целей анализа динамики и прогноза общественного здоровья в регионе позволило выявить корреляционную зависимость между параметрами времени (года) и медико-демографическими показателями рассматриваемого процесса (например, рождаемость, смертность и др.).

При исследовании закономерностей в рассматриваемых процессах общественного здоровья были использованы два случая параболического сглаживания — для равноотстоящих и неравноотстоящих аргументов. Указанный путь исследования позволил построить по полученной модели прогноз в заданной временной перспективе динамики развития характеристик общественного здоровья.

Метод Чебышева был реализован при выполнении задачи моделирования в регионе Приднестровья естественного движения населения, заболеваемости инфекционными, психическими болезнями и др. Для целей решения задачи определялась функция Чебышева, а для каждого из уравнений — величина одного из критериев согласия — χ^2 Пирсона, по которой определялась вероятность правильной аппроксимации. Полученные значения критерия Пирсона при сравнении с табличными значениями привели к выводу, что уровень значимости (процент ошибки) не превышает 5%, т.е. математические модели отражают сущность процессов с вероятностью более 95%.

Для реализации данного метода в системе управления отраслью здравоохранения и социальной защиты региона Приднестровья нами был разработан электронный продукт, который обеспечивает построение парабол первого, второго и третьего порядка, характеризующих корреляционную зависимость между показателями медико-демографического процесса и показателями временного периода.

На основе указанного выше метода математического моделирования и разработанного электронного продукта был построен прогноз исследуемых процессов в заданных интервалах времени с выходом на графически представляемый результат наглядной формы.

Mathematical Modelling of Dynamics and the Forecast of Public Health in a Region on the Basis of Application of Chebyshev's Polynomials

Krachun G.P.

Transdniesterian State University named by T.G. Shevchenko, Research laboratory "HIPPOCRATES", Tiraspol, Moldova

Studying some aspects of public health in region Transdniesterian we used a material of the state statistics, allowing to carry out a sample of small volume as annual fluctuations with identical time intervals (duration of each interval — one year). As the mathematical tool for the purposes of modelling of dynamics and construction of the forecast of public health, a method of parabolic smoothing (Chebyshev's method) is chosen, allowing to approximate required dependence as a polynomial of some degree (Chebyshev's function), and also to obtain a corridor of model existence.

For the realization of the given method in a control system of the branch of public health services and social protection of region Transdniesterian, we have developed the electronic product which provides construction of parabolas of the first, second and third order describing correlation dependence between parameters of medico-demographic process and parameters of the time period.

On the basis of the mentioned above method of mathematical modelling and the developed electronic product, the forecast of investigated processes in the set intervals of time with graphically represented illustrative output has been constructed.

НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ ПОВЕДЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ В СЛУЧАЕ СЛАБОЙ ДИССИПАЦИИ

Кузнецов А.П.*,, Савин А.В.*,**, Савин Д.В.****

**Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН, Россия*
***Саратовский государственный университет, Россия*

Известно, что динамические системы разделяются на диссипативные и консервативные. В зависимости от принадлежности рассматриваемой системы к тому или иному классу её динамика демонстрирует ряд характерных особенностей. Так, в диссипативных системах из-за наличия аттракторов, поведение системы в определённых пределах не зависит от начальных условий. В консервативных же системах начальный фазовый объем сохраняется, что приводит к отсутствию аттрактора и, следовательно, существенной зависимости решения от начальных условий. Очень интересный, своего рода «промежуточный» класс представляют собой слабо диссипативные системы, которые демонстрируют весьма своеобразную динамику [1]. Основной её особенностью является сосуществование большого числа низкопериодических аттракторов, что приводит к существенной зависимости динамики диссипативной системы от начальных условий. В настоящей работе проводится исследование некоторых особенностей такой динамики на примере известной системы Икеды $z_{n+1} = A + Bz_n exp(i(|z_n|^2 + \psi))$, в качестве физической реализации которой может выступать нелинейный осциллятор с импульсным возбуждением или кольцевой оптический резонатор со средой с фазовой нелинейностью [2-3].

С целью выявления зависимости установившегося режима от начальных условий целесообразно пронаблюдать с помощью компьютера «конденсацию» облака изображающих точек на аттракторы. На первых стадиях эволюции облако изображающих точек по своему виду схоже с видом фазового портрета в консервативном случае. Однако в установившемся режиме можно наблюдать очень большое число притягивающих точек, что свидетельствует о наличии мультистабильности. Для исследования этого явления использовался метод построения на одной диаграмме всей системы бифуркационных деревьев. В нашей работе с помощью данного метода были получены диаграммы, отображающие зависимость числа аттракторов от управляющего параметра и характер их изменения. При анализе таких диаграмм для различных значений параметра диссипации B было выявлено большое число сосуществующих аттракторов, преимущественно периодических, которые по характеру их трансформации при изменении параметров A и B были разделены на два типа. Кроме того, было обнаружено, что длина переходного процесса в нашей системе чрезвычайно велика и, кроме того, очень неравномерно зависит от значения параметра A.

В связи с тем, что в любой реальной системе невозможно полностью исключить влияние шума, было проведено исследования устойчивости обнаруженного множества аттракторов слабо диссипативной системы к случайному внешнему воздействию. Численное моделирование показало, что большинство аттракторов являются неустойчивыми к шумовому воздействию, но в то же время можно выделить и сравнительно устойчивые по отношению к шумовому воздействию аттракторы.

Работа поддержана грантом РФФИ № 06-02-16773

Литература

[1] U. Feudel, C. Grebogi, B.R. Hunt, J.A. Yorke. Phys. Rev. E, 1996, 54, 71–81.
[2] K. Ikeda, H. Daido, O. Akimoto. Phys. Rev. Lett, 1980, 45, 709–712.
[3] Кузнецов А.П., Тюрюкина Л.В. Известия ВУЗов – ПНД, т. 8, 2000, № 2, с. 31.

Some Peculiarities of the Behavior of the Dynamical Systems in the Case of Very Weak Dissipation

Kuznetsov A.P.*,, Savin A.V.*,**, Savin D.V.****

**Institute of Radio Engineering and Electronics of RAS, Saratov branch, Russia*
***Saratov State University, Russia*

The behavior of well-known Ikeda map in the case of very weak dissipation that gives the very interesting example of weakly dissipative dynamics is investigated in our work. The main results concern to the structure of the phase space of the system, particularly, the coexistence of a big number of periodic attractors is shown and evolution of their number and structure while the decrease of the dissipation is revealed. Also it is shown that the transient time in such systems increases dramatically, and the influence of the noise on the system is investigated.

ВЛИЯНИЕ АЛЬФА-СТИМУЛИРУЮЩЕГО НЕЙРОБИОУПРАВЛЕНИЯ НА НЕЛИНЕЙНУЮ ДИНАМИКУ ЭЛЕКТРОЭНЦЕФАЛОГРАММЫ

Кулмагамбетов И.Р., Койчубеков Б.К., Риклефс В.П.

Карагандинская государственная медицинская академия, Казахстан

Как известно, одним из индикаторов адаптивного напряжения служит альфа-индекс ЭЭГ. Альфа-диапазон отражает интенсивность потока информации, следующего извне и регулирующего уровень бодрствования и в определенной степени обеспечивает фон, некое базовое состояние для нормальной эмоциональной и интеллектуальной жизни человека. Альфа-тренинг основывается на попытке адаптивного биоуправления гармонизировать соотношение этого ритма к другим, создавая при этом благоприятный психоэмоциональный фон жизнедеятельности и высокой работоспособности. Режим альфа-тренинга также может быть применен как самостоятельный метод для повышения интеллектуально-мнестических и когнитивных функций человека (память, внимание, концентрация, сосредоточенность и т.д.).

В настоящем исследовании проводилась оценка эффективности альфа-стимулирующего нейробиоуправления с помощью методов нелинейной динамики. Для проведения сеансов альфа-стимулирующего биоуправления были отобраны 10 детей (средний возраст $12{,}2 \pm 2{,}1$ лет). У всех исследуемых доминантным являлось левое полушарие головного мозга. Курс БОС для каждого исследуемого включал в себя 5 сеансов по два подхода каждый, продолжительностью 5 минут с двухминутными перерывами. Управляемым параметром являлся альфа-индекс ЭЭГ. Ребёнок мог видеть на мониторе компьютера столбик, высота которого соответствовала величине рассчитанного альфа-индекса ЭЭГ. Задача исследуемого состояла в максимальном увеличении высоты столбца. Для достижения этой цели испытуемому предлагалось в ходе тренинга попытаться распределить внимание между внутренним ощущением и картиной на дисплее, постараться почувствовать связь между определенным состоянием и соответствующим ему изображением на экране. Расчёт корреляционной размерности осуществлялся при помощи пакета программ TISEAN в автоматическом режиме по методике, предложенной А.А. Меклер (2004). За значение D2 принималось значение корреляционной размерности при размере фазового пространства 15, усреднённое по пяти 10-секундным эпохам ЭЭГ при частоте дискретизации сигнала 250 Гц.

В ходе исследования нами была продемонстрирована возможность применения нелинейных методов оценки динамики ЭЭГ для анализа изменений функционального состояния в ходе альфа-стимулирующего БОС-тренинга. Для оценки сложности динамики системы в ходе биоуправления были проанализированы значения корреляционной размерности в различных отведениях ЭЭГ до и после успешных и неуспешных сеансов биоуправления. Имелась некоторая зависимость между исходными значениями корреляционной размерности и достижением цели биоуправления — повышения альфа-индекса. Неуспешные сеансы характеризовались низкими значениями D2 в теменных и височных отведениях доминантного полушария. Принимая во внимание, что механизмы биоуправления окончательно ещё не выяснены, данный факт, по-видимому, свидетельствует о том, что более «хаотичные» системы (с большей корреляционной размерностью) легче управляются, в силу свей пластичности. Зависимость между сложностью организации ЭЭГ именно в височных и теменных областях доминантного полушария и успешностью сеанса БОС может быть объяснена представительством в этих областях ассоциативных зон коры больших полушарий, отвечающих за пространственный анализ и синтез, а также формирование ответного поведения организма на воспринимаемые стимулы. После сеанса биоуправления значения корреляционной размерности ЭЭГ возрастали практически во всех отведениях, причём как в успешных, так и неуспешных сеансах, свидетельствуя о переходе системы в «поисковой режим» для достижения нового состояния.

Influence of Alpha-Stimulating Neurobiofeedback on Non-Linear Dynamics of Electroencephalogram

Kulmagambetov I.R., Koichubekov B.K., Ricklefs V.P.

Karaganda State Medical Academy, Kazakhstan

We analyzed the efficiency of alpha-stimulating neurobiofeedback using the methods of non-linear dynamics. The non-efficient sessions were characterized by the lower values of correlation dimension in parietal and temporal EEG leads of dominating hemisphere. After both efficient and non-efficient sessions of biofeedback, the correlation dimension of EEG increased in all the leads, testifying about the chaotic "searching process" for the new functional condition.

МЕТОД РАСЧЁТА КОРРЕЛЯЦИОННОЙ РАЗМЕРНОСТИ ЭЛЕКТРОКАРДИОГРАММЫ ПРИ НЕПРОДОЛЖИТЕЛЬНОМ ВРЕМЕНИ РЕГИСТРАЦИИ

Кулмагамбетов И.Р., Койчубеков Б.К., Риклефс В.П.

Карагандинская государственная медицинская академия, Казахстан

В последнее время получили развитие способы исследования динамического ряда R-R-интервалов, основанные на методах теории динамического хаоса. Одним из недостатков существующих алгоритмов расчета корреляционной размерности является требование к длине исследуемого временного ряда последовательностей R-R-интервалов. Выполнение существующих критериев требует записи 10000 и более R-R-интервалов, что при средней частоте сердечных сокращений 70 уд/мин составляет запись ЭКГ в течение 2 и более часов. Однако, при массовых обследованиях и при некоторых функциональных пробах подобные длительные записи становятся невозможными. Наиболее предпочтительными являются 5 минутные записи, которые рекомендуются в качестве базовых выборок (Баевский Р.М. и соавт., 2001).

Нами предлагается использовать следующий формат представления данных для математического анализа вариации сердечного ритма (ВСР): из исходного ряда R-R-интервалов получают новый ряд дискретных значений x_i, $i = 1, 2, \dots, N$, основанного на положении, что ВСР задается непрерывной функцией от времени — $x(t)$, определенной на множестве элементарных событий — моментах появления R зубцов. Значения функции в эти моменты равны величинам соответствующих R-R-интервалов. Значения функции в промежутках времени между моментами появления R зубцов рассчитываются методом сплайновой кубической интерполяции. Ряд строится квантованием функции $x(t)$ с шагом dt мс.

Нами проведено квантование полученной непрерывной функции $x(t)$ на 5 минутном интервале регистрации с шагом $dt = 250$, 200, 125 и 100 мс. Кардиоинтервалограмма была записана у 26 студентов в возрасте 18–25 лет. Для каждого динамического ряда рассчитывалась корреляционная размерность при различных значениях размерности фазового пространства m. Для расчета корреляционной размерности использовался метод, предложенный Grassberger P. и Procaccia I. (1983).

Количество отсчетов N при различной частоте дискретизации составляло от, примерно, 1200 при $dt = 250$ ms до 3000 при $dt = 100$ ms. При этом в среднем значения корреляционной размерности достоверно не отличались.

Таблица 1. *Средние значения корреляционной размерности при различном шаге dt в группе студентов*

Шаг квантования	dt=100 ms $n = 26$	dt=125 ms $n = 26$	dt=200 ms n=26	dt=250 ms n=26
D_2	5,069±0,160	4,959±0,169	5,041±0,222	5,062±0,224

Вторая выборка была сформирована из школьников младших классов в возрасте 12–13 лет. Всего 27 человек. Проведены аналогичные вычисления, данные представлены в таблице 2. Они подтверждают результаты предыдущего исследования.

Таблица 2. *Средние значения корреляционной размерности при различном шаге dt в группе школьников*

Шаг квантования	dt=100 ms $n = 27$	dt=125 ms $n = 27$	dt=200 ms n=27	dt=250 ms n=27
D_2	$5{,}757 \pm 0{,}151$	$5{,}814 \pm 0{,}158$	$5{,}851 \pm 0{,}184$	$5{,}745 \pm 0{,}144$

Таким образом, шаг квантования и количество отчетов в предложенных пределах не оказали существенного влияния на результаты вычисления D_2. При этом количество отсчетов, полученных при $dt = 100$ ms, соответствует рекомендациям, изложенным в работе Ruelle D. (1990). Предлагаемая методика может быть рекомендована для расчета корреляционной размерности при 5 минутных регистрациях кардиоинтервалограммы.

Method of Electrocardiogram Correlation Dimension Calculation During Short-Time Recordings

Kulmagambetov I.R., Koichubekov B.K., Ricklefs V.P.

Karaganda State Medical Academy, Kazakhstan

In order to calculate the correlation dimension of heart rhythm, we suggest the sampling of the function using the cubic spline interpolation of the original dynamic series of beat-to-beat intervals. For five minutes of ECG registration there will be approximately 3000 measurements if sampling rate of 100 ms is used.

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ КАРДИОРИТМА В ХОДЕ СЕАНСОВ БИОУПРАВЛЕНИЯ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

Кулмагамбетов И.Р., Койчубеков Б.К., Риклефс В.П.

Карагандинская государственная медицинская академия, Казахстан

В настоящее время активно развиваются прикладные аспекты теории детерминированного хаоса, в том числе и применительно к биологическим системам. Целью нашего исследования явилось изучение влияния биоуправления с обратной связью по параметрам сердечного ритма (СР) на состояние системы вегетативной регуляции кардиоритма с использованием метода нелинейно-динамического анализа.

Всего проведено 26 сеансов биоуправления с обратной связью (БОС), каждый из которых состоял из 3 подходов. Задачей испытуемых было нормализация двух показателей — индекса напряжения и процентного содержания дыхательных волн колебаний сердечного ритма (Баевский Р.М., 2001). Изучались спектральные характеристики СР и нелинейная динамика сердечного ритма на основе изучения корреляционной размерности D_2.

Уже на первом этапе сеанса БОС-тренинга корреляционная размерность достоверно снижалась, и на всех последующих этапах регистрировались низкие по сравнению с фоном значения этого показателя. По окончании сеансов D2 возвращался к исходному уровню. При этом мощность низкочастотной составляющей спектра СР сначала достоверно увеличивалась (на первом сеансе) и снижалась после сеансов БОС.

Хотя механизмы биоуправления недостаточно еще ясны, естественно рассматривать его как процесс обучения и формирования новых навыков с установлением дополнительных корково-подкорковых связей и усилением центральных влияний на периферические элементы. Анализируя полученные данные можно предположить, что усиление мощности низко-частотного диапазона спектра и является отражением этих влияний. С одной стороны это приводит к увеличению дисперсии вариационного ряда кардиоинтервалов, ритм становится менее стабильным и индекс напряжения снижается, с другой стороны — результатом центральных влияний является более регулярный кардиоритм, что и приводит к снижению размерности фазового пространства, котором может быть описана динамика СР.

При исходно высоких значениях корреляционной размерности биоупраление проходило с большей эффективностью, индекс напряжения монотонно снижался от сеанса к сеансу. При более низких значениях D_2 до сеансов БОС динамика регулируемого параметра носила колебательный характер, в процессе биоуправления индекс напряжения по Р.М. Баевскому то повышался, то понижался. Но в том и в другом случае положительный результат был достигнут.

Анализ полученных данных свидетельствует, что более «хаотичные» системы (с большей корреляционной размерностью) легче управляются, по-видимому, в силу свей пластичности. Если управление затруднено, система переходит в колебательный режим в поисках наиболее оптимального состояния. Но в том и в другом случае коррекция осуществляется через порядок, через уменьшение сложности динамики и энтропии. Конечно, это уменьшение тоже имеет свой предел, и как показывают результаты проведенных сеансов, оба параметра устанавливаются на каком-то допустимом уровне.

Analysis of Heart Rate Non-Linear Dynamics During Biofeedback Sessions

Kulmagambetov I.R., Koichubekov B.K., Ricklefs V.P.

Karaganda State Medical Academy, Kazakhstan

We studied the correlation dimension of heart rhythm attractor during biofeedback sessions aimed to normalize the parameters of vegetative balance. We revealed that the correction of functional state of the heart rhythm regulatory system is done through "the order" , i.e. through the decrease of heart rate dynamics complexity.

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ В МАКРОЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ДОЛГОСРОЧНОГО ПРОГНОЗИРОВАНИЯ

Лебедев В.В., Лебедев К.В.

Государственный университет управления, Москва, Россия

В докладе рассматриваются две модификации канонической модели Солоу. Напомним, что в односекторной макроэкономической модели Солоу используется концепция гибкого плана (потребление пропорционально ВВП, норма инвестиций постоянна), производственная функция линейно-однородная (типа функции Кобба-Дугласа). Вследствие этого динамика национальной экономики, согласно модели, монотонна, и со временем макроэкономическая система приходит в устойчивое стационарное состояние, которое является единственным при заданной норме инвестиций и не зависит от начальных условий. При этом существует единственное значение нормы инвестиций, при котором достигается максимум стационарного (перспективного, предельного, long run) среднедушевого потребления (это значение нормы инвестиций равно коэффициенту эластичности производственной функции).

Первая модификация отличается от модели-оригинала тем, что в ней используется концепция *жесткого плана* (здесь это означает, что среднедушевое потребление постоянно; поэтому значение среднедушевого потребления является параметром модели). Что касается нормы инвестиций, то она при своем изменении, согласно принятым допущениям, не может опускаться ниже некоторого заданного фиксированного значения. Остальные допущения модели-оригинала оставлены без изменения. Показано, что единственное стационарное решение, которое имеет место в этой модели при максимально возможном значении среднедушевого потребления, оказывается неустойчивым, что может привести к резкому падению производства при случайном незначительном увеличении потребления (катастрофа). Следствием этого свойства построенной модели является *эффект гистерезиса*: стационарное значение нормы инвестиций зависит не только от значения среднедушевого потребления, но и от направления изменения этого параметра. Таким образом, использование в модели Солоу допущения о постоянстве нормы инвестиций (концепции гибкого плана) является принципиальным для обеспечения устойчивости стационарных решений.

Вторая модификация модели Солоу отличается от модели-оригинала тем, что в ней используется производственная зависимость производительности труда от фондовооруженности с изменяющимся направлением выпуклости. В этой модификации из-за существенной нелинейности производственной зависимости возможно появление нескольких устойчивых стационарных состояний; поэтому результат эволюции макроэкономической системы зависит от ее начального состояния. Следствием этого свойства построенной модели является *эффект гистерезиса* (здесь это означает зависимость перспективного значения среднедушевого потребления не только от значения нормы инвестиций, но и от направления изменения этого параметра). Итак, при определенных значениях параметров макроэкономическая система допускает переход из высокопродуктивного состояния в низкопродуктивное, несмотря на выполнение условия пропорциональности потребления и ВВП.

Рассмотренные модели служат наглядной иллюстрацией не только того, что управление экономикой должно опираться на гибкое планирование, поскольку жесткое планирование может привести к катастрофе. Более того, из анализа этих моделей следует, что при моделировании макроэкономической динамики условие пропорциональности потребления и ВВП в общем случае не является достаточным при формализации концепции «гибкого планирования» и «управления с обратной связью».

Nonlinear Effects in the Long-Run Forecasting Models of Macroeconomics

Lebedev V.V., Lebedev K.V.

State University of Management, Moscow, Russia

Two modifications of the Solow model are discussed. In the first modification, consumption per capita is considered to be constant; in the second modification, the concave-convex production function is used. The effect of gisteresis takes please in both models.

МЕТОД ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ДИНАМИКИ ВИБРОУДАРНЫХ СИСТЕМ

Любимцев Я.К., Метрикин В.С.

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Россия,

НИИ прикладной математики и кибернетики при Нижегородском государственном университете им. Н.И. Лобачевского, Россия

С позиции теории колебаний системы с ударными взаимодействиями, как известно [1], представляют собой сильно нелинейные системы, исследование динамики которых эффективно проводится с помощью аппарата метода точечных отображений. С его помощью проведено детальное исследование динамики большого числа систем с ударными взаимодействиями [2]. При этом исследование структуры расширенного фазового пространства, включающее в себя, в частности, вопросы о размерах областей притяжения периодических, а также и стохастических режимов движения, оставались либо открытыми, либо частично решались с помощью цифровых или аналоговых вычислительных машин [3–5].

В работе предлагается численно - аналитическая методика исследования динамики систем с ударными взаимодействиями с применением идей метода функций Ляпунова в его модификации для точечных отображений.

Разработанный подход иллюстрируется на примере системы

$$\begin{aligned} &\dot{x} = y, \quad \dot{y} = g(t), \quad x > 0 \vee (x = 0 \wedge y > 0) \\ &y_+ = -Ry_-, \quad x = 0 \wedge y < 0 \end{aligned} \tag{1}$$

где x — безразмерная координата, y_+, y_- — непосредственно послеударная и доударная скорости, $0 < R < 1$ — коэффициент восстановления скорости при ударе. Указаны способ построения функций Ляпунова, с помощью которых проведено исследование вопросов существования и устойчивости различных решений системы (1), а также возможности метода функций Ляпунова при исследовании поведения решений на границах областей устойчивости. Так для рассматриваемой системы (1), в частности доказано, что граница N_- [2] является опасной [6].

Приведенный вид функций Ляпунова дают возможность указать наибольший размер областей притяжения, а также определить в фазовом пространстве области отталкивания.

Литература

[1] Беспалова Л.В., Неймарк Ю.И., Фейгин М.И. Динамические системы с ударными взаимодействиями и теория нелинейных колебаний // Инженерный журнал. Механика твердого тела. – 1966. – N 1. – С. 151–159.

[2] Фейгин М.И. Вынужденные колебания систем с разрывными нелинейностями. - М.: Наука, 1994. – 285 с.

[3] Быховский И.И., Дорохова А.Д., Зарецкий Л.Б., Лукомский С.И. О некоторых периодических движениях и структуре фазового пространства ударно-колебательной системы с постоянной восстанавливающей силой // Изв. АН СССР. ОТН. Механ. и машиностр. – 1964. – N 2. – С. 161–165.

[4] Мартынюк А.А., Вербицкий В.Г. Оценка области притяжения для нелинейных систем определенного вида. – Прикладная механика. 1982, т. 18, N 10, с. 102–107.

[5] Рагульскене В.Л., Скучас И.Ю. Исследование двумерной виброударной системы с помощью АВМ. – Вибротехника. Т.1(8). Каунас. 1975, с. 183–189.

[6] Баутин Н.Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. Л. – М. Гостехиздат, 1949. 164 с.

Lyapunov Function Method for Vibro-Impact Systems Dynamics Study

Lyubimtsev Ya.K., Metrikin V.S.

SSI "Research Institute for Applied Mathematics and Cybernetics of Nizhegorodsky State University", Nizhny Novgorod, Russia

In this work countable – analytic method of the system with impact interactions dynamics study, using Lyapunov functions method in its modification for point mappings, is offered.

АНАЛИЗ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ И СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

Маланин В.В., Полосков И.Е.

Пермский государственный университет, Россия

Большой интерес как с теоретической, так и с практической точки зрения вызывают дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом (ДУ с ОА). Такие уравнения появляются там, где свойства объекта определяются эффектом последействия, и служат математическими моделями различных явлений: процедур автоматического регулирования и управления техническими системами, химическими и другими технологическими процессами и т.д.

Как правило, точные аналитические решения ДУ с ОА могут быть найдены очень редко. Численное же интегрирование таких уравнений с автоматическим выбором шага требует разработки специальных вариантов методов Рунге-Кутта для обычных и жестких систем уравнений, часто весьма изощренных. Однако применение несложных приемов позволяет использовать встроенные средства численного интегрирования ОДУ таких систем аналитических вычислений (САВ) интерактивно-программного типа, как Mathematica и Maple, для решения указанных выше задач.

Представляются процедуры численно-аналитического анализа детерминированных ДУ с ОА, а именно: уравнений с постоянными одиночными и кратными запаздываниями, с переменными запаздываниями, а также уравнений нейтрального типа с постоянным лагом. В качестве основы процедур использовалась идея расширения фазового пространства, которая была реализована с помощью нескольких процедур, написанных на входном языке пакета Mathematica. В качестве примеров рассмотрен анализ переходных режимов в системах, описываемых различными модельными уравнениями, уравнениями Лотки-Вольтерра, Ван дер Поля-Дюффинга, демпфированного вибратора, автоколебаний (нейтрального типа) в длинной линии, пантографа, Минорского и др.

Значительный интерес в последнее время привлекают и стохастические функционально-дифференциальные уравнения разных типов (в частности, уравнения с постоянными и переменными запаздываниями). Но исследование таких систем вызывает значительные трудности.

В ряде наших работ была разработана методика исследования стохастических дифференциально-разностных систем с постоянным запаздыванием, основанная на расширении фазового пространства. В дальнейших работах данная методика была применена для решения ряда задач, в том числе для анализа линейных и нелинейных динамических систем со случайным входом и кратными постоянными запаздываниями, линейных параметрических стохастических дифференциально-разностных уравнений с кратными постоянными запаздываниями.

В докладе рассматривается задача оценки первых моментов линейной стохастической динамической системы с единственным переменным запаздыванием. На основе процедуры расширения фазового пространства и аппроксимации запаздывания кусочно-постоянной функцией строится цепочка стохастических дифференциальных уравнений без запаздывания, а затем и уравнения для искомых моментов. В качестве примера исследуется движение транспортного средства с переменной скоростью по неровной дороге, микропрофиль которой представляется случайным процессом типа «цветного» шума, с учетом наличия расстояния между осями передних и задних колес.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 07-01-96023 и 07-01-97611) и Российского гуманитарного научного фонда (проект № 06-02-00162а).

Analysis of Deterministic and Stochastic Systems with a Divergent Argument

Malanin V.V., Poloskov I.E.

Perm State University, Russia

Schemes of numeric and analytic analysis of deterministic equations with a divergent argument are considered. Among them there are equations with constant and multiple delays, with a variable delay, and equations of neutral type with a constant lag. Transitional regimes in systems described by different model equations, equations of Lottki-Volterra, Van der Pol-Duffing, auto-oscillation in a long current line, pantograph, Minorsky and others are presented as examples.

A theoretical apparatus for an analysis of linear stochastic differential systems with a single variable delay is developed on the base of the scheme of a phase space expansion. A modeling of vehicle movement along a rough road described by a linear system with taking into account of a variable speed, a randomness of a road microprofile and a presence of delay was executed.

ПОВЫШЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ С ПОМОЩЬЮ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ РЕСУРСОВ В GRID СИСТЕМАХ

Мемнонов В.П.

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

В науке и технике имеется большое число задач, требующих для своего численного моделирования значительных вычислительных ресурсов. С развитием международных систем Grid, предоставляющих через Интернет распределенные кластерные ресурсы, эти задачи теперь могут решаться. Но при этом возникают и специфические проблемы. В частности, информация о параметрах процессоров для параллельных Grid кластеров сообщается в описании ресурса Грид-монитора, однако этого может оказаться недостаточным для подготовки задачи к оптимальному запуску на счет. Производительности отдельных процессоров в параллельных кластерах, как правило, различаются между собой и некоторые из них могут быть в действительности заметно меньше своих номинальных значений. Эти различия могут также сильнее проявляться в зависимости от специфики выполняемого пользовательского приложения. В этом случае параллельное приложение в точках синхронизации будет терять много времени на ожидание отстающих процессоров. Для уменьшения потерь от простоя процессоров в точках синхронизации параллельных MPI-программ, возникающих не только из-за такой неизвестной для пользователя статической, но также из-за образующейся динамически гетерогенности процессоров кластера, предлагается встраивать в пользовательские приложения специально разработанные алгоритмические процедуры, обеспечивающие балансировку их нагрузки. Это будет способствовать увеличению эффективности использования параллельных вычислительных ресурсов и особенно полезно для Grid кластеров, когда затруднительно получать дополнительную информацию об удаленных вычислительных ресурсах. В докладе приводятся примеры применения разработанных алгоритмов к задачам, решаемых с помощью метода прямого статистического моделирования.

An Enhancement of Mathematical Simulation Performance for Parallel Calculations in Distributed Grid Clusters

Memnonov V.P.

Saint Petersburg State University, Russia

The new algorithmic procedures are suggested for dynamic load balancing of computers in parallel clusters for reduction of processor idling time in the case of their dynamic or static, but not known for the user, performance heterogeneity. They could be used for more efficient utilization of contemporary computational resources and especially for Grid computations.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА НА ОСНОВЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Мирошниченко И.Д.

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

В настоящее время образовательный процесс, как в сфере высшего образования, так и в более широкой, общеобразовательной сфере, все больше требует использования в методах обучения применения дистанционных и параллельных технологий. В статье предпринята попытка построения и анализа модели обобщенного учебного процесса с точки зрения применения методов параллельных технологий.

Проблема совершенствования учебного процесса представляет одну из трудноформализуемых задач. Для построения модели указанного процесса и её изучения естественен выбор «метода аналогий», применяемый при математическом моделировании сложных систем, состоящих из трудно формализуемых объектов, для которых эти объекты и законы взаимодействия строго математически описать не удается [Самарский А.А., Михайлов А.П.]. Кроме того, анализ данной проблемы можно совершенствовать, усложняя структуру модели учебного процесса (изменяя описания как объектов, так и способов взаимодействий между объектами).

Если рассматривать образовательный процесс в простейшем случае как некую вычислительную систему простых функциональных устройств (где в качестве элементов системы выступают обучаемые), не вникая в содержательную часть работы, выполняемой элементами этой системы, и, не учитывая индивидуальные возможности самих элементов, согласно «методу аналогий» получим справедливость законов Амдала для математической модели описываемой системы [Воеводин В.В., Воеводин Вл.В.]: а именно,

— производительность образовательного процесса определится деловыми качествами и ответственностью самого нерадивого обучаемого (первый закон Амдала);

— вводя понятие загруженности обучаемого, можно определить загруженность группы, реальную производительность процесса за определенный период времени при параллельных возможностях работы;

— аналогичным образом, вводя понятия реальной загруженности, пиковой производительности, эффективности, можно определить максимально возможное ускорение процесса (второй закон Амдала) и верхнюю границу этого ускорения (третий закон Амдала) при распараллеливании процесса.

Анализ реальной производительности некоторой схемы распараллеливания образовательного процесса, анализ степени близости этой реальной производительности к пиковой производительности процесса (который показывает степень согласованности работы всех элементов системы: преподавателей и обучаемых, преподавателей между собой и обучаемых между собой), помогает выявить узкие места и локализовать проблему.

Одним из узких мест для образовательного процесса, как и для любой вычислительной системы, является передача информации (с первую очередь, скорость, а также достоверность, своевременность, надежность и другие характеристики) от некоторого объекта к любым другим объектам этой системы, учитывая характеристики работы вспомогательных элементов и технических средств. Скорость выполнения запланированной работы резко возрастает при оптимальной организации процесса передачи информации в образовательном процессе от обучаемого/преподавателя к обучаемому/преподавателю, т. е. с использованием дистанционных и параллельных технологий передачи данных с учетом индивидуального подхода к контролю знаний. Кроме того, применение этих технологий позволяет качественно изменить структуру организации образовательного процесса (долю лекционного и самостоятельного времени обучения, включение возможности консультативного контакта с преподавателем с помощью коммуникационных средств и др.).

Modelling of Educational Processes on the Basis of Parallel Technologies

Miroshnichenko I.D.

Saint Petersburg State University, Russia

In the present paper, a generalized educational process model is constructed and analyzed from the point of view of parallel technologies.

ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ПОДВОДНОГО ОБЪЕКТА НА ОСНОВЕ НОВОЙ ЗАПИСИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПРИСОЕДИНЕННЫХ МАСС

Никущенко Д.В.[*], Павловский В.А.[**]

[*] *Санкт-Петербургский Государственный Морской Технический Университет, Россия*
[**] *Санкт-Петербургский Государственный Университет, Россия*

Традиционно для вывода уравнений движения подводных объектов применяется подход, основанный на использовании уравнений Лагранжа второго рода с учетом предложения Г. Кирхгофа, согласно которому вначале рассматривается движение объекта в идеальной жидкости без учета деформации свободной поверхности. Кинетическую энергию в этом случае удается выразить такой же квадратичной формой от линейных и угловых скоростей движения объекта, как и кинетическую энергию масс самого объекта. После этого в рассмотрение вводится суммарная кинетическая энергия системы «подводный объект — окружающая жидкость», а в составе внешних сил учитываются только силы неинерционной природы.

В отличие от движения тела в вакууме при его перемещении в жидкости проявляются инерционные свойства окружающей среды. Эти свойства обычно учитываются с помощью присоединенных масс, которые со времен Кирхгофа и Ламба представляются в виде матрицы из 36 коэффициентов. Эта матрица содержит элементы с разной размерностью, которые записаны для декартовой прямоугольной системы координат. Она не является матрицей компонент некоторого тензора 2-го ранга шестимерного пространства не только по причине разной размерности компонент, но и потому, что введение в рассмотрение такого тензора не имеет физического смысла для трехмерного евклидова пространства. В данной работе показано, что матрица коэффициентов присоединенных масс может быть представлена как результат скалярной формы записи для матрицы из четырех тензорных элементов, составленной из тензоров 2-го ранга — масс, статических моментов и моментов инерции. Эти тензоры $\mathbf{M}^*$, $\mathbf{J}^*$, $\boldsymbol{\Lambda}^*$ имеют ясный геометрический смысл: тензор присоединенных масс $\mathbf{M}^*$ переводит вектор скорости полюса тела $\mathbf{v}_0$ в слагаемое вектора количества движения жидкости, увлекаемой телом. Второе слагаемое этого вектора есть результат воздействия антисимметричного транспонированного тензора присоединенных статических моментов $\boldsymbol{\Lambda}^{*T}$ на вектор угловой скорости тела $\boldsymbol{\omega}$. Тензор присоединенных статических моментов инерции $\mathbf{J}_0^*$ переводит вектор угловой скорости тела в составляющую вектора кинетического момента окружающей жидкости движущегося тела относительно полюса. Другую составляющую дает антисимметричный тензор присоединенных моментов инерции, воздействующий на вектор скорости полюса.

Окончательно, кинетическая энергия системы «корпус ПА — окружающая жидкость»:

$$T = \frac{1}{2}\mathbf{v}_0 \cdot (\mathbf{M} + \mathbf{M}^*) \cdot \mathbf{v}_0 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot (I_0 + I_0^*) \cdot \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \cdot (\Lambda^T + \Lambda^{*T}) \cdot v_0,$$

где $\mathbf{M}$, Λ и I_0 — тензоры масс, статических моментов и моментов инерции рассматриваемого объекта соответственно.

На основе предлагаемой записи присоединенных масс производится вывод уравнений движения подводного объекта, причем тензорная природа рассмотренных соотношений позволяет применять их в любых системах координат.

Derivation of Equations of Motion of an Underwater Vehicle on a Base of New Interpretation of Additional Masses Coefficients

Nikushchenko D.V.[*], Pavlovsky V.A.[**]

[*] *State Marine Technical University, Saint Petersburg, Russia*
[**] *Saint-Petersburg State University, Russia*

In this report we present a new interpretation of additional masses based on the tensorial form of their recording. We show all additional masses can be reduced to three tensors of rank 2 — tensor of masses, tensor of static moments and tensor of moments of inertia. Finally we obtain equations of motions of an underwater vehicle using new tensors introduced, which are applicable for any reference systems.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН С ПРОНИЦАЕМЫМИ ПРЕГРАДАМИ

Нуднер И.С., Максимов В.В., Бабчик Д.В.

Научно-Исследовательский Центр 26 ЦНИИ МО РФ, Санкт-Петербург, Россия

Рассматривалась задача о взаимодействии поверхностных волн с частично проницаемыми и заглубленными преградами. С теоретической точки зрения, в двухмерной постановке, она моделировалась уравнениями Эйлера для идеальной несжимаемой жидкости [1]. Движение жидкости предполагалось установившимся. Глубина жидкости полагалась постоянной. Область имела вид бесконечной полосы. Граничные условия принимались следующие: на твердых недеформируемых границах ставилось условие непротекания, на свободной поверхности выполнялись кинематическое и динамическое условия. На бесконечности соблюдалось условие излучения. С использованием процедуры линеаризации и последующих интегральных преобразований задача сводилась к обратной задаче матфизики. Решение ее проводилось процедурой регуляризации по Тихонову. Для оценки полученных результатов был выполнен ряд экспериментов [2,3,4]. Исследования проводились в гидроволновом лотке длиной 40 м, шириной 1 м и высотой 1,2 м. Глубина жидкости составляла 0,6 м. Моделирование осуществлялось по критерию подобия Фруда в масштабе 1:40. Волны создавались волнопродуктором балочного типа. Длины волн варьировались в диапазоне от 2 до 4.5 м при высоте — до 0,2 м. Сопоставление показало, что данные математического моделирования достаточно полно описывают физическую природу явления. Результаты исследования применялись при проектировании реального объекта на Черноморском побережье.

Литература

[1] Алешков Ю.З. Теория взаимодействия волн с преградами. – Л.: изд-во Ленинградского университета, 1990. – 372 с.

[2] Моделирование взаимодействия экстремальных волн с волнозащитными гидротехническими сооружениями (совместно с И.С. Нуднером и др.)// Труды VIII международной конференции «Прикладные технологии гидроакустики и гидрофизики ГА-2006». – СПб, Наука, 2006. С. 235–239.

[3] Взаимодействие волн с частично заглубленными преградами (совместно с И.С. Нуднером и др.)// Аннотации докладов. IX Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. (Нижний Новгород, 22–28 августа 2006г.) - Нижний Новгород, изд-во Нижегородского ун-та им. Н.И. Лобачевского, 2006. Т. II. С. 20.

[4] Воздействие волн на частично-проницаемые сооружения (совместно с И.С. Нуднером и др.)//Труды международной конференции «Вычислительные и информационные технологии в науке, технике и образовании». 1 том. – Павлодар: ТОО НПФ «ЭКО», 2006. С. 172–185.

Modeling of the Interaction of Surface Waves with Permeable Obstacles

Nudner I.S., Maximov V.V., Babchik D.V.

Scientific Research Center 26, Central Science Research Institute, Russian Ministry of Defence, Saint-Petersburg, Russia

Theory of water waves' interaction with partially submerged and partially permeable obstacles in the finite depth fluid is considered. The theoretical as well as experimental research was fulfilled. The results of the research in protected facilities' design are used.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДОПУСКОВ НА РЕАЛИЗАЦИЮ ПРОГРАММНОГО УПРАВЛЕНИЯ В АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Огородников Ю.И.

Иркутский государственный университет путей сообщения, Россия

В реальной системе автоматического управления управляющее устройство реализует расчётное программное управление с некоторой погрешностью. В связи с этим возникает задача нахождения допусков на реализацию управления, при которых гарантируется отклонение возмущённой фазовой траектории от номинальной в заданных пределах.

В предположении, что поведение системы управления во времени определяется системой нелинейных дифференциальных уравнений в нормальной форме Коши, ставится задача нахождения допусков на отклонение программного управления от номинального, гарантирующих отклонение возмущенной фазовой траектории от номинальной в заданных пределах.

Использована техника оценки координат или нормы решения уравнений возмущённого движения с применением интегральных неравенств Гёльдера. Получены оценки для нормы Гёльдера вектора управления на основании уравнения в вариациях первого порядка. Использование уравнения в вариациях второго порядка позволило получить следующий результат.

Утверждение. *Для того чтобы на интервале времени $T = [t_0, t_1]$ для нелинейных систем вида $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$, где $x(t) \in R^n$ — n-мерный вектор состояния системы, $u(t) \in R^m$ — m-мерный вектор управления, $f(x, u)$ — известная n-мерная вектор-функция, при возмущении управления $\delta u(\cdot)$ от номинального для возмущения фазовой траектории $\delta x(\cdot)$ выполнялось соотношение $|\delta x_i(t)| \le \beta$, $t \in T$, $i \in [1, n]$, β — положительная константа, достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\|\delta u(\cdot)\|_\infty \le \gamma,\ \text{где}\ \gamma = \frac{-\eta_i + \sqrt{\eta_i^2 + 2\sigma\beta}}{\sigma},\ \sigma = \mu\eta^2 + 2\nu\eta + \theta,$$

$$\eta = \max_{i=1,2,\dots,n} \eta_i,\ \eta_i = \int\limits_T \sum_{j=1}^m \left| \sum_{k=1}^n g_{ik} \frac{\partial f_k}{\partial u_j} \right| d\tau,\ \mu = \int\limits_T \sum_{j=1}^n \left| \sum_{k=1}^n g_{ik} \left(\sum_{l=1}^n \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_l x_j} \right) \right| d\tau,$$

$$\nu = \int\limits_T \sum_{j=1}^m \left| \sum_{k=1}^n g_{ik} \left(\sum_{l=1}^n \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_l u_j} \right) \right| d\tau,\ \theta = \int\limits_T \sum_{j=1}^n \left| \sum_{k=1}^n g_{ik} \left(\sum_{l=1}^n \frac{\partial^2 f_k}{\partial u_l u_j} \right) \right| d\tau.$$

$g_{i,k}(t_1, t)$ — элементы матрицы Коши уравнения в вариациях первого порядка; $\delta u(\cdot)$, $\delta u(\cdot)$ — символы функций, рассматриваемых как точки функциональных пространств.

Сфера приложения полученных оценок не ограничивается задачей нахождения допусков на реализацию программного управления. По мнению автора, эти оценки можно использовать в задачах назначения допусков на параметры динамических систем при синтезе робастных систем управления в случае, когда номинальное значение параметра можно считать неслучайным. На практике ему соответствует ситуация, когда технологический разброс параметров пренебрежимо мал (элементы высокого класса точности) или же начальное значение параметра устанавливается точно в процессе настройки (регулировки) или подбора элементов.

Determination of Allowances for Program Control Realization in the Automatic Control Systems

Ogorodnikov Yu.I.

Irkutsk State University of Railway Engineering, Russia

In the real automatic control system the control device realizes the nominal program control with some error. Consideration is given to the problem of searching for the allowances of program control realization that guarantee the deviation of disturbed phase trajectory from the nominal one within the given limits. The estimate for ∞-norm of control variation vector was obtained for non-linear controllable systems of ordinary differential equations in the normal Cauchy form.

ВЛИЯНИЕ ХИМИЧЕСКИХ РЕАКЦИЙ НА ОБРАТНЫЙ КАСКАД В КВАЗИДВУМЕРНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Петров В.Е.

Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск, Россия

Численные и экспериментальные исследования последних лет привели к частичному пересмотру представлений о физическом механизме обратного каскада в квазидвумерной турбулентности. Особенно это касается роли слияния малых вихрей в большие. Если в случае затухающей турбулентности оно основное, но из него не следует образования обратного каскада энергии на возможно большем диапазоне по длинам волн, то в квазидвумерной турбулентности поддерживаемой внешней силой, наряду с полным слиянием малых вихрей в большие, существует образование кластеров (без полного слияния) и в тоже время возникает обратный каскад энергии от малых масштабов к большим на большом диапазоне по длинам волн. В недавно развитом количественном описании (Eyink, 2006), основанном на синтезе численного решения, лабораторного эксперимента и аналитической теории, было показано что утончение малых вихрей с растяжением в сторону больших масштабов ведет к образованию обратного каскада энергии, соответствующего колмогоровскому спектру.

В данной работе исследуется влияние химических реакций на обратный каскад в квазидвумерной турбулентности. В качестве модели рассматривается модель турбулентного химически реагирующего течения поддерживаемого внешней силой, предложенная автором в предыдущих работах. Целью численно — аналитических исследований является оценка и отличие закономерностей поведения обратного каскада энергии и взаимовлияние химических превращений и квазидвумерной турбулентности.

Effect of Chemical Reactions on Inverse Energy Cascade in Quasi 2D Turbulence

Petrov V.E.

Kutateladze Institute of thermophysics Sb RAS, Novosibirsk, Russia

The new numerical and experimental studies led to the partial revision of conceptions about the physical mechanism of the inverse energy cascade in the quasi two-dimensional turbulence. In this paper the effect of chemical reactions on inverse energy cascade in quasi 2D turbulence is investigated. The forced model of the 2D turbulent chemical reacting flow, proposed by the author in the previous papers, is considered.

ФРАКТАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ В ЗАДАЧАХ НЕЛИНЕЙНОЙ ФИЗИКИ

Потапов А.А.
Институт радиотехники и электроники РАН, Москва, Россия

Громадное разнообразие современных задач, возникающих в нелинейной физике, требует разработки и применения новых физико-математических моделей и методов. Одними из наиболее универсальных и активно развивающихся направлений в данной области являются фрактальные модели и методы, основы которых были разработаны автором в ИРЭ РАН, начиная с 80-х г.г. XX в. [1–3]. Доклад систематизирует и развивает материалы многочисленных работ коллектива исследователей во главе с автором.

Фрактальные методы являются принципиально новыми методами обработки полей и сигналов. Они используют дробную топологическую размерность пространства сигналов и изображений, математический аппарат дробных интегралов и производных (дробных операторов) и свойства самоподобия или скейлинга [1–3]. По сути дела, речь идет о *новом фундаментальном направлении в радиофизике и радиоэлектронике* — применение теории детерминированного хаоса, теории дробной меры и скейлинговых инвариантов в задачах повышения информативности радиосистем и устройств различного назначения.

В докладе рассмотрены следующие «фрактальные» направления: (**1**)-синергетический подход к радиофизическим задачам радиотехники, электроники и радиолокации; (**2**)-фрактальные меры и фрактальные сигнатуры; (**3**)-избранные результаты фрактальной фильтрации малоконтрастных объектов (в том числе и стелс — объектов); (**4**)-топология выборки и фрактальная цифровая обработка изображений; (**5**)-фрактальные распределения или паретианы; (**6**)-разработка эталонного словаря фрактальных признаков классов целей и проектирование первого фрактального непараметрического обнаружителя радиосигналов; (**7**)-странные аттракторы в фазовом пространстве отраженных радиолокационных сигналов диапазона миллиметровых радиоволн; (**8**)-концепция фрактальных радиоэлементов и фрактальных радиосистем; (**9**)-фрактальные антенны и фрактальные частотно-избирательные структуры на их основе; (**10**)-физическое моделирование фрактальных импедансов, дробных операторов и фрактальных конденсаторов; (**11**)-методы построения фрактальных сигналов и фрактальные методы передачи информации; (**12**)-фрактальная обработка медицинской информации; (**13**)-стратегические приложениях новых информационных технологий [1–6].

Во время продолжительной встречи с автором (Нью-Йорк, декабрь 2005 г.) основатель теории фракталов *Б. Мандельброт* проявил очень большой интерес к развиваемой в России фундаментальной концепции *«Фрактальные радиосистемы»*, а также ко всем представленным здесь и в монографиях [1–3] результатам, полученным в ИРЭ РАН.

Литература

[1] Потапов А.А. Фракталы в радиофизике и радиолокации.- М.: Логос, 2002. 664 с.
[2] Потапов А.А. Фракталы в радиофизике и радиолокации: Топология выборки. Изд. 2-е, перераб. и доп.- М.: Университетская книга, 2005. 848 с.
[3] Потапов А.А. Фракталы и хаос как основа новых прорывных технологий в современных радиосистемах. - Дополн. к книге: Кроновер Р. Фракталы и хаос в динамических системах / Пер. с англ.- М.: Техносфера, 2006. С. 374–479.
[4] Потапов А.А. // Нелинейный мир. 2004. Т. 2, № 1. С. 4–13.
[5] Потапов А.А., Герман В.А. // Радиотехника и электроника. 2004. Т. 49, № 12. С. 1468.
[6] Потапов А.А., Герман В.А., Потапов В.А. // Тез. докл. Моск. конф. «Фундаментальные и прикладные проблемы современной физики» .- М.: Физич. ин-т им. П.Н. Лебедева РАН. 2006. С. 132–133.

Fractal Models and Methods in Nonlinear Physics Problems

Potapov A.A.
Institute of Radio Engineering and Electronics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

It has been presented how the new synergetic approach on the basis of fractional measuring, fractal dimension, scaling, fractals and deterministic chaos has been developing in IRE RAS as applied to problems of modern nonlinear radio physics and radio engineering since the eighties of XX century. Aspects of challenging informational technologies formation have been considered in framework of the new fundamental investigation line "Fractal radiophysics and fractal radioelectronics: Fractal radiosystems design" . Fundamental steps consisted in transfer of integer measuring signals received by radio system into fractional measuring space using scaling relations, allow to introduce absolutely new conceptions and approaches in conventional fields of the classical radio physics and radio electronics and to obtain sufficiently unexpected for practice but physically validated results on the basis of these conceptions. Some monographs were released and more than 200 scientific works were published in this line of investigations.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТОТ КОЛЕБАНИЙ НЕОДНОРОДНЫХ СИСТЕМ, ОПИСЫВАЕМЫХ ОБОБЩЕННЫМИ КРАЕВЫМИ ЗАДАЧАМИ С КОМПЛЕКСНОЗНАЧНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Промыслова А.С.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Россия

Исследуется задача конструктивного определения частот и форм колебаний распределенных систем с существенно изменяющимися параметрами. В отличие от классического случая самосопряженной задачи допускается произвольная нелинейная зависимость коэффициентов уравнения от числового параметра в том числе и комплексного, собственные значения которого требуется найти.

В Институте Проблем Механики РАН разработан оригинальный численно-аналитический метод для высокоточного построения искомого решения. Одним из основных требований этого метода является вещественность коэффициентов уравнения. Но существует ряд требующих решения механических задач с комплекснозначными коэффициентами. К их числу относится задача Рэлея об устойчивости плоскопараллельного сдвига в слое из идеальной жидкости либо идеально-пластического материала. Поэтому на основе этого метода разработан численно-аналитический метод решения таких задач. Предлагаемый подход основан на сочетании вариационного подхода, анализа краевых задач и методов возмущений. Дается оригинальное определение малого параметра задачи и предлагается рекуррентный алгоритм последовательного уточнения собственных чисел.

Вычислительная эффективность алгоритма, обладающего свойством ускоренной (квадратичной) сходимости, проиллюстрирована расчетом модельных примеров.

Investigation of Eigenvalues of the Non-Uniform Systems Described by the Generalized Boundary Value Problem with Complex Parameters

Promyslova A.S.

Lomonosov Moscow State University, Russia

Report presents a new numerical-analytical method, called the method of accelerated convergence, for solving boundary value problems for differential equations of the second order. The coefficients of the equations may be complex. Analytical and numerical advantages of the method are demonstrated by the model examples; also there is a numerical solution of the Rayleigh problem (which has not the analytical solution), obtained by the method.

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ МАЯТНИКОВ

Родюков Ф.Ф., Шепелявый А.И.

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

С помощью уравнений Лагранжа-Максвелла составлены системы безразмерных дифференциальных уравнений для одной и двух ортогональных проводящих рамок в высокочастотном магнитном поле [1]. Эти электромеханические системы являются важнейшим случаем в исследованиях сложных движений проводящих твердых тел маятникового типа в переменных магнитных полях [2–4]. В таких системах за счет наличия осциллирующих электромагнитных сил возможна стабилизация неустойчивых состояний равновесия, появление колебательных и вращательных движений.

В предположении малости квадрата отношения собственных частот маятников к частоте изменения магнитного поля движения рассматриваемых систем разделяются на быстрые (токи в рамках) и медленные (угловые скорости поворотов рамок). Введением вместо токов новых переменных исходные уравнения приводятся к более простой форме, «прозрачной» по отношению к исследуемым процессам. При этом выделяются члены, являющиеся аналогом уравнения Хилла, а при некоторых дополнительных предположениях и уравнения Матье.

Полученные системы являются системами третьего порядка с периодическими коэффициентами и с механической точки зрения являются системами с параметрическим возбуждением колебаний. Замораживая медленные переменные в уравнениях для быстрых переменных, находим частные решения для последних, которые подставляются в уравнения для медленных переменных. Таким образом получаются нелинейные уравнения второго порядка относительно только механических переменных с периодическими коэффициентами, зависящими от времени. Применяя к полученным уравнениям частичную линеаризацию, приходим к хорошо известным уравнениям Хилла и Матье [5]. Получено условие устойчивости верхнего положения равновесия.

При учете сопротивления в точках подвеса маятников найдены области изменения параметров, соответствующих интенсивности магнитных полей, при которых появляются верхние и нижние предельные циклы и исчезают верхние циклы. При этом рамки либо колеблются в соответствии с нижними предельными циклами, либо начинают вращаться с постоянной угловой скоростью. Получены формулы для определения этих скоростей.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 05-08-65484-а.

Литература

[1] Родюков Ф.Ф. Математическая модель большой электроэнергетической системы. – Изд-во С.-Петербургского университета. – СПб, 2006. – 153 с.
[2] Скубов Д.Ю., Ходжаев К.Ш. Нелинейная электромеханика. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 360 с.
[3] Мартыненко Ю.Г. Движение твердого тела в электрических и магнитных полях.– М.: Наука, 1988.
[4] Артемьева М.С., Скубов Д.Ю. Динамика проводящих тел маятникового типа в высокочастотном магнитном поле// Изв. РАН. Механика твердого тела. 2001. № 4. С. 29–39.
[5] Якубович В.А., Старжинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их и их приложения. – М.: Наука, 1972. – 720 с.

Analysis of the Stability of the Electromagnetic Pendulums

Rodyukov F.F., Shepeljavyi A.I.

Saint Petersburg State University, Russia

The equations of the electromagnetic pendulums are constructed. The conditions of their stability are obtained.

К ОЦЕНКЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ЛЯПУНОВУ МОДЕЛЕЙ РЕЛЕЙНЫХ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Ружников В.А., Силина М.В., Чернышев Э.П.

Иркутский Политехнический университет, Россия

Санкт-Петербургский Государственный Электротехнический университет (ЛЭТИ), Россия

Задача существования решения в «замкнутой форме» при описании автоколебаний (АК) в релейных цепях была по-новому решена в [1]. В данной работе рассматривается оценка устойчивости АК. Задача решается для простых АК в модели цепи с релейным элементом (РЭ), обладающим прямоугольной симметричной гистерезисной характеристикой.

Линейная часть модели (цепь обратной связи) имеет передаточную функцию (ПФ) вида

$$H(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{-k \prod\limits_{(m)} (s - s_{0k})}{\prod\limits_{(n)} (s - s_k)},$$

где $X(s)$, $Y(s)$ — изображения по Лапласу входных и выходных переменных РЭ, $k = const > 1$, s_k и s_{0k} — полюсы и нули ПФ.

Так как вариация на выходе РЭ — это периодическая последовательность импульсов, которую приближенно можно считать последовательностью дельта-функций, анализ устойчивости проводим с учетом [2] с применением аппарата расчета дискретных цепей (ДЦ), считая в дискретные моменты времени переключения РЭ $t = n\tau$ импульсные характеристики линейной части для ДЦ и исходной модели равными, т. е. $h_{\text{ДЦ}}(n\tau) = h(nT)$, откуда находим ПФ обратной связи ДЦ $H(z)$.

Если корни характеристического полинома такой ДЦ $|z_k| \leq 1$, то будет иметь место устойчивость АК по Ляпунову, но она не будет асимптотической, поскольку, как установлено, один из корней всегда равен «-1».

В работе рассматриваются различные классы систем при $(n - m) \geq 2$ и описана коррекция методики перехода к ДЦ при $(n - m) = 1$.

Литература

[1] Чернышев Э. П., Мясоедов Г. Б., Ружников В. А. Метод точного расчета автоколебаний в электрических цепях, содержащих нелинейные элементы с релейной гистерезисной характеристикой // Изв. вузов «Электромеханика». 1987. № 11. С. 125–127.

[2] Ружников В. А., Силина М. В., Чернышев Э. П. Особенности проектирования устойчивых моделей релейных автоколебательных радиоэлектронных и электротехнических систем // 5-й Международный симпозиум по электромагнитной совместимости и электромагнитной экологии. СПб., 2003. С. 250–253 (Сб. научных докладов).

To Estimation of Ljapunov's Stability Relay Models of Self-Oscillatory Systems

Ruzhnikov V.A., Silina M.V., Chernishev E.P.

Irkutsk Polytechnical university, Russia

Saint Petersburg State Electrotechnical university, Russia

Peculiarities of some the radio-electronic devices working in conditions of natural and artificial interferences, requires their consideration as the simple self-oscillations relay systems. Relay self-oscillatory systems have found the application owing to their high speed and simplicity of processing of the information. At developing of such systems especially important place borrows research of stability. This paper is devoted to the new approach and the improvement calculation of the simple relay systems models. The particular note attend to research of stability of relay self-oscillatory systems in a class of systems with the irregular pulse characteristic of the linear part containing the simple integrator.

КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ ОБОБЩЕННЫХ МОДЕЛЕЙ ВОЛЬТЕРРА

Садыкова О.И.

Российский государственный открытый технический университет путей сообщения, Москва, Россия

Различные обобщения классической модели В.Вольтерра «хищник-жертва» рассматривались в многочисленных работах (см., например, [1]–[4]). В настоящем сообщении рассмотрено, во-первых, обобщение модели Вольтерра, учитывающее внутривидовую конкуренцию среди жертв вида

$$\begin{cases} \dot{N}_1 = (K_1(N_1^* - N_1) - K_2N_2)N_1, \\ \dot{N}_2 = (-K_3 + K_4N_1)N_2, \end{cases} \tag{1}$$

где N_1 — численность жертв, N_2 — численность хищников, $\dot{N}_1 = \dfrac{dN_1}{dt}$, $\dot{N}_2 = \dfrac{dN_2}{dt}$, $K_i\,(i = 1,2,3,4)$ — положительные параметры, N_1^* — стационарное значение численности жертв. Получены достаточные условия устойчивости состояний равновесия и построен фазовый портрет системы (1). Во-вторых, проведен качественный анализ модели взаимодействия популяций, учитывающей наличие убежищ для жертв вида

$$\begin{cases} \dot{N}_1 = K_1N_1 - K_2N_2(N_1 - N_*), \\ \dot{N}_2 = -K_3N_2 + K_4N_2(N_1 - N_*), \end{cases} \tag{2}$$

где N_1 — численность жертв, N_2 — численность хищников, $\dot{N}_1 = \dfrac{dN_1}{dt}$, $\dot{N}_2 = \dfrac{dN_2}{dt}$, $K_i\,(i = 1,2,3,4)$ — положительные параметры, N_* — постоянное число особей жертвы, которые могут найти убежище или укрытие, делающее их недосягаемыми для хищника. Получены достаточные условия устойчивости и показано, что в системе (2) происходит затухание колебаний. В третьих, рассмотрена многомерная обобщенная модель взаимодействия популяций для случая, когда взаимодействуют n видов ($n > 2$) и когда относительная скорость роста каждой из популяций нелинейно зависит от численностей популяций, составляющих сообщество. Указанное обобщение позволяет снять ограничения, связанные с линейностью, и рассмотреть более широкий круг задач, возникающих в приложениях. Для этой обобщенной модели изучены вопросы устойчивости в смысле Лагранжа, устойчивости решений в смысле Ляпунова и прочности траекторий в смысле Жуковского.

Литература

[1] Свирежев Ю.М., Логофет Д.О. Устойчивость биологических сообществ.-М.: Наука, 1978.
[2] Базыкин А.Д. Нелинейная динамика взаимодействующих популяций.-Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
[3] Садыкова О.И. Об устойчивости равновесий в обобщенной модели Вольтера//Тез. Докладов XLII Всероссийской научная конференция по проблемам математики, информатики, физики и химии. М.: РУДН, 2006. С. 74.
[4] Садыкова О.И. Об устойчивости равновесий в обобщенной модели Вольтера//Качественное и численное исследование математических моделей динамических систем. Межвузовский сборник научных трудов М.: РГОТУПС, 2006. С. 81–85.

The Qualitative Analysis of Generalized Volterra Models

Sadykova O.I.

Russian State Open Technical University of Railway Transport, Moscow

The questions of stability of equilibria states and the questions of qualitative behaviour of solutions of generalized Volterra models are considered in the report.

СЦЕНАРНЫЕ ЛОГИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МОДЕЛИ ДЛЯ ВЫЯВЛЕНИЯ ВЗЯТОК И КОРРУПЦИИ

Соложенцев Е.Д.

Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Россия

Предлагаются сценарные логико-вероятностные (ЛВ) модели взяток для службы «Экономических преступлений» города с целью выявления, оценки и анализа взяток по статистическим данным. Описаны ЛВ-модели взяток: 1) в учреждении по параметрам успешности его функционирования, 2) чиновников на основе описания и анализа параметров их поведения, 3) учреждения и чиновников на основе анализа параметров обслуживания. Приведены примеры обучения и анализа ЛВ-модели взяток по статистическим данным. Задачи взяток и коррупции отличаются большой вычислительной сложностью и решаются только с использованием специальных логических *Software*.

Проблема взяток и коррупции актуальна для многих стран. Публикации по коррупции и взяткам, социальной статистике имеют содержательные описания, подробные анализы, большое число примеров, комментариев законов и уголовного кодекса, но не содержат математических моделей взяток.

Для решения социальных и организационных задач (включая проблемы выявления и анализа мошенничеств, взяток и коррупции) нужен, по мнению Джона фон Неймана и Норберта Винера, математический аппарат на основе логики, дискретной математики и комбинаторики, более пригодный, чем дифференциальные уравнения.

Такой адекватный математический аппарат разрабатывается и называется «Логико-вероятностная (ЛВ) теория риска с группами несовместных событий». Он апробирован для оценки и анализа: кредитных рисков, риска портфеля ценных бумаг, риска потери эффективности, риска неуспеха менеджмента компаний. ЛВ-модели риска обладают высоким качеством. Например, ЛВ-модели кредитного риска показали в два раза большую точность и в семь раз большую робастность, а также абсолютную прозрачность в распознавании плохих и хороших кредитов, чем известные методики.

Понятия вероятность взятки и коррупции близки к понятиям надежность в технике и риск в экономике и банках. Чаще всего взятки имеют место при получении лицензий (образование, туризм, медицина, строительство), разрешений (ГАИ, таможня), образования (аттестаты, дипломы, экзамены), регистрации (органы МВД, местной власти) и др.

Для количественной оценки и анализа взяток используется логико-вероятностная теория (ЛВ-теория) риска неуспеха с группами несовместных событий и строятся ЛВ-модели взяток на основе статистических данных. Работа является одной из первых математических работ по вероятности взяток и не претендует на рассмотрение всех аспектов этой сложной проблемы и разработку всех сценариев взяток. В большей мере изложены вопросы описания и построения моделей взяток, оценки и анализа вероятности взятки, и почти не рассматриваются социальные, юридические и организационные проблемы взяток.

Scenario Logic and Probabilistic Models for Detecting of Bribes and Corruption

Solojentsev E.D.

Institute of Problems of Mechanical Engineering of RAS, Saint-Petersburg, Russia

The scenario logic and probabilistic (LP) bribe models for the department "Economic crimes" of towns are proposed with the purpose of revealing, estimating and analyzing bribes on the basis of the statistical data. The following bribe LB-models are described: 1) at the institutions according to the results of their functioning, 2) of the officials on the basis of the descriptions of their behavior, 3) of the institution and of the officials on the basis the analysis of the service parameters. Examples of identifying and of the analysis of the bribe LP-models according to the statistical data are given here. Problems of bribes and corruption are of great computing complexity and are solved only by means of special Software.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МУЛЬТИ-АГЕНТНЫХ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫХ СЕТЕЙ С АДАПТИВНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ ПОТОКАМИ ДАННЫХ

Сырцев А.В.*, Тимофеев А.В., Колотаев А.В.****

**Санкт-Петербургский государственный университет, Россия*

***Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН, Россия*

В докладе рассматриваются математические модели телекоммуникационных и компьютерных сетей с переменной гетерогенной структурой на основе системного анализа, их динамики (изменение топологии узлов и параметров каналов связи). Обсуждаются проблемы мульти-агентной и адаптивной маршрутизации потоков данных. Значительное внимание уделяется имитационному моделированию телекоммуникационных сетей с переменной структурой (топологией узлов и каналов связи) и гетерогенной (мультифрактальной) архитектурой, предоставляющих пользователям как внешним агентам необходимые телекоммуникационные, информационные и вычислительные ресурсы, распределённые в компьютерных сетях и GRID-инфраструктуре. Основные результаты связаны с системным анализом динамических моделей телекоммуникационных сетей с переменной структурой и варьируемыми параметрами, критериям управляемости (маршрутизируемости), адаптивному синтезу моделей маршрутизаторов и интеллектуализации сетевого управления потоками данных в условиях неопределённости. В докладе предлагаются математические и компьютерные модели внутренних сетевых и нейросетевых агентов, предназначенных для мульти-агентной (групповой) маршрутизации, автоматического разрешения сетевых конфликтов и адаптивного (обучаемого) распознавания информационных потоков в динамической или частично неопределённой среде, включающей в себя телекоммуникационные и компьютерные сети и внешних агентов-пользователей. Эффективность предлагаемого подхода иллюстрируется вычислительными экспериментами по имитационному моделированию телекоммуникационных сетей с мульти-агентной и адаптивной маршрутизацией потоков данных.

Mathematical and Imitation Modeling of Multi-Agent Telecommunication Networks with Adaptive Control for Data Flows

Syrtsev A.V.*, Timofeev A.V., Kolotaev A.V.****

**Saint Petersburg State University, Russia*

***Saint-Petersburg Institute for Informatics and Automation of the Russian Academy of Sciences, Russia*

The paper describes mathematical models for telecommunication and computer networks with variable heterogeneous structure on the base of system analysis, their dynamics (change of node topology and communication channel parameters). Problems of multi-agent and adaptive routing are discussed. Significant attention is given to imitation modeling for telecommunication networks with change structure (node topology and communication channels) and heterogeneous (multi-fractal) architecture, rendering to users as external agents necessary telecommunication, information and computer resources, distributed in computer networks and GRID-infrastructure. Main results are connected with system analysis of dynamic models of telecommunication networks with changing structure and varied parameters, control (routing ability) criteria, adaptive synthesis of models for routers and intellectualization of network control for data flows in conditions of uncertainty. Mathematical and computer models of internal network and neural agents for multi-agent (group) routing, automated resolution of network collisions and adaptive recognition of information flows in dynamic or uncertain environment are suggested.

СИНТЕЗ И МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОГО, НЕЙРОННОГО И МУЛЬТИ-АГЕНТНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Тимофеев А.В., Юсупов Р.М.

Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН, Россия

Математическое моделирование систем много-агентной (групповой) навигации и управления движением необходимо для организации целенаправленного коллективного поведения мобильных агентов в условиях неопределённости в динамических средах с препятствиями (запретными зонами). В докладе обсуждаются особенности информационного (сенсорного) обеспечения и методы синтеза алгоритмов адаптивного, интеллектуального и нейронного управления движением некоторых классов подвижных объектов (мобильные роботы, беспилотные летательные аппараты и т.п.) при наличии известных или неизвестных препятствий. С позиций теории много-агентных систем рассматриваются проблемы информационного мониторинга и адаптивного сетевого управления информационными потоками, возникающие в глобальных телекоммуникационных системах с изменяющейся динамикой (топологией узлов и каналов связи) и распределённых GRID-средах. Рассматриваются результаты разработки, моделирования и внедрения информационного и алгоритмического обеспечения много-агентных систем антитеррористической направленности (мониторинг, видеозахват, определение навигационных характеристик и распознавание подвижных объектов на вокзалах или вблизи трубопроводов).

Результаты получены при поддержке грантов РФФИ № 05–01–08044–офи и № 06–08–01612.

Synthesis and Modeling for Systems of Intelligent, Neural and Multi-Agent Control

Timofeev A.V., Yusupov R.M.

Saint-Petersburg Institute for Informatics and Automation of the Russian Academy of Sciences, Russia

Mathematical modeling for systems of multi-agent (group) navigation and motion control is necessary for organization of purposeful collective behavior of mobile agents in uncertainty conditions in dynamic environments with obstacles (restricted areas). Peculiarities of information (sensor) means and methods for synthesis of algorithms for adaptive, intelligent and neural motion control for some classes of mobile plants (mobile robots, unpiloted air vehicles etc.) with known or unknown obstacles are discussed. Problems of information monitoring and adaptive network control in telecommunication systems with changing dynamics and distributed GRID-environments are described. Results of development and implementation of information and algorithmic software for multi-agent antiterrorism systems (monitoring, video capture, navigation characteristic determination and mobile plant recognition on railway stations or near pipe lines) are described.

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ЭПИДЕМИЙ

Фомкин П.А.

Московский авиационный институт (государственный технический университет), Россия

В докладе рассмотрены математические модели распространения эпидемий в популяциях, описываемые системами обыкновенных дифференциальных уравнений. С помощью методов качественной теории дифференциальных уравнений [1-3] изучено поведение решений, построены фазовые портреты и охарактеризовано развитие эпидемий во времени.

К моделям первого типа относится нелинейная автономная модель, в которой в качестве фазовых переменных выбраны число восприимчивых к болезни и число заболевших, в соответствующих масштабах. Найден первый интеграл и показано, что в модели число восприимчивых к болезни падает, а число заболевших достигает максимального значения перед тем, упасть до нуля.

Если модель первого типа модифицировать, считая, что число восприимчивых к болезни растет с постоянной скоростью, то новая модель имеет устойчивое состояние равновесия в области неотрицательности фазовых переменных, а типом состояния равновесия при этом является устойчивый фокус. Рассмотрено и другое обобщение модели первого типа — для случая, когда число восприимчивых к болезни растет с переменной скоростью (нелинейный неавтономный случай).

К моделям второго типа относится нелинейная модель, которая описывает, как среди некоторой популяции распространяется болезнь, оставляющая после себя стойкий иммунитет. В качестве фазовых переменных модели выбраны доли популяции, которые соответственно а) здоровы, но подвержены инфекции, б) заражены. Доля популяции с иммунитетом выражается через указанные переменные [1,4]. Найдены условия, накладываемые на коэффициенты модели, при которых 1) число заболевших убывает и стремится к нулю, 2) число заболевших возрастает до максимального значения, а затем убывает до нуля. При этом количество не болевших (здоровых, но подверженных инфекции) при возрастании времени стремится к некоторому значению, которое является корнем соответствующего алгебраического уравнения.

Литература

[1] Эрроусмит Д., Плейс К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. М.: Мир, 1986.
[2] Амелькин В.В. Дифференциальные уравнения в приложениях. М.: УРСС, 2003.
[3] Тарасевич Ю.Ю. Математическое и компьютерное моделирование. М.: УРСС, 2004.
[4] R. Haberman. Mathematical models. Englewood Cliffs: Prentice – Hall, 1977.

The Investigation of Nonlinear Mathematical Models of Epidemics

Fomkin P.A.

Moscow Aviation Institute (State Technical University), Russia

The nonlinear mathematical models of propagation of epidemics in populations are considered. The methods of qualitative theory of differential equitation are used.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ МНОЖЕСТВА РАВНОВЕСНЫХ СОСТОЯНИЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ КОНКУРЕНТНОГО РЫНКА

Хацкевич В.Л.

Воронежский филиал Всероссийского заочного финансово-экономического института, Россия

Рассматривается рынок n-товаров. Пусть $\vec{p}$ — неотрицательный вектор цен на товары, а $F(\vec{p})$ — многозначная функция избыточного спроса. Динамическая модель рынка может быть записана в виде дифференциального включения в евклидовом пространстве R^n

$$\frac{d\vec{p}}{dt} \in F(\vec{p}),\ \vec{p}(0) = \vec{p}^0. \tag{1}$$

Равновесная цена $\vec{p}^*$ в этой ситуации удовлетворяет операторному включению $0 \in F(\vec{p}^*)$.

Теорема 1. *Пусть многозначная функция F полунепрерывна сверху, имеет непустые выпуклые замкнутые и ограниченные образы и выполнен закон Вальраса $(\vec{p}, \vec{f}\,) \le 0$ $(\forall \vec{p} \in R^n_+,\ \forall \vec{f} \in F(\vec{p}))$. Пусть дополнительно выполнено условие «внедиагональной неотрицательности»:*

$$\textit{если}\ \vec{p} \ge 0\ \ \textit{и}\ \ p_i = 0,\ \ \textit{то}\ \ f_i \ge 0\ \ \textit{для}\ \ \forall \vec{f} \in F(\vec{p}).$$

Тогда задача Коши (1) для всякого $\vec{p}^0 \ge 0$ имеет хотя бы одно решение в конусе R^n_+, для всех $t > 0$. При этом $\|\vec{p}(t)\| \le \|\vec{p}^0\|$ $(\forall t > 0)$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и слабая аксиома выявленного предпочтения: $(\vec{q}, \vec{f}\,) > 0$ $(\forall \vec{p} \in R^n_+ \colon \vec{p} \notin Z,\ \forall \vec{f} \in F(\vec{p}))$. Тогда рынок устойчив, т.е. при любой начальной цене $\vec{p}^0 \ge 0$ каждое решение задачи (1), стремится к некоторому равновесному состоянию при возрастании времени.*

Теорема 3. *В предположениях теоремы 2 множество равновесных векторов $Z \subset R^n_+$ не пусто выпукло и замкнуто.*

Теорема 4. *В условиях теоремы 2 множество равновесных состояний Z устойчиво по Ляпунову, точнее по любому $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $\rho[\vec{p}(t), Z] < \varepsilon$ при $t > 0$ для любого решения $\vec{p}(t)$ дифференциального включения (1), удовлетворяющего условию $\rho[\vec{p}^0, Z] < \delta$.*

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теоремы 2 и обеспечена единственность вправо решений задачи (1) при $\forall \vec{p}^0 \ge 0$.*

Тогда динамическая система порождаемая задачей (1), имеет при любом $r > 0$ минимальный глобальный B-аттрактор A в X_r, совпадающий с равновесным множеством $Z_r \colon Z \cap X_r$.

On the Stability of the Set of Equilibrium for the Dynamic Model of the Competitive Market

Khatskevich V.L.

Voronezh branch of All-Russian Correspondence Financial-Economical Institute, Russia

The aim of this work is the research of stability of continued dynamical model in the conditions of multifunction of surplus demand. This model is described by differential inclusion. The market equilibrium is observed as a limited state of trajectory, corresponding to the continued dynamic model and is in this case the solution of operator inclusion, arose from the function of surplus demand.

ОСОБЕННОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ СЛОЖНЫХ ГЕОЛОГИЧЕСКИХ И ГЕОТЕХНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Храмченков М.Г.

НИИ математики и механики Казанского государственного университета, Россия

Известно, что в последнее время все более важную роль в изучении особенностей сложных (взаимосвязанных) геологических и геотехнических процессов играет использование математических моделей этих процессов. Математические модели основных геологических процессов (фильтрация, поведение горного массива под нагрузкой, распределение механических напряжений вокруг горных выработок и пр.), известны и хорошо изучены. Их использование на практике поставлено на поток и приносит ощутимый эффект. Однако с развитием технологий и необходимостью учета новых факторов в традиционные модели приходится вносить определенные изменения. Так, часто при необходимости включения в физическое описание новых, ранее не учитываемых эффектов геолог или геомеханик, опираясь на известные фрагменты физической теории или на «здравый смысл», сам строит комплексную модель более высокого порядка, чем предыдущая. Дальше следует традиционная процедура идентификации параметров новой модели по данным физических (геологических) экспериментов, и модель готова к практическому использованию. При этом, однако, очевидно, что подобный подход может привести к появлению сразу нескольких моделей для одного и того же явления или комплекса явлений. Так, например, обстоит дело в моделировании миграции жидкостей переменной плотности или процессов, протекающих при захоронение ядерных отходов в горных породах, в частности, в глинах. Возникает необходимость разработки критерия выбора истинной модели из некоторого конечного множества моделей одного и того же физического явления. В работе предлагается подход к разработке такого критерия и обсуждаются некоторые физические приложения использования подобного критерия.

Main Features of Mathematical Modeling of Complex Geological and Geotechnical Processes

Khramchenkov M.G.

Chebotarev Research Institute of Mathematics and Mechanics of Kazan State University, Russia

The new model of osmotic clay swelling is proposed. The model is intended for mathematical description of rheological and transport behavior of clays. Model is founded on the classical methods of consolidation theory and chemical osmosis theory in clays. The main improvement is concluded in using of the new equation for dynamics of clay swelling. Model contains from mass balance equation; mechanical equilibrium equation; rheological correlations; swelling equation. After solution of equations we investigated the features of our model, which are important for explaining of hydro-mechanical and chemical clay's behavior. Our model permits to analyze a lot of interesting hydro-mechanical situations in real clay beds.

ТЕОРИЯ ИГР И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ В МЕНЕДЖМЕНТЕ
GAMES THEORY AND ITS APPLICATIONS IN MANAGEMENT

VARIATIONAL BAYESIAN DETERMINISTIC ANNEALING APPROACH FOR NON-LINEAR STOCHASTIC DYNAMICAL SYSTEMS: APPLICATION TO NEURAL MASSES

Daunizeau J., Kiebel S.E. and Friston K.J.

Wellcome Department of Imaging Neuroscience, London, UK

Most of interesting dynamical systems are observable only through a complex (and possibly non-invertible) transformation. For example, we do not observe the time-varying electrophysiological states of the brain, though we can measure the electrical potential field it generates on the scalp using electroencephalography (EEG).

Most of existing statistical inference methods rely on a state-space formulation of the problem, i.e. the definition of two main probability density functions (pdf): (i) the likelihood, which is derived from the observation model and statistical assumptions about the measurement noise and (ii) the first-order Markovian transition pdf, which expresses the prior belief about the plausibility of any potential evolution of the system, knowing its current state. The latter is derived from the stochastic differential equation describing the temporal evolution of the hidden states. However, these pdfs may generally be conditional upon additional unknown parameters governing e.g., the variances of data and state noises and/or the observation and evolution functions. As a consequence, these parameters have also to be estimated from observed data. Thus, the derivation of the posterior belief of hidden states, parameters and potential stochastic innovations remains an issue.

Variational Bayesian (VB) techniques generalizing Kalman-Rauch smoother and Expectation-Maximization (EM) estimators have been proposed to tackle efficiently this dual estimation problem. However, they still suffer from local optima issues arising from the non-convex shape of the free energy landscape over the space of unknown parameters and hidden-states. In this paper, we present a deterministic annealing VB (DAVB) algorithm for deriving the approximate posterior pdf of hidden-state dynamics and model parameters. In our approach, the approximate posterior parameterized by "temperature" is derived by extending the free energy formulation for variational Bayesian inference. Since this free energy is deterministically performed at each temperature, the total search is executed far more efficiently than in the simulated annealing. Moreover, the derived DAVB algorithm, unlike the existing VB algorithm, can obtain better estimates free of the (possibly misleading) initialization.

We demonstrate the performance of the DAVB algorithm on the inversion of stochastic neural mass models, which describe the dynamical properties of the bioelectrical activities of excitatory and inhibitory populations of neurons in the brain, in the context of the so-called EEG inverse problem.

A POLICE VERSUS CRIMINAL GAME

Garnaev A.Y.

Saint Petersburg State University, Russia

In this paper a generalization of the scenario modeling a police versus criminal conflict suggested by Sakaguchi ("A non-zero-sum repeated game — criminal vs police". Mathematica Japonica Vol. 48, 1998, p. 427-436) for the case where there are a few police squads are investigated. Namely, we consider a conflict between a law-enforcement (Player I) and a potential criminal offender (Player II). The model is a non-zero-sum n-period game with perfect information where each player has to act at most a permitted times during n periods. There are two pure strategies available in each period to player I: commit a crime and to act honestly. Player I two has in his disposition two squads and he has four strategies: to enforce the law by the first squad, to enforce the law by the second squad, to enforce the law by both squads or to do nothing. If player II chooses to act honestly he earns his legal income $r > 0$. If he chooses to commit a crime an illegal income in amount $\Pi > 0$ in addition to his legal income r may be earned. However if the illegal action of the Player II is detected, he is arrested until the end of the game and has to pay a fine in amount of $f > 0$. When the player is arrested he earns no income at all. If Player I chooses the i-th squad to enforce the law he can catch Player I with probability p_i and the cost of this enforcement is c_i where $i = 1, 2$. If Player I chooses both squads to enforce the law he can catch Player II with probability p_3 and the cost of this enforcement is c_3. Without loss of generalization we can assume that $p_2 \geq p_1$. It is reasonable to assume that $p_3 \geq p_2 \geq p_1$. It is also reasonable assume that more effective squad costs more and using two squads is more effective than just one but it is more expensive. Thus, $c_3 \geq c_2 \geq c_1$. In case that Player II commits crime that goes no unpunished, a lost L is inflicted upon society. So, the scenario is modeled by the n-period bimatrix game. The optimal strategies of the players are found as well as the corresponding payoffs.

DIFFUSION-BASED GEOMETRIC PRIORS FOR IMAGING

Harrison L.M. & Friston K.J.

Wellcome Trust Centre for Neuroimaging, University College London

We describe a Bayesian scheme to analyze images, which uses spatial priors encoded by a diffusion kernel. The application in mind is a general spatiotemporal model for imaging data analysis. This is an example of a Gaussian process model (MacKay, 1998). We illustrate the method by performing a random-effects analysis of contrast images from multiple subjects. Typically, imaging data are smoothed using a fixed Gaussian kernel as a pre-processing step before entering a mass-univariate statistical model (e.g., a general linear model) to provide images of parameter estimates (Friston et al., 2006). An alternative is to include smoothing in a multivariate statistical model (Penny et al., 2005). The advantage of the latter is that each parameter field is smoothed automatically, according to a measure of uncertainty given the data. We investigate the use of diffusion kernels to encode spatial correlations among parameter estimates. Nonlinear diffusion has a long history in image processing. In particular, flows that depend on the local image geometry can be used as adaptive filters (Olver et al., 1997). This can furnish a non-stationary smoothing process that preserves features, which would otherwise be lost using a fixed Gaussian kernel. We describe a Bayesian framework that incorporates non-stationary adaptive smoothing into the generative model to extract spatial features in parameter estimates. Bayesian model comparison is then used to determine the evidence for non-stationary verses stationary spatial priors given functional imaging data. We illustrate the method using synthetic and real functional Magnetic Resonance Imaging (fMRI) data.

Keywords

adaptive Bayesian smoothing, Gaussian process priors, covariance function, Green's function, non-stationary covariance, differential geometry, geometric-heat equation, Laplace-Beltrami operator, weighted graph Laplacian, eigensystem, matrix exponential, diffusion kernel, hierarchical spatiotemporal model, Kronecker product space, Fisher-scoring, fMRI, general linear model, posterior probability map, model comparison

References

[1] Friston, K., Ashburner, J., Kiebel, S., Nichols, T. and Penny, W., 2006. Statistical Parametric Mapping: The analysis of functional brain images. Elsevier, London.

[2] MacKay, D. J. C. (Ed.), 1998. Introduction to Gaussian Processes, vol.168 of NATO ASI Series. Springer, Berlin.

[3] Olver, P. J., Sapiro, G. and Tannenbaum, A., 1997. Invariant geometric evolutions of surfaces and volumetric smoothing. Siam Journal on Applied Mathematics. 57, 176-194.

[4] Penny, W. D., Trujillo-Barreto, N. J. and Friston, K. J., 2005. Bayesian fMRI time series analysis with spatial priors. Neuroimage. 24, 350-362.

ON THE JOINT CONTROL OF ASSETS UNDER UNCERTAINTY

Vavilov S.A., Ermolenko K.Yu.

Saint Petersburg State University, School of Management, Russia,
Saint Petersburg State University, Faculty of Economics, Russia

In the present work the management of portfolio containing an arbitrary finite number of types of assets is studied. The management of portfolio is realized within the framework of an approach alternative to self-financing strategy. It implies the possibility to invest additional money resources from outside during the whole period of portfolio management. Moreover the release of cash as a result of trading allows its reinvestment to acquire new required assets. The case of the pointed out control when portfolio contains only one type of assets was studied in a number of publications [1]–[5].

The main result deals with theoretically proved and experimentally confirmed multiplicative phenomenon. It means that the increasing of the types of assets included in the portfolio brings to the essential growth of profit in the combined portfolio containing several types of assets in comparison with a number of independently managed portfolios each containing only one type of assets.

The prices of the assets included in the portfolio follow the stochastic differential equations

$$dx_{ti} = c_{ti}x_{ti}dt + \sigma_{ti}x_{ti}dW_{ti},$$

where σ_{ti} are factors of volatility, W_{ti} are independent standard Wiener processes, $i = 1, \dots, n$. The portfolio value is defined by the parity

$$f_t = \sum_{i=1}^{n} a_{ti}x_{ti} + m_t,$$

where a_{ti} is the number of i-type assets, $m_t = m(t, \omega)$ is a measurable random function responding to some money equivalent. Namely the value of function m_t taken with minus is the difference between the value of assets as the result of effected trading and the cash which has been spent to acquire them.

The situation when a long position with respect to the each type of assets included in the portfolio is taken into account, i.e. $a_{ti} \geq 0$.

The trading strategy is introduced by making use of the relationship

$$df_t = \sum_{i=1}^{n} a_{ti}dx_{ti} + l(t, x_{t1}, \dots, x_{tn})dt.$$

The problem inquest is to construct the control function $l(t, x_{t1}, \dots, x_{tn})$ providing, under certain conditions, the portfolio profitableness on the given time interval $[0, T]$. The profit $\tilde{p}_t$ corresponding to the observed values of prices is defined by the parity

$$\tilde{p}_t = \tilde{f}_t - \int_0^t l(t, \tilde{x}_{t1}, \dots, \tilde{x}_{tn})d\tau,$$

where $\tilde{f}_t$ is the portfolio value for the observed values of prices while the integral on the right hand side of the last parity is the total amount of the cash invested and processed by the control system at the moment t. The portfolio profitableness on the time interval $[0, T]$ implies the validity of the inequality $\tilde{p}_T > 0$.

In the present study the formulas to calculate the required number of assets $\tilde{a}_{ti}$ to provide, under the fulfillment of certain conditions, the required profitableness of the portfolio were derived. The respective relationship for $\tilde{p}_T$ was obtained. The comparison of the latter one with the corresponding formulas to calculate profit for independently managed portfolios each containing only one type of assets has resulted in the above stated conclusions.

References

[1] Vavilov S.A. 1998. On the stochastic control of investor portfolio when the price of security follows the Ornstein-Uhlenbeck process. In Abstracts of Communications of the International Conference "Asymptotic Methods in Probability and Mathematical Statistics", St. Petersburg, 298-302.

[2] Vavilov S.A. 2001. On the probability models to control the investor portfolio. In the book: Asymptotic methods in probability and statistics with applications, Birkhauser, Boston-Basel-Berlin, pp. 535-546.

[3] Vavilov S.A., Ermolenko K.Yu. 2003. Stochastic systems to control the investor portfolio - Bulletin of Saint-Petersburg State University, Series 5 "Economy", Issue 3, 113-122 (in Russian).

[4] Vavilov S.A., Ermolenko K.Yu. 2004. The procedure to smooth stock prices without using parameters adjusted to the historical data - Bulletin of Saint-Petersburg State University, Series 5 "Economy", Issue 2, 97-106 (in Russian).

[5] Vavilov S.A., Ermolenko K.Yu. 2005. The method to determine one integral characteristic for volatilities in the problem of portfolio management - Bulletin of Saint-Petersburg State University, Series 5 "Economy", Issue 1, 114-124 (in Russian).

АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ СПЕЦИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Акимова А.Н.

Санкт-Петербургский Государственный Университет, Россия

Моделирование социально-экономических процессов часто опирается на теорию игр. Во многих моделях решение строится согласно той или иной игровой концепции решения, одной из которых в теории кооперативных игр с трансферабельными полезностями игроков (ТП-игр) является большое SC-ядро (в частности, SC-ядро). По определению большого SC-ядра для его построения необходимо найти множество оптимальных решений задачи линейного программирования (ЗЛП) специального вида, которое является основанием большого SC-ядра:

$$\min \sum_{i \in N} \xi_i,$$

$$\sum_{i \in S} \xi_i \geq v(S), \quad \forall S \subset N, \ \ S \neq \varnothing, N.$$

Для численного решения задач такого типа обычно используется симплекс-метод. Однако симплекс-метод при его однократном применении дает единственный оптимальный вектор, а многократное применение симплекс-метода приводит к множеству отдельных оптимальных векторов. Следовательно, в случае не единственности оптимального решения задачи линейного программирования при использовании симплекс-метода невозможно полностью определить данное решение. Кроме того, для дальнейших исследований свойств большого SC-ядра представляет интерес задача нахождения всех теоретически возможных множеств оптимальных решений рассматриваемой задачи в зависимости от значений характеристической функции. На основе геометрической интерпретации задачи линейного программирования и ее оптимального решения обоснован аналитический метод решения данной ЗЛП, в результате применения которого вычисляется оптимальное значение целевой функции и находится система уравнений и неравенств, описывающая множество оптимальных решений задачи. Предложенный метод решает и более сложную проблему определения всех теоретически возможных множеств оптимальных решений рассматриваемой ЗЛП при произвольном числе игроков $n \geq 3$.

Помимо построения большого SC-ядра, этот метод можно использовать и для нахождения других связанных с данной задачи линейного программирования решений ТП-кооперативных игр, например, наименьшего С-ядра, N-ядра. В качестве демонстрации метода рассмотрен численный пример построения большого SC-ядра, наименьшего С-ядра и N-ядра в игре с четырьмя игроками.

Analytic Solution for a Special Linear Programming Problem

Akimova A.N.

Saint Petersburg State University, Russia

The problem of finding the solution concept for cooperative games with transferable utilities, called "grand subcore", is considered. The base of grand subcore is a special subset of the set of optimal solutions for a corresponding linear programming problem (LPP). To solve numerically any LPP the simplex-method is commonly used. But in our case, a new analytic method for the solution is proposed.

СТРУКТУРА СОБСТВЕННОГО КАПИТАЛА И УСТОЙЧИВОСТЬ БИЗНЕСА: ПОИСК РАВНОВЕСИЯ И СТРАТЕГИИ УПРАВЛЕНИЯ

Бакулев А.В., Осколков И.В.

Санкт-Петербургский государственный университет, Высшая школа менеджмента, Россия

Большинство существующих теорий поведения фирмы основаны на неявной предпосылке о том, что фирма полностью владеет активами, создающими её ценность. Следуя терминологии Л. Зингалеса, компания применяет по отношению к своим активам так называемые «традиционные права». Вместе с тем, одной из существенных тенденций последних лет является усиление роли, которую в создании ценности фирм играют нематериальные активы, среди которых следует отметить не только бренд, запатентованные технологии и продукты, но также и активы, принадлежащие индивидууму, не переводимые баланс компании (персонифицированные активы). В фирмах с высокой ролью персонифицированных активов потеря одного из участников бизнеса нередко приводит одновременно и к потере бизнес — образующего актива, ведущей к значительному снижению будущих доходов и, следовательно, ценности бизнеса. Таким образом, зависимость ценности бизнеса от персонифицированных активов не может не сказываться на специфике корпоративного управления. Возникает проблема поиска баланса интересов участников компании, то есть такой структуры собственного капитала, при которой ни у кого из собственников — владельцев персонифицированных активов нет стимулов выйти из бизнеса и, следовательно, лишить компанию одного из бизнес — образующих активов.

В предлагаемом докладе представлены результаты построения ряда дескриптивных математических моделей, описывающих специфику управления структурой собственного капитала в компаниях с высокой долей персонифицированных активов, в основе которых лежит идеология равновесия по Нэшу в бескоалиционной игре. Анализируется деятельность венчурной компании, в работе которой заинтересованы две группы участников: инсайдеры, или менеджеры — предприниматели, обладающие персонифицированными активами, и аутсайдеры, обеспечивающие финансирование. Персонифицированные активы менеджеров позволяют получить доход свыше требуемых затрат на вложенный в проект капитал.

Предлагается рассмотреть бескоалиционную игру следующего вида. Для каждого участника бизнеса (менеджера, аутсайдера) определена его доля собственности компании. Игроки могут реализовывать две стратегии при заданной доле акций: остаться в бизнесе или выйти из него. Если игроки решают остаться в бизнесе, то выигрышем каждого можно считать ценность его доли прав собственности в компании в конце периода. В случае если хотя бы один игрок выберет стратегию «выйти из бизнеса», выигрыш каждого будет определяться суммой ценности персонифицированных активов игрока вне бизнеса и ценности его доли в «обескровленной» компании. Равновесной структурой прав собственности является соотношение долей, мотивирующее игроков как рациональных экономических агентов остаться в бизнесе и, одновременно, представляющее собой равновесие по Нэшу.

Анализ построенных моделей, в частности, показал, что если благосостояние менеджера существенно зависит от реализации проекта, при увеличении ценности персонифицированного актива доля менеджера в компании может быть уменьшена. При увеличении доли инвестиций внешнего акционера следует увеличить его долю в проекте, но с меньшей пропорцией. Чем больше менеджер теряет в своей рыночной зарплате при переходе в создаваемый с нуля бизнес, тем большая доля собственности ему необходима.

Анализировалась также ситуация, когда вклад менеджера — предпринимателя в ценность бизнеса в процессе его развития значительно изменяется. Для соответствующих условий была предложена классификация возможных сценариев развития бизнеса в зависимости от изменения требований к допустимой доле участников бизнеса с точки зрения сохранения равновесной структуры прав собственности.

Structure of Own Capital and Business Stability: Searching for Equilibrium and Management Strategy

Bakulev A.V., Oskolkov I.V.

Saint Petersburg State University, School of Management, Russia

Several descriptive mathematical models of the own capital structure management are presented. Models are based on the Nash equilibrium concept in a non-coalitional game.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНЫМИ ЗАПАСАМИ В СЛУЧАЕ РЫНОЧНОЙ КОНКУРЕНЦИИ

Гасратов М.Г., Захаров В.В.

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

В работе рассматривается игровая задача управления материальными запасами, когда на рынке существуют несколько фирм (предприятий), поставляющих покупателям замещаемые товары. Предполагается, что имеет место дифференциация товара и спрос на него является случайной величиной.

Задача решается на двух уровнях. На первом уровне решается внутренняя неигровая задача, а на втором — внешняя игровая задача.

Внутренняя задача — это задача оптимизации соответствующих логистических процессов на основе релаксационного метода регулирования запасов (система регулирования запасов с фиксированным размером заказа). Здесь под логистическими процессами подразумеваются процессы формирования и хранения материальных запасов, процессы урегулирования возможного дефицита товара.

Внешняя задача — это задача моделирования олигополистического поведения как бескоалиционной игры, в которой каждое предприятие преследует свои собственные интересы. В такой игре в качестве принципа оптимальности рассматривается равновесие по Нэшу. Сформулированы необходимые и достаточные условия существования равновесия по Нэшу. Даны формулы для определения оптимальных стратегий управления в логистических процессах (решение внутренней задачи).

Рассмотрена зависимость оптимальных стратегий от параметров задачи.

Литература

[1] М.Н. Григорьев, А.П. Долгов, С.А. Уваров. Управление запасами в логистике. СПб.: 2006.-368 с.
[2] Логистика: Учебник/ Под редакцией Б.А. Аникина: 3-е Изд. - М.: ИНФРА-М, 2005. - 368 с.
[3] Джон Шрайбфедер. Эффективное управление запасами. Изд.: Альпина Бизнес Букс, 2006 г., 304 с.
[4] Ю. И. Рыжиков. Теория очередей и управление запасами. Серия: Учебник для вузов. Изд.: Питер, 2001 г., 384 с.
[5] Р. А. Радионов, А. Р. Радионов. Управление сбытовыми запасами и оборотными средствами предприятия. Изд.: Дело и Сервис, 1999 г., 400 стр.
[6] Линдерс М.Р., Фирон Х.Е. Управление снабжением и запасами. Логистика/Пер. с англ. СПб.: Полигон, 1999. 768 с.
[7] Жан Тироль. Рынки и рыночная власть: теория организации промышленности: В 2-х томах. Изд. 2-е исправление / Перевод с англ. под редакцией В.М. Гальперина и Н.А. Зенкевича. СПб.: Экономическая школа, 2000. Т.2.-450 с.
[8] Н.К. Моисеева, А.И. Клевлин, И.А. Быков. Управление продажами в условиях конкуренции. Изд. Омега-Л, 2006. 306 с.
[9] Л.А. Петросян, Н.А. Зенкевич, Е.А. Семина. Теория игр. М.: Высшая школа, Книжный дом "Университет" 1998.-304 с.

Mathematical Model of Material Supply Chain Management in Case of Market Competition

Gasratov M.G., Zakharov V.V.

Saint Petersburg State University, Russia

The mathematical model of material Supply Chain Management in case of market competition between several enterprises was considered. Enterprises are manufacturing or supplying differentiable commodity on market with casual demand.

The problem at two levels (inside non-gaming problem, outside gaming problem) are solved. Necessary and sufficient condition of existence of equilibrium situations is obtained. Equilibrium strategics are found. Formulas for determination of optimal strategies of control in logistic processes are given.

ТЕОРЕТИКО-ИГРОВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СТРАТЕГИЧЕСКОГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ «ИНСАЙДЕРСКОЙ» ИНФОРМАЦИИ НА ФИНАНСОВЫХ РЫНКАХ

Доманский В.К., Крепс В.Л.

СПЭМИ РАН, Россия

Мы исследуем модели многошаговых биржевых торгов с двумя участниками с асимметричной информацией за рисковые ценные бумаги (акции). Перед началом торгов случайный ход выбирает ликвидационную цену акции в соответствии с известным обоим игрокам вероятностным распределением. Выбор случая сообщается Игроку 1 и не сообщается Игроку 2. Затем, на каждом шаге торгов игроки одновременно называют свою цену акции. Назвавший более высокую цену покупает за эту цену одну акцию у противника. Игроки стремятся максимизировать цену своего итогового портфеля (деньги плюс ликвидационная цена акций). Случайная ликвидационная цена акции может принимать произвольные неотрицательные целочисленные значения согласно заданному распределению $\boldsymbol{p}$. Допустимы любые целочисленные ставки.

Такая n-шаговая модель описывается антагонистической повторяющейся игрой $G_n(\boldsymbol{p})$ с неполной информацией у второго игрока, задаваемой счетным числом бесконечных матриц. Для построенных игр $G_n(\boldsymbol{p})$ получены следующие результаты:

1) Если случайная величина C, задающая ликвидационную цену акции не принадлежит $L^2(C)$ (второй момент распределения $\boldsymbol{p}$ бесконечен), то последовательность значений n-шаговых игр расходится.

2) Если $C \in L^2$, то при $n \to \infty$, последовательность значений n-шаговых игр $V_n(\boldsymbol{p})$ сходится к значению $V_\infty(\boldsymbol{p})$ игры $G_\infty(\boldsymbol{p})$ с бесконечным числом шагов. Это – кусочно-линейная непрерывная вогнутая функция от $\boldsymbol{p}$. Ее области линейности $D(k)$ состоят из распределений, для которых математическое ожидание $E[C]$ цены акции находится в интервале $[k, k+1]$. Оптимальная стратегия Игрока 1 для игры $G_\infty(\boldsymbol{p})$ порождает симметричное случайное блуждание его ставок с поглощающим множеством $\{\boldsymbol{p}\colon p_{k+1} = 1 - p_k\}$. Значение игры равно продолжительности этого случайного блуждания до момента поглощения.

Рассмотренные ранее игры [1], [2], [3] с двумя возможными значениями 0 и 1 цены акции и с допустимыми ставками k/m, $k = 0, \ldots, m-1$, сводятся к описанным играм с распределением $\boldsymbol{p}$, имеющим две ненулевые компоненты $p_0 = 1 - p$, $p_m = p$ и при отбрасывании доминируемых стратегий.

Работа выполнялась при поддержке гранта РФФИ 04-06-80430.

Литература

[1] Доманский В.К., Крепс В.Л. Повторяющиеся игры с асимметричной информацией и случайные блуждания цен на финансовых рынках. – Обозрение прикладной и промышленной математики, 2005, т.12, в.4, с.950-952.
[2] De Meyer B., Marino A. Continous versus discrete market game. Cowles Foundation Discussion Paper No 1535, 2005.
[3] Domansky V, Kreps V. On strategic background of random price fluctuations at financial markets. – Препринт ПОМИ им. В.А.Стеклова РАН, 2006, 01/2006.

Game Theoretic Model for Strategic Use of Insiders' Information on Financial Markets

Domansky V.K., Kreps V.L.

St.Petersburg Institute for Economics and Mathematics, RAS, Russia

We investigate a model of multistage biddings between two agents with asymmetric information for risky assets (shares). Before the biddings start, a chance move determines the integer liquidation price of a share according to the probability distribution known to both players. Player 1 is an insider. Any integer bids are admissible. This multistage model is described by a zero-sum repeated game with incomplete information of Player 2 and with countable state and action spaces. If the random variable, determining the liquidation price of a share belongs to then the game with infinite number of steps is correctly defined. We get solution of this game and demonstrate that the optimal strategy of Player 1 generates a symmetric random walk of bids. The value of the game is equal to the expected duration of this random walk before absorption.

ТЕОРЕТИКО-ИГРОВАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ КАЧЕСТВОМ НА РЫНКЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ УСЛУГ

Зенкевич Н.А.[*], Кузютин Д.В.[**]

[*] *Санкт-Петербургский государственный университет, Россия,*
[**] *Международный банковский институт, Россия*

В работе представлены результаты исследования двухшаговой теоретико-игровой модели стратегической конкуренции («качество —цена») образовательных учреждений на рынке образовательных услуг в условиях вертикальной дифференциации (QP-модели). Отдельное внимание уделено изучению влияния повышения минимального регламентированного уровня качества предоставляемых образовательных услуг на характеристики равновесных решений модели.

На первом шаге (этап выбора уровней качества) $n = 2$ образовательных учреждения одновременно выбирают уровни качества $q \in [\,\underline{q}, \overline{q}\,] \subset [0, +\infty)$ собственной образовательной услуги, достижение которого требует издержек $\mathrm{FC}(q)$. С точки зрения каждого из конечного числа S потребителей услуги являются заменителями, причем в рассматриваемый временной промежуток потребитель может выбрать не более одной из предложенных услуг.

На втором шаге (этап ценовой конкуренции) образовательные учреждения, зная выбранные на первом шаге уровни качества $q_L \leq q_H$, одновременно определяют цены на свои услуги p_L и p_H соответственно (например, стоимость обучения за семестр). Индекс H выделяет образовательное учреждение, выбравшее уровень качества, не меньший чем уровень качества образовательной услуги конкурента.

Реакция потребителей на предлагаемый набор образовательных услуг проявляется в максимизации каждым потребителем своей функции потребительского излишка следующего вида: $U_t = \max\{tq_H - p_H, tq_L - p_L, 0\}$, где $t \in [\,\underline{t}, \overline{t}\,] \subset [0, +\infty)$ — единственный скалярный параметр неоднородности потребителей, характеризующий готовность данного потребителя платить за повышение качества предоставляемой услуги (или склонность к качеству). С точки зрения конкурирующих образовательных учреждений параметр t является случайной величиной, распределенной равномерно на $[\,\underline{t}, \overline{t}\,]$.

Отмеченная реакция потребителей на наблюдаемый вектор $(q_L, p_L; q_H, p_H)$ приводит к самоотбору потребителей и однозначному определению доли рынка D_L и D_H, и дохода каждого образовательного учреждения. На этом же этапе учитываются переменные издержки $\mathrm{VC}_i(q_i,\mathrm{D}_i)$, $i \in \{L, H\}$. Целью каждого образовательного учреждения (в рыночном секторе образования) считается максимизация прибыли от предоставляемых образовательных услуг за рассматриваемый период.

В работе найдено абсолютное («совершенное в подыграх») равновесие, при построении которого использован метод обратной индукции. Проанализирована зависимость полученного решения от параметров модели.

Game-Theoretical Model of the Quality Management at Education and Training Market

Zenkevich N.A.[*], Kuzyutin D.V.[**]

[*] *Saint Petersburg State University, Russia,*
[**] *International Banking Institute, St. Petersburg, Russia*

The game-theoretical model of educational and training market when the strategic competition of educational institutions leads to the vertical product differentiation is analyzed. The main attention is paid to the construction of the institutions' optimal strategies, which form the subgame-perfect equilibrium. The consequences of raising a minimum quality standards on the optimal strategies are investigated.

РЕШЕНИЕ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ИГРЫ ВХОДА НА РЫНОК В УСЛОВИЯХ ДУОПОЛИИ

Зенкевич Н.А.[*], Рысков И.Е.[**]

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

[*]*Высшая школа менеджмента,*

[**]*Факультет прикладной математики - процессов управления*

В работе рассматривается решение симметричной стохастической игры входа на рынок в условиях дуополии. Игроками являются две фирмы. Для входа на рынок фирме необходимо осуществить инвестиции в размере K. Предполагается, что цена реализуемых на рынке товаров имеет вид: $P(t) = X(t) \cdot D[Q(t)]$, где $Q(t)$ — совокупный объем предложения, $D[Q(t)]$ — обратная функция спроса, величина $X(t)$ характеризует неопределенность будущего значения цены. В работе предполагается, что $X(t)$ изменяется в соответствии со стохастическим процессом Ито: $dX = \alpha X dt + \sigma X dz$, где α и σ — заданные параметры процесса.

Стратегией игрока является выбор момента входа на рынок. В качестве выигрыша игрока, рассматривается приведенное значение денежного потока дохода, получаемого фирмой. Поскольку доход зависит от цены продукции, то выигрыши являются случайными величинами. Доход фирмы в каждый момент времени зависит от ее собственного поведения и поведения конкурента. Фирма может войти на рынок первой (лидер) или второй (ведомый). Возможен и одновременный вход. Когда лидирующая фирма входит на рынок, она становится временно монополистом. При последующем входе ведомой фирмы на рынке сложится ситуация дуополии. При одновременном входе на рынке сразу имеет место случай дуополии.

Анализ игры проведен в два этапа. На первом этапе игра рассматривается в статике. Начальное состояние стохастического процесса X и роли игроков (лидер, ведомый, одновременный вход) считаются заданными. Предположив, что лидер входит на рынок в начальный момент времени, найден оптимальный момент входа на рынок ведомого, и получены выражения для выигрышей игроков. Получены выражения для выигрышей игроков при одновременном входе и проведен сравнительный анализ соотношения выигрышей игроков в зависимости от их роли в игре.

На втором этапе игра рассматривается в динамике. В каждый момент времени (в зависимости от текущего состояния стохастического процесса) невошедший на рынок игрок решает: входить или нет.

В работе найдено равновесие по Нэшу в смешанных стратегиях для исследованной модели входа на рынок в условиях дуополии.

The Solution of a Stochastic Two Person Market Entry Game

Zenkevich N.A.[*], Ryskov I.E.[**]

Saint Petersburg State University, Russia

[*]*Graduate School of Management,*

[**]*Department of Applied Mathematic and Control Processes*

An industry comprised of two identical firms is considered. If only one firm invests, it achieves the monopolist payoff. If both firms invest the firms receive the payoffs of a duopoly and each firm must then determine its optimal exercise strategy fully cognizant of its competitor's similar calculation. Nash equilibrium in mixed strategies is found.

СИЛЬНОЕ РАВНОВЕСИЕ ПО НЭШУ В ИГРЕ СО СТОХАСТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКОЙ

Зятчин А.В.

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

В работе исследована проблема построения сильного равновесия по Нэшу в динамической игре со стохастической динамикой. В основе модели рассмотрена одношаговая игра G с множеством игроков $N = \{1, \ldots, n\}$, множеством стратегий $\{Q_i\}$ и выигрышей $\{K_i\}$. На основе игры G построена повторяющаяся игра Γ, где выигрыш игрока равен сумме выигрышей в одношаговых играх, дисконтированных на момент начала игры с попериодным дисконтом $0 < \delta \leq 1$. В качестве динамики рассматривался стохастический процесс Ито с постоянными параметрами μ и σ [1]:

$$dx(t) = \mu x dt + \sigma x dz,$$

где dz — процесс Винера.

В детерминированном случае известна методика определения условий для существования сильного равновесия по Нэшу в динамической игре с использованием специальной процедуры распределения дележа [2]. В работе определены понятия стохастического дележа, С-ядра кооперативной стохастической игры, а также процедуры распределения стохастического дележа. В отличие от классической теории кооперативных игр, рассматривалась специально построенная характеристическая функция. При движении вдоль условно-оптимальной траектории, предполагалось, что при отклонении произвольной коалиции от кооперативной траектории, дополнительная коалиция продолжает придерживаться кооперативной стратегии.

Основным результатом работы является нахождение условий на параметры задачи, гарантирующих существование сильного равновесия в повторяющейся игре с указанной стохастической динамикой. Результат получен в форме достаточных условий и оформлен в виде теоремы.

Теоретические результаты работы проиллюстрированы на модельных примерах.

Литература

[1] Yeung D. W. K., Petrosyan L. A. 2006. Cooperative stochastic differential games. Springer.

[2] Petrosjan L.A., Grauer L. V. 2002. Strong Nash equilibrium in multistage games International game theory review 4 (3): 255-264.

Strong Nash Equilibrium in a Repeated Game with Stochastic Dynamics

Zyatchin A.V.

Saint Petersburg State University, Russia

Infinite repeated game is considered, where state variable follows stochastic Ito's process with constant parameters. For the game a regularization procedure is introduced, and in the regularized game Strong Nash equilibrium is constructed. The results are illustrated with an example.

Keywords: game, equilibrium, imputation distribution procedure, regularization, strong Nash equilibrium.

МОДЕЛИ ДИНАМИКИ ПОТРЕБИТЕЛЬСКОГО СПРОСА НА ТОВАРНОМ РЫНКЕ

Кандоба И.Н., Успенский А.А.

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, Россия

Рассматриваются вопросы, связанные с математическим моделированием процессов, протекающих на автономном товарном рынке [1,2]. Моделью рынка является сеть взаимосвязанных пунктов продаж однородного товара. Основное внимание уделяется исследованию закономерностей в процессах перераспределения объемов продаж при изменении значений доминирующих факторов, определяющих уровень потребительского спроса.

Для математического моделирования указанных процессов используется детерминированный подход к анализу социально-экономической системы, задействован математический аппарат гладкого анализа, применяются хорошо зарекомендовавшие себя в математической экономике и статистике функции Кобба-Дугласа [3]. Предлагается несколько взаимосвязанных математических моделей, в разной степени учитывающих доминирующие факторы, взаимодействие пунктов сети и, как следствие, существенно различающихся вычислительной трудоемкостью их численной реализации. Один из основных инструментариев, на основе которых строятся эти модели, – нелинейная функция спроса. Функция спроса определяется как функция цены продукта для каждого пункта и является его локальной характеристикой. Рассматривается ряд нелинейных конструкций, позволяющих описать взаимодействие пунктов сети в терминах эластичностей связей. Предлагаются вычислительные алгоритмы для определения числовых значений локальных и сетевых характеристик моделей. Приводятся результаты численного моделирования с использованием реальных данных.

На основе построенных моделей рассматриваются постановки оптимизационных задач, решение которых может использоваться при формировании краткосрочной политики фирмы в сфере ценообразования [4].

Результаты численного моделирования [5] были использованы специалистами компании «Сибнефть» при принятии управленческих решений. Апробация предлагаемых подходов к построению математических моделей и их использование для постановки и численного решения оптимизационных задач подтверждает их достаточную эффективность к решению содержательных экономических задач с использованием реальных данных.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 06-01-00229.

Литература

[1] I.Kandoba, A.Uspenskii. Mathematical simulation of an autonomous network of retail outlets at a local market. Interim Report, IR-01-000. IIASA, Laxenburg, Austria, 2001.

[2] I.Kandoba, K.Kotelnik, A.Uspenskii. On one problem of vector optimization of pricing in an autonomous wholesale market. Interim Report,. IR-04-XXX, IIASA, Laxenburg, Austria, 2004.

[3] М. Интрилигатор. Математические методы оптимизации и экономическая теория М.: Финансы и статистика, 1975, 606 с.

[4] Кандоба И.Н. Формирование финансовой политики фирмы на краткосрочную перспективу // Известия уральского государственного экономического университета. №1 (13), 2006.

[5] Кандоба И.Н. Численный алгоритм решения одной векторной задачи оптимизации ценообразования // Известия уральского государственного экономического университета. № 8, 2004. С. 75–81.

Models of Consumer Demand Dynamics at a Market

Kandoba I.N., Uspenskiy A.A.

Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, Russia

The paper is devoted to mathematical simulation of an autonomous network of retail outlets at a local market. The question of simulation of redistribution processes in the network is discussed. Two interconnected and complemented economic-mathematical models are suggested. These models describe the evolution processes of the sale conditions in the network. They are constructed on the basis of the nonlinear price demand and the system state functions. The mathematical models are described by a dynamic system of partial differential equations. The main attention is given to mathematical simulation of the redistribution process of consumer demand through retail outlets in the network under fluctuations of prices. The numerical realization of the models is discussed. Computer simulations show that the proposed models can adequately reflect some real processes of the sales redistribution in the network.

ПОСТРОЕНИЕ РАЗРЕШАЮЩИХ СТРАТЕГИЙ ИГРОКОВ В НЕАНТАГОНИСТИЧЕСКОЙ ПОЗИЦИОННОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ ДВУХ ЛИЦ

Клейменов А.Ф.

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, Россия

Рассматривается неантагонистическая позиционная дифференциальная игра двух лиц с терминальными функциями выигрыша игроков. Динамика игры описывается нелинейным дифференциальным уравнением. Управляющие воздействия игроков стеснены геометрическими ограничениями.

Формализация стратегий и движений, ими порождаемых, производится так же, как и в теории антагонистических позиционных дифференциальных игр [1,2] за исключением технических деталей. В качестве исходного понятия решения используется решение по Нэшу. (см., например, [3-5]). Далее, на непустом множестве нэшевских решений выделяется подмножество элементов, неулучшаемых по Парето. На этом подмножестве находят элементы, наилучшие для 1-го и 2-го игроков, соответственно. Используя эти элементы, строится итерационная процедура [6,7], позволяющая, вообще говоря, значительно сузить исходное множество неулучшаемых по Парето нэшевских решений. В ряде случаев результирующее множество может состоять из единственного элемента. Существенным моментом процедуры является использование равновесий во вспомогательных биматричных играх; эти равновесия являются аналогами седловых точек в соответствующих статических задачах на максимин, возникающих при пошаговом формировании управлений игроков в антагонистических дифференциальных играх [1,2]. В качестве решений игры предлагается использовать как раз нэшевские решения из результирующего множества. Заметим, что эти решения удовлетворяют свойству динамической устойчивости, введенному в [4].

Предлагаемая процедура подробно иллюстрируется на рассматриваемых в докладе примерах.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-01-00436).

Литература

[1] Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.

[2] Красовский Н.Н. Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. М.: Наука, 1985.

[3] Кононенко А.Ф. О равновесных позиционных стратегиях в неантагонистических дифференциальных играх. // Докл. АН СССР. 1976. Т. 231, N2. С.285-288.

[4] Петросян Л.А. Устойчивость решений в дифференциальных играх со многими участниками. // Вестн.ЛГУ. 1977. N19. С.46-52.

[5] Клейменов А.Ф. Неантагонистические позиционные дифференциальные игры. // Наука, Уральское отделение, Екатеринбург, 1993.

[6] Клейменов А.Ф. О решениях в неантагонистической позиционной дифференциальной игре. // ПММ, т.61, вып.5, 1997.

[7] Клейменов А.Ф. Задачи построения динамики неантагонистических позиционных дифференциальных игр // Труды Института математики и механики УрО РАН, т.6, N2, 2000, стр.380-393.

Construction of Solving Strategies for Players in a Nonantagonistic Positional Differential Game

Kleimenov A.F.

Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of RAS, Ekaterinburg, Russia

Suggested approach uses Nash solutions of the game which are the best for the first player and for the second player, respectively. The special iterative procedure is considered which ensures, in general, narrowing the set of acceptable Nash solution. In particular, the resulting set can consist of a single element. Nash solutions from the resulting set are taken as solutions of the game.

ТЕОРЕТИКО-ИГРОВАЯ МОДЕЛЬ СОКРАЩЕНИЯ ВЫБРОСОВ ВРЕДНЫХ ВЕЩЕСТВ В АТМОСФЕРУ С АСИММЕТРИЧНЫМИ ЗАГРЯЗНИТЕЛЯМИ

Козловская Н.В.

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

Решение проблемы глобального потепления требует объединения усилий многих стран. При этом могут возникать разногласия касательно распределения затрат на снижение выбросов до некоторого допустимого уровня и затрат на возмещение ущерба от загрязнения. Кооперативная теория игр имеет решения, которые не только являются справедливыми, но также учитывают и стратегическую силу игроков, и потому могут быть полезны для решения подобных задач.

В настоящей работе рассматривается модель сокращения вредных выбросов, которая была предложена Гермэйном и др. в 1998 году. Л.А. Петросян и Г. Заккур в 2001 г. рассмотрели ту же модель с непрерывным временем на бесконечном промежутке [1]. В данной работе будет рассмотрена модель со случайной продолжительностью, переформулированная для этого случая в работе [3].

Пусть I — множество стран, вовлеченных в игру сокращения выбросов в атмосферу, $I = \{1, 2, \dots, n\}$. Игра начинается в момент времени t_0 из начального состояния x_0. Момент окончания игры является случайной величиной, для которой задана функция распределения: $F(t) = \rho e^{-\rho(t-t_0)}$, $t \in [t_0; \infty)$. Выбросы игрока i $(i = 1, 2, \dots, n)$ в момент времени t, $t \in [t_0; \infty)$, обозначим как $u_i(t)$. Пусть $x(t)$ — это запас накопленного загрязнения за время t. Рост запаса загрязнения определяется следующим уравнением: $x(t) = \sum\limits_{i \in I} u_i(t) - \delta x(t)$, $x(0) = x^0$, где δ — коэффициент, характеризующий долю впитываемого загрязнения. Введем следующие обозначения: $C_i(u_i)$ — это издержки уменьшения выбросов, которые несет страна i, когда она снижает свои выбросы до уровня $\overline{u}_i$: $C_i(u_i) = \dfrac{\gamma}{2}(u_i - \overline{u}_i)^2$, $0 \le u_i \le \overline{u}_i$, $\gamma > 0$, а $D_i(x)$ — это издержки возмещения убытков: $D_i(x) = \pi x$, $\pi > 0$. Каждый игрок стремится минимизировать суммарные издержки уменьшения выбросов и возмещения убытков.

В настоящей работе вычислена характеристическая функция для всех возможных коалиций, доказывается выпуклость характеристической функции. Найден вектор Шепли. Показана его динамическая устойчивость. Характеристическая функция вычисляется при помощи уравнения Гамильтона – Якоби-Беллмана для задач со случайной продолжительностью, которое было выведено в работе [2]. Вычисление характеристической функции не стандартно [1]. Когда характеристическая функция вычисляется для коалиции K, то игроки, не вошедшие в коалицию K, придерживаются стратегий, максимизирующих их собственный выигрыш, вместо того, чтобы объединиться в антикоалицию.

Литература

[1] Petrosjan L. A., Zaccour G. Time-consistent Shapley Value Allocation of Pollution cost Reduction. // Journal of Economic Dynamics and Control, Vol. 27, 2003. C. 381–398.

[2] Шевкопляс Е.В. Уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана для кооперативных дифференциальных игр со случайной продолжительностью. // Устойчивость и процессы управления: Труды международной конференции, СПбГу 2005, НииВМПУ ОООВВМ 2005. т. 1, С. 630–639.

[3] Козловская Н.В. Теоретико-игровая модель сокращения выбросов вредных веществ в атмосферу. // Процессы управления и устойчивость: Тр. 37-й междунар. науч. конф. аспирантов и студентов. СПб., 10-13 апреля 2006 г. / Под ред. А. В. Платонова, Н. В. Смирнова. - СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2006. - С. 559–563.

A Game Theoretical Model of Reducing Emissions with Asymmetric Payoffs

Kozlovskaya N.V.

Saint Petersburg State University, Russia

The model of reducing emissions was for the first time studied by Petrosian and Zaccour in 2003. The same model with random duration is under consideration in this paper. The characteristic function for all possible coalitions is computed. The Shapley value is found.

ТЕОРЕТИКО-ИГРОВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЛЯ ЗАДАЧ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ МЕЖДУ НЕСКОЛЬКИМИ РЫНКАМИ

Крепс В.Л.

Санкт-Петербургский институт экономики и математики РАН, Россия

В теоретико-игровой постановке задачи распределения ограниченных ресурсов решались различными авторами. История вопроса и обширная библиография содержатся в книге Н.Н. Воробьева [1]. В недавней книге А.А. Васина [2] разработаны теоретико-игровые методы и подходы к задачам, возникающих в моделях рыночной экономики.

Мы рассматриваем игровую задачу, в которой m участников распределяют свой наличный одномерный ресурс на продажу между n рынками. Цена единицы ресурса на каждом рынке зависит от предложения и убывает с ростом предложения ресурса на этом рынке каждым из игроков. Мы предполагаем, что рынок j характеризуется параметром a_j, и цена единицы ресурса на рынке j с точностью до множителя a_j задается одной и той же для всех рынков однородной функцией от суммарного предложения на рынок j. Показатель однородности этой функции принадлежит интервалу $(-1, 0)$. Выигрыш (полезность) каждого игрока является суммой его доходов от продаж на всех рынках.

Если непосредственная кооперация между участниками отсутствует, то модель естественно рассматривается как бескоалиционная игра m лиц. В работе устанавливается, что использование единственной ситуации равновесия по Нэшу для этой игры приводит к тому, что:
а) цены единицы ресурса на всех рынках оказываются равными;
б) все игроки распределяют свои ресурсы между рынками в одной и той же пропорции. Доля наличного ресурса, направляемая игроком на рынок j, не зависит от числа игроков, а также от их наличных ресурсов и совпадает с долей, которую для случая $m = 1$ предписывает решение соответствующей оптимизационной задачи.

Таким образом, игроки могут использовать равновесные стратегии, не обладая информацией ни о ресурсах партнеров, ни об их числе. Этот феномен является следствием специального вида цен, а значит и функций полезностей игроков. При функциях полезностей общего вида доля ресурса, выделяемая игроком на каждый рынок, должна зависеть от числа игроков и их наличных ресурсов и, во всяком случае, от соотношений между наличными ресурсами участников игры.

Равновесное поведение игроков обеспечивает максимум их суммарного выигрыша, который можно трактовать как «общественную» полезность.

Замечание. Выигрыши игроков в единственной ситуации равновесия с точностью до коэффициента составляют ту же вектор-функцию, что и доходы игроков на каждом рынке в исходной задаче. Это означает, что равновесное использование нескольких рынков эквивалентно использованию одного рынка.

Случай двух конкурентных рынков $n = 2$ исследовался в работе [3].

Литература

[1] Воробьев Н.Н. Основы теории игр. Бескоалиционные игры. М.:Наука, 1984, 496 с.
[2] Васин А.А. Некооперативные игры в природе и обществе. – М.: МАКС пресс, 2005, 412 с.
[3] Domansky V., Kreps V., Social equilibria for competitive resource allocation models // in: Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Springer-Verlag, 2002, Vol. 510, p.408-419.

Game Theoretic Model of Resource Allocation Problems Between Several Markets

Kreps V.L.

Saint Petersburg Institute for Economics and Mathematics, RAS, Russia

A competitive model of resource allocation is considered. Several agents distribute their one-dimensional resources between several markets. A price of a unit of resource at market j is a homogeneous function of supply multiplied by index a_j. We solve a corresponding non-cooperative game. The unique Nash equilibrium prescribes to divide a resource in the same proportion for all agents. The price of a unit of resource is the same for all markets.

РАВНОВЕСНЫЕ РЕШЕНИЯ В ЗАДАЧАХ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Ляпунов А.Н.

Санкт-Петербургский институт экономики и математики РАН, Россия

Общепризнанно, что любое «решение» многокритериальной задачи должно быть Парето-оптимальным (эффективным). Это значит, что улучшение такого решения по одному критерию сопровождается его ухудшением по какому-либо другому критерию. Систематическое исследование Парето-оптимальных решений многокритериальных задач и методы нахождения этих решений содержится в монографии [1]. Одним из таких методов нахождения решения является свертывание критериев, в частности, максимизация неотрицательной линейной комбинации критериев. Другой подход к многокритериальным задачам состоит в ранжировании критериев. Этому подходу посвящена монография [2].

В настоящем докладе предлагается новый подход к решению многокритериальных задач, основанный на принципах согласованности и равновесия, используемых в настоящее время в теории игр. Принцип согласованности давно используется в математике — достаточно вспомнить согласованную систему мер в теории вероятностей. Принцип согласованности состоит в следующем: задача погружается в класс задач, зависящих от параметра, после чего постулируется вид зависимости решения от этого параметра. На этом принципе основано динамическое программирование, а также многие понятия решения в кооперативных играх. В нашем случае принцип согласованности сводится к непрерывной зависимости решения для отрезка от угла поворота.

Принцип равновесия (лучше было бы говорить об устойчивости) в общем виде сформулировать сложнее. Определяется класс возможных отклонений от решения. Решение удовлетворяет принципу равновесия, если при любом возможном отклонении нарушается принцип согласованности.

В рассматриваемом случае принцип равновесия сводится к тому, что принцип согласованности должен выполняться по каждой из переменных.

Вводится новое понятие одноточечного решения для задач многокритериальной оптимизации, использующее принципы согласованности и равновесия из теории игр и выводятся уравнения для этого решения.

Прослеживается аналогия с классической оптимизацией: подобно тому, как равенство нулю производной функции еще не достаточно для ее максимизации, решение выведенных уравнений в общем случае может быть не Парето-оптимальным.

Литература

[1] Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. - М.: Наука. 1980.- 256 с.

[2] Ногин В.Д. Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход. - М.: Физматлит. 2002. - 176 с.

[3] Ляпунов А.Н. Согласованность и равновесие в многокритериальных задачах. VI Всероссийский Симпозиум по прикладной и промышленной математике. Тезисы докла-дов. Обозрение прикладной и промышленной математике. Т.12, N 1, 2005, с. 163-164.

[4] Ляпунов А.Н. Согласованность и равновесие в многокритериальных задачах. Экономико-математические исследования. Математические модели и информационные технологии IV. Ч.I. СПб, СПб ЭМИ РАН, 2005, с. 92–110.

Equilibrium Solutions in the Multicriteria Optimization Problems

Liapounov A.N.

Saint Petersburg Institute for Economics and Mathematics, RAS, Russia

A new concept of the single-valued solution for the multicriteria optimzation problems using the principles of the consistency and equilibrium from the game theory is introduced. For this solutions, new equations are constructed.

ЗАДАЧА СОВМЕСТНОГО НАИЛУЧШЕГО ВЫБОРА ДЛЯ ДВУХ ИГРОКОВ

Мазалов В.В., Фалько А.А.

Институт прикладных математических исследований
Карельский научный центр РАН, Петрозаводск, Россия

В работе рассматривается игра двух лиц наилучшего выбора. Два игрока хотят совместно нанять на работу специалиста. Всего имеется n претендентов на свободное место. Для каждого игрока претенденты упорядочены по определенному качеству (абсолютный ранг). Претендент с наименьшим рангом считается лучшим. Претенденты поступают в случайном порядке, так что все $n!$ перестановок равновероятны. При собеседовании с текущим претендентом каждый игрок наблюдает его ранг относительно предыдущих. Основываясь на этой информации, игроки совместно решают принять или отвергнуть текущего претендента. Обозначим относительные ранги претендента на шаге i для первого игрока X_i, для второго Y_i. Пусть на шаге i игроки наблюдают $X_i = x$ и $Y_i = y$. Относительные ранги для разных игроков могут быть как независимыми случайными величинами, так и зависимыми. Если i-ый претендент отвергнут, то игроки переходят к собеседованию с $i+1$ претендентом. Если i-ый претендент принимается на работу, то игра заканчивается. В этом случае ожидаемый выигрыш для группы равен $pQ(i,x)+\overline{p}Q(i,y)$, где $Q(i,x)$, $Q(i,y)$ — ожидаемые абсолютные ранги претендента для первого и второго игрока, и p, $\overline{p}$ — вес мнения первого и второго игрока соответственно. На шаге n игроки вынуждены принять последнего претендента. Необходимо найти оптимальное правило, которое минимизирует ожидаемый выигрыш группы.

Приводятся равновесные стратегии и оптимальные пороговые стратегии для принятия претендента в случае, когда X_i и Y_i — зависимые случайные величины.

Работа поддержана грантом РФФИ (проект 06-01-00128-а).

Литература

[1] Sakaguchi M., Mazalov V. A non-zero-sum no-information best-choice game // Mathematical Methods of Operation Research, 2004, Vol.60, pp. 437-451.

Best Choice-Problem for Two Players

Mazalov V.V., Falko A.A.

Institute of Applied Mathematical Research KRC RAS, Karelia, Petrozavodsk, Russia

Two person no-information best-choice problem is considered. The group of two players wants to select jointly the best secretary among n applicants. Players jointly make decision to accept or to reject the applicant. If accept is chosen, the game ends and the group receives the payoff with weight of importance of choosing for each player. We want to find the stopping rule which minimizes the expected weighted offer. Equilibrium strategies and optimal threshold strategies for acceptance the applicant are given.

РАВНОВЕСИЯ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ БИОРЕСУРСАМИ С МЕНЯЮЩЕЙСЯ ЗАПОВЕДНОЙ ТЕРРИТОРИЕЙ

Мазалов В.В., Реттиева А.Н.

Институт прикладных математических исследований
Карельский научный центр РАН, Петрозаводск, Россия

Исследована модель развития рыбной популяции, учитывающая существование миграции между частями водоема на бесконечном горизонте планирования. Центр (государство) в каждый момент времени определяет долю заповедной части водоема, обозначенную $s(t)$, $0 \le s(t) \le 1$. Разделим акваторию водоема на две части S_1 и S_2, где вылов запрещен и разрешен, соответственно. Тогда $s = S_1/(S_1+S_2)$ — доля заповедной территории. Пусть $x_1(t)$ и $x_2(t)$ — рыбные запасы на единицу площади S_1 и S_2, соответственно. Между частями водоема существует миграционный обмен с коэффициентом $\alpha\, s(t)(1-s(t))$, где α — скорость обмена между открытой и закрытой областями. На S_2 рыболовецкая артель ведет вылов биоресурсов на бесконечном отрезке времени.

Тогда динамика развития популяции с учетом вылова описывается уравнениями:

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t)(\varepsilon - \beta(x_1(t) + x_2(t))) + \alpha s(t)(1 - s(t))(x_2(t) - x_1(t)), \quad x_1(0) = x_1^0, \\ x_2'(t) = x_2(t)(\varepsilon - \beta(x_1(t) + x_2(t))) + \alpha s(t)(1 - s(t))(x_1(t) - x_2(t)) - u(t), \quad x_2(0) = x_2^0, \end{cases} \tag{1}$$

где $x_1(t) \geq 0$, $x_2(t) \geq 0$ — размеры популяции в период t на закрытой и открытой территориях; $\varepsilon - \beta(x_1(t) + x_2(t))$ — функция естественного роста популяции; $u(t) \geq 0$ — рыболовецкие усилия артели в период t; $s(t) \geq 0$ — доля заповедной части водоема и α — коэффициент миграции.

Тогда выигрыш игрока на бесконечном периоде времени имеет вид

$$J = \int_0^\infty e^{-\rho t}[u(t)(p - cu(t))]dt, \tag{2}$$

где c — затраты на вылов и p — рыночная цена биоресурсов.

Мы исследуем следующий функционал, определяющий выигрыш государства:

$$I = \int_0^\infty e^{-\rho t}[m(x_1(t) - \hat{x}_1)^2 + (x_2(t) - \hat{x}_2)^2]dt, \tag{3}$$

где $\hat{x}_1$, $\hat{x}_1$ — размеры популяции, оптимальные для воспроизводства, m — штраф за отклонение от состояния $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$. Здесь I — это затраты центра на восстановление популяции.

Нас интересует оптимальное по Нэшу решение поставленной задачи. Для его определения было использовано уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана. Также найдено асимптотическое решение данной задачи. Для определения оптимального решения разработан комплекс программ и проведено численное моделирование.

Литература

[1] Basar T., Olsder G.J. Dynamic noncooperative game theory. Academic Press, New York, 1982, 515 pp.
[2] Mazalov V.V., Rettieva A.N. A fishery game model with migration: reserved territory approach. // Game Theory and Applications, 2004, v. 10, p. 97-108.
[3] Мазалов В.В., Реттиева А.Н. Методы динамических игр в задаче определения оптимальной заповедной зоны. // Обозрение прикладной и промышленной математики, 2005, т. 12, вып. 3, с. 610-625.
[4] Мазалов В.В., Реттиева А.Н. Равновесие по Нэшу в задачах охраны окружающей среды // Математическое моделирование, 2006, том 18, № 5, с.73-90.

Bioresource Management Problem with Changing Area for Fishery

Mazalov V.V., Rettieva A.N.

Institute of Applied Mathematical Research KRC RAS, Karelia, Petrozavodsk, Russia

The model of bioresource management problem is developed, taking into account migratory exchange between the two parts of the reservoir with infinite planning horizon. Hamilton-Jacobi-Bellman equation was applied to determine the Nash equilibrium. Also steady state solutions were found. The complex of programs for finding the optimal decision was developed and the numerical modelling was carried out.

References

[1] Basar T., Olsder G.J. Dynamic noncooperative game theory. Academic Press, New York, 1982, 515 pp.
[2] Mazalov V.V., Rettieva A.N. A fishery game model with migration: reserved territory approach. // Game Theory and Applications, 2004, v. 10, p. 97-108.
[3] Mazalov V.V., Rettieva A.N. Dynamic games methods in the problem of determine optimal reserved therritory. // Survey in Applied and Industrial Mathematics, 2005, v. 12, no. 3, p. 610-625, (in Russian).
[4] Mazalov V.V., Rettieva A.N. Nash equlibrium in bioresource management problem.// Mathematical modelling, 2006, v. 18, no. 5, p.73-90, (in Russian).

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ КОНКУРЕНТНЫЕ МОДЕЛИ АУКЦИОНОВ С МНОГОАГЕНТНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

Малафеев О.А., Грицай К.Н.

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

В работе рассмотрены математические конкурентные модели аукционов с многоагентным взаимодействием, моделирующие экономические конфликтные процессы купли-продажи аукционного типа. Впервые изучение конкурентных математических моделей аукционов начал В. Викри в 1961 году.

В данной работе построены и исследованы модели аукционов со многими продавцами типа, указанного в заглавии. Формализуются динамические модели аукционов с конечным числом покупателей и конечным числом продавцов.

При построении моделей аукциона со многими продавцами используются закрытые аукционы первой и второй цены. При этом конечное число продавцов одновременно и независимо друг от друга и от покупателей выставляют на торги каждый свой лот, имея его оценку и указывая цену, а конечное число покупателей одновременно и независимо друг от друга и от продавцов называют свои цены по каждому выставляемому на торги лоту, имея по ним свои оценки. После этого арбитр определяет выигравших покупателей и продавших товар продавцов. В соответствии с правилами аукциона, которые подробно описываются в работе, предполагается, что число продавцов не превышает числа покупателей и каждому участнику аукциона известны функции выигрыша всех агентов. Лот получает покупатель, назвавший максимальную цену за этот лот. В случае, если на один лот претендует несколько покупателей с одинаковой ценой, между ними разыгрывается аукцион с одним продавцом. На втором шаге процесс повторяется с меньшим количеством продавцов и покупателей (удаляются продавцы, реализовавшие лоты, и купившие их покупатели). Процесс заканчивается после того, как все продавцы продадут свои лоты.

С помощью численных методов найдены равновесия Курно-Нэша и компромиссные решения при различных параметрах моделей. Выведены формулы числа шагов аукционов в зависимости от параметров, исследована асимптотика числа шагов при увеличении числа агентов.

Работа поддержана грантом РФФИ № 06-06-80509.

Литература

[1] Paul R. Milgrom, Robert J. Weber, Econometrica, vol. 50, issue 5 (sep., 1982), 1089–1123.
[2] Малафеев О.А. Управляемые конфликтные системы. СПб: Издательство СПбГУ, 2000.
[3] Петросян Л.А., Зенкевич Н.А. Теория игр. М.: Высш. шк., 1998. 304 с.
[4] О.А. Малафеев, А.Ф. Зубова, Математическое и компьютерное моделирование социально-экономических систем на уровне многоагентного взаимодействия (введение в проблемы равновесия, устойчивости и надежности). СПб: Издательство СПбГУ, 2006. 1006 с.

Mathematical competetive models of auctions with many-agent interaction

Malafeyev O.A., Gritsay K.N.

Saint Petersburg State University, Russia

Mathematical competitive auctions models with many-agent interaction are considered, which model economical buy-sell conflict processes of auctions type. Auctions with many sellers are constructed and studied. Dynamical sealed-bid auctions with finite number of sellers and buyers are formalized. Cournot-Nash equilibrium points and compromise solutions are found by means of numerical methods.

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ КОНКУРЕНТНАЯ МОДЕЛЬ АКЦИОНИРОВАННОЙ ФИРМЫ

Малафеев О.А., Константинов А.М.

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

В работе рассматривается нелинейная конкурентная динамическая модель фирмы F, владельцы которой — акционеры составляют конечное множество $N = \{1, 2, \ldots, n\} = \{i\}_1^n$ В начальный момент времени $t_0 = 0$ акционеры вкладывают в неё свои капиталы K_i^0, $i \in N$, $\sum_{i=1}^n K_i^0 = K^0$. Фирма функционирует на конечном промежутке времени и в каждый момент t выпускает однородную продукцию в объёме $Q(t) = q(K)K(t)$ (где $q(K)$ — производительность капитала), которую в дальнейшем реализует на рынке по изменяющимся ценам $p(t)$. Таким образом доход от реализации продукции на рынке в момент времени t равен $Q(t)p(t) = P(t)$. Доход, полученный от продажи товара, идёт на инвестиции $I(t)$ и дивиденды $D(t)$, которые распределяются между акционерами в пропорции начальных капиталов. Инвестиции в свою очередь расходуются на увеличение капитала фирмы, измеряемое скоростью изменения капитала $\dot{K} = dK(t)/dt$, и на амортизацию пропорциональную объёму текущего капитала, измеряемое нормой амортизации α. Отсюда получаем уравнение динамики изменения капитала:

$$\dot{K}(t) = K(t)(q(K)p(t) - \alpha) - D(t), \;\; K(0) = K^0 = \sum_{i=1}^n K_i^0.$$

Рассматривается дискретная аппроксимация модели. При этом осуществляется разбиение временного промежутка на конечное число интервалов $\sigma = \{[t_0, t_1], (t_1, t_2], \ldots, (t_{m-1}, t_m]\}$, где $t_0 = 0$, $t_m = T$ Отсюда:

$$K_i = K_{i-1} + [K(t)(q(K)p(t) - \alpha) - D(t)], \;\; K(0) = K^0 = \sum_{i=1}^n K_i^0.$$

Допустимым управлением в модели назовём кусочно-постоянную функцию $D(t)$, $t \in [0, T]$, удовлетворяющую следующему неравенству: $0 \le D(t) \le D^{\max}$, где $D^{\max} > 0$ — наперед заданное число. Обозначим множество допустимых управлений i-го агента U_i. Доходом акционера в модели является дисконтированная сумма дивидендов, выплачиваемых данному акционеру, и часть вырученной суммы, полученной от продажи фирмы в конечный момент времени.

$$H_i(D(\cdot)) = \sum_{j=1}^m e^{-c(t_j - t_{j-1})} a_i \ln(D_i^j + 1) + k_i e^{-cT} K(T),$$

где $c > 0$ — коэффициент дисконтирования, a_i — коэффициент полезности. Численными методами найдены равновесные решения Курно-Нэша и компромиссное решение при различных значениях параметров.

Работа поддержана грантом РФФИ № 06-06-80509.

Литература

[1] Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: Прогресс, 1975. 607с.
[2] Красовский Н.Н. Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 520с.
[3] Малафеев О.А. Управляемые конфликтные процессы. Изд-во СПбГУ, 2000. 277с.
[4] Малафеев О.А., Зубова А.Ф. Математическое и компьютерное моделирование социально-экономических систем. Санкт-Петербург, 2006. 1006с.

Nonlinear Competitive Dynamical Model of Joint-Stock Company

Malafeyev O.A., Konstantinov A.M.

Saint Petersburg State University, Russia

A nonlinear competitive dynamical model of a joint-stock company is constructed. Finite number of stockholders input their capitals in an initial time moment. Company is operated over a finite time interval and at every moment outputs homogeneous goods, and then sells them for changing it time prices. Profit functions of the stockholders are different. So we get a nonlinear competitive process, for which Cournot-Nash and compromise solutions are found by means of numerical methods.

МНОГОАГЕНТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ В ДИНАМИЧЕСКИХ СЕТЯХ С НЕЛИНЕЙНЫМ УСИЛЕНИЕМ

Малафеев О.А., Парфенов А.П.

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

Рассматривается многошаговый процесс инвестирования проектов группой инвесторов — акционеров, интересы каждого из которых определяются его собственной функцией полезности. Система потенциально осуществимых инвестиционных проектов задается посредством специализированного графа — сети с функцией пропускной способности, отражающей ограничения на инвестиционные возможности данной группы инвесторов, диктуемые производственными, временными и некоторыми другими факторами. Доходы, получаемые от реализации инвестиционных проектов, определяются посредством коэффициентов усиления, задаваемых либо на ребрах, либо в узлах сети. Каждый поток в сети такого рода определяет осуществление совокупности инвестиционных проектов, задающих значение полезности каждого инвестора. Принятие в данной модели какого-либо принципа оптимальности конкурентного или кооперативного типа диктует инвесторам соответствующий характер многоагентного взаимодействия. В работе решен ряд иллюстративных примеров, в частности найдены компромиссные и равновесные решения для моделей с небольшим числом задающих их параметров, построены и численно реализованы соответствующие алгоритмы.

Кроме того построена и исследована нелинейная динамическая модель многоагентного сетевого взаимодействия, в которой параметры вышеописанного процесса изменяются в рамках многоэтапной эволюции всей системы. Здесь также решен ряд конкретных примеров и найдены с помощью численных методов модифицированные равновесные решения Курно-Нэша, компромиссные, лексикографические, различным образом свернутые эффективные решения.

Работа поддержана грантом РФФИ № 06-06-80509

Литература

[1] Кристофидес Н. Теория графов., М., Мир, 1978, 431 с.
[2] Малафеев О.А. Управляемые конфликтные системы. СПб: Издательство СПбГУ, 2000., 277 с.
[3] Петросян Л.А., Зенкевич Н.А. Теория игр. М.: Высш. шк., 1998. 304 с.
[4] О.А. Малафеев, А.Ф. Зубова. Математическое и компьютерное моделирование социально-экономических систем на уровне многоагентного взаимодействия (введение в проблемы равновесия, устойчивости и надежности). СПб: Издательство СПбГУ, 2006. 1006 с.

Many-Agent Interaction in Dynamical Networks with Non-Linear Gains

Malafeyev O.A., Parfenov A.P.

Saint Petersburg State University, Russia

A non-linear dynamical model of many-agent interaction in networks is constructed and studied. Parameters of the model are changed with time which is discrete. Compromise points, modified Cournot-Nash solutions, lexicographic solutions, convolved Pareto solutions of the model are considered. Algorithms to find solutions are given and by means of numerical methods a number of examples are solved.

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОГО УПРАВЛЕНИЯ И ИДЕМПОТЕНТНЫЙ АНАЛИЗ

Малафеев О.А., Радченко А.Ю.

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

Исследуются многокритериальные задачи нелинейного управления, которые формализуются в терминах идемпотентного анализа такие как, например, динамическая задача обслуживания системы состоящей из последовательности серверов и буфера, ассоциированного с первым сервером. Каждый клиент должен быть обслужен всеми серверами в определенной последовательности: Ограниченное количество клиентов прибывает в буфер системы обслуживания одновременно, и каждый ожидает своей очереди на обслуживание. Прибывая в систему обслуживания, клиенты попадают в буфер и ожидают своей очереди. Для того чтобы обслужить клиента, каждому серверу необходимо свое определенное количество тактов времени. Заданы моменты времени прибытия клиента. Если буфер пуст и данный сервер свободен, клиент сразу будет обслужен этим сервером. Если некоторый сервер уже закончил обслуживание определенного клиента, а следующий все еще занят с предыдущим, то данный сервер должен ждать. Формализация вышеперечисленных условий позволяет описать модель в терминах идемпотентного анализа. При этом клиент за всякий такт времени ожидания в буфере терпит убыток, причем зависимость убытка нелинейная. Таким образом, сформировалась многокритериальная задача конкурентного типа. Для этой задачи на основе построенного алгоритма в результате численного эксперимента найдено компромиссное решение. Также формализована в рамках идемпотентного анализа и исследована динамическая модель синхронизации многоэтапного производственного процесса, с которым ассоциированы несколько функционалов качества. Приведены численные решения примеров, в которых найдены компромиссные точки для случая трех функционалов качества. В качестве процесса взято производство конечного продукта на технологической линии, состоящей из трех станков, которые последовательно обрабатывают детали трех типов. Рассматриваемая система имеет поточную структуру, то есть все детали проходят обработку в определенной последовательности, и должны быть обработаны на каждом станке не более одного раза. Фиксируется последовательность обработки деталей станками и строится граф, вершины которого соответствуют комбинациям из станков и деталей, а дуги — последовательности операций станков. Дан начальный вектор, элементы которого обозначают такты времени, в которые детали готовы к обработке и станки готовы начать работу. Также имеется выходной вектор той же размерности, компоненты которого обозначают такты времени, в которые детали обработаны и машины закончили работу. Методами идемпотентного анализа вычисляется переходная матрица от начального вектора к конечному, которая определяет скорость работы всей системы. На конечном множестве длин такта времени заданы функционалы качества: функция экспоненциального вида для расхода ресурса в натуральном выражении, например, электричества и газа, функция логарифмического вида для выпуска продукции в натуральном выражении и функционал на матрице скорости работы системы. Решен пример — для конкретных численно заданных функционалов найдено компромиссное решение. Исследован ряд других задач.

Работа поддержана грантом РФФИ № 06-06-80509.

Литература

[1] Малафеев О.А., Зубова А.Ф. Математическое и компьютерное моделирование социально-экономических систем. СПбГУ, СПб, 2006, 1006с.

[2] F. Baccelli et al. Synchronization and Linearity, NY, Elsevier, 1992. 489c.

[3] Маслов В.П., Колокольцов В.Н. Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении, М.Наука, 1994. 142с.

Multicriteria Non-Linear Control Problems and Idempotent Analysis

Malafeyev O.A., Radchenko A.J.

Saint Petersburg State University, Russia

Multicriteria non-linear control many-step processes are considered and formalized in terms of idempotent analysis. Some applied problems are described. Competitive solutions are given by means of numerical methods.

ОБ ОДНОЙ ИГРОВОЙ ЗАДАЧЕ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ, ОПИСЫВАЕМОГО НЕЛИНЕЙНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Маматов М.Ш.

Национальный Университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан

Рассматривается следующая игровая задача преследования, описываемая уравнениями

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = 2\sqrt{Z}\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + f(u,\upsilon)\right), \tag{1}$$

$$Z(x,0) = g(x),\ \ 0 < x < 1\,, \tag{2}$$

$$Z(0,t) = Z(1,t) = 0,\ \ 0 \le t \le T\,, \tag{3}$$

где $(x,t) \in D = \{(x,t) : 0 \le x \le 1, 0 \le t \le T\}$, $u \in P$, $\upsilon \in Q$, P и Q — компакты, $g : (0,1) \to R$ и $f : P \times Q \to R$ — непрерывные функции, u и υ управляющие параметры, u — параметр преследования, υ — параметр убегания.

Игра считается оконченной, если для некоторого $(x_0,t_0) \in D : |z(x_0,t_0) - z_0| \le \varepsilon$, где z_0 и $\varepsilon > 0$ — заранее заданные числа.

Совокупность узлов, образующихся в результате пересечения прямых $x_i = ih$, $i = 1,2,\ldots,n-1$ и $t_k = kl$, $k = 0,1,\ldots,r-1$ представляет собой прямоугольную сетку, которую мы обозначим через $D^{(h)}$. На этой сетке запишем следующие очевидные соотношения

$$\left.\frac{\partial Z}{\partial t}\right|_{(x_i,t_k)} = \frac{Z_{i,k-1} - Z_{i,k}}{l} + O(l), \tag{4}$$

$$\left.\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}\right|_{(x_i,t_k)} = \frac{Z_{i-1,k} - 2Z_{i,k} + Z_{i+1,k}}{h^2} + O(h^2),$$

где для сокращения записи положено $Z(ih,kl) = Z(x_i,t_k) = Z_{i,k}$. Выражение $O(y^\alpha)$, $\alpha > 0$ означает величину, для которой $\lim\limits_{y\to 0} \frac{O(y^\alpha)}{y^\alpha} = C$, где C — некоторая постоянная. Возьмем теперь уравнение (1) в каком-либо узле $(x_i,t_k) \in D(h)$ и подставим туда соотношения (4). Получим

$$\frac{Z_{i,k+1} - Z_{i,k}}{l} = 2\sqrt{Z_{i,k}}\left(\frac{Z_{i-1,k} - 2Z_{i,k} + Z_{i+1,k}}{h^2} + f(u_{i,k},\upsilon_{i,k})\right) + O(l + h^2)\,. \tag{5}$$

Отбрасывая в (5) малую величину $O(l + h^2)$, которую в дальнейшем будем называть погрешностью аппроксимации, и принимая во внимание начальные и граничные условия (2), (3), напишем следующую сеточную игровую задачу

$$\frac{z_{i,k+1} - z_{i,k}}{l} = 2\sqrt{z_{i,k}}\left(\frac{z_{i-1,k} - 2z_{i,k} + z_{i+1,k}}{h^2} + f(u_{i,k},\upsilon_{i,k})\right), \tag{6}$$

i = 1,2, ...,n - 1; k = 0,1, ...,r - 1;

$$z_{i,0} = g(ih),\ \ i = 1,2,\ldots,n-1, \tag{7}$$

$$z_{0,k} = z_{n,k} = 0,\ \ k = 0,1,\ldots,r. \tag{8}$$

Получены достаточные условия для возможности завершения преследования в игре (1)-(3) с помощью сеточных игровых задач (6)-(8).

On a Game Problem of Pursuing Described by Nonlinear Partial Differential Equations

Mamatov M.Sh.

The National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan

The work is devoted to studying a problem of pursuing controlled by the nonlinear partial differential equations. Sufficient conditions for the possibility of pursuing termination with the help of net game problems are obtained.

МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ДЛЯ ОТЫСКАНИЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНЫХ КООПЕРАТИВНИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР

Марковкин М.В.

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

Для построения характеристической функции линейно-квадратичных кооперативных дифференциальных игр возникает необходимость решения матричного уравнения аналогичного матричному уравнению Рикатти [1,2,3]. Основной проблемой решения этого уравнения является неопределенность начальных данных. В данной работе представлен метод последовательных приближений, позволяющий обойти эту проблему при дополнительных ограничениях, которые заключаются в том, что подынтегральные функции функционалов выигрыша всех игроков являются положительно (отрицательно) определенными. При использовании этого метода можно находить значение характеристической функции с любой наперед заданной точностью.

Система дифференциальных уравнений, описывающая динамику развития процесса, является линейной. Предполагается бесконечное время окончания игры. При замыкании системы дифференциальных уравнений, описывающую динамику развития процесса, допустимым набором управлений набором управлений, система становится экспоненциально устойчивой.

Характеристическая функция определяется как наилучший ответ коалиции на действия антикоалиции при условии, что игроки, составляющие антиколицию, используют в качестве своих стратегий управления, которые входят в набор управлений, являющийся равновесием по Нэшу.

Литература

[1] Марковкин М.В. «Проверка условия Д. Янга для линейно-квадратичных дифференциальных игр» // Труды международного семинара «Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби», Екатеринбург, Изд-во Уральского университета, 2006, стр. 242–248.

[2] Марковкин М.В. «Условие Д.В.К. Янга для линейно-квадратичных дифференциальных игр» // Сборник трудов международной конференции «Устойчивость и процессы управления», Санкт-Петербург, 2005, СПбГУ, НИИ ВМ и ПУ, Т.1, стр. 563–571.

[3] Марковкин М.В. «О линейно-квадратичных неантагонистических дифференциальных играх» // Труды XXXIV научной конференции аспирантов и студентов «Процессы управления и устойчивость». Издательство Санкт-Петербургского университета, 2003. С. 547–551.

An Iterative Method for Deducing a Characteristic Function of Linear-Quadratic Cooperative Differential Games

Markovkin M.V.

Saint Petersburg State University, Russia

A successive approximation method is proposed, allowing for the prediction of a characteristic function of linear-quadratic cooperative differential games with any accuracy.

СВОЙСТВО СУПЕРАДДИТИВНОСТИ ДЛЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ОСОБОГО ВИДА

Мельников В.В.

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

При построении теоретико-игровой модели кооперативного поведения используется подход, который можно условно разбить на несколько этапов.
1. Для каждого игрока определяется функция затрат как функция нескольких переменных: $J_i(x_1, \dots, x_n)$, где x_i — стратегия i-го игрока ($i = 1, \dots, n$).
2. Вводится коалиция игроков S как произвольное подмножество множества всех игроков N, и формируется характеристическая функция игры: $V(S) = \min\limits_{i \in S} \max\limits_{i \in N \setminus S} \sum\limits_{i \in S} J_i$.
3. Для построенной характеристической функции проверяется выполнение свойства супераддитивности $V(S) + V(T) \geq V(S \cup T)$, которое можно интерпретировать как потенциальную возможность объединения игроков в большую коалицию N.
4. В соответствии с выбранным игроками принципом оптимальности строится решение игры.

При таком подходе построение характеристической функции $V(S)$ основано на предположении о возможности выбора игроками из коалиции $N \setminus S$ таких стратегий, которые в наибольшей степени увеличивают затраты игроков из коалиции S. Но это предположение может натолкнуть на возражение о нерациональности таких действий, так как они влекут за собой ущерб собственным интересам игроков из множества $N \setminus S$. Для устранения подобного противоречия можно использовать другой подход, который учитывает рациональность действия игроков, даже если они не являются членами коалиции S или просто не участвуют в процессе кооперации.

Пусть $\overline{x}_i$ — стратегия игрока i, которая является рациональной (приемлемой) для этого игрока в том случае, если он не вступает в коалицию с другими участниками. Тогда коалиция S может гарантировать себе при отклонении ее членами от отмеченной стратегии следующий уровень затрат: $V^*(S) = \min\limits_{i \in S} \sum\limits_{i \in S} J_i(x_{i \in S}, \overline{x}_{i \in N \setminus S})$. Мы предлагаем в качестве характеристической функции использовать $V^*(S)$.

Для того чтобы использовать стандартные способы построения решения в такой игре, нужно проверить свойство супераддитивности для данной характеристической функции. К сожалению, оно не всегда выполняется.

Поэтому рассмотрим более узкий класс задач, в которых характеристическую функцию $V^*(S)$ можно представить в виде суммы: $V^*(S) = \min\limits_{i \in S} \sum\limits_{i \in S} F_i(x_{i \in S}) + \sum\limits_{j \in N \setminus S} G_j(\overline{x}_{i \in N \setminus S})$. В таком классе характеристических функций появляется возможность доказательства условия супераддитивности для частных видов функций $F_i(x_{i \in S})$ и $G_j(\overline{x}_{i \in N \setminus S})$. При этом формулируются строгое и слабое условия супераддитивности. Появляется возможность вычисления числовых характеристик, отражающих влияние игроков на формирование коалиции. И так как эти характеристики индивидуальны для игроков и коалиций, с которыми они будут объединяться, то появляется возможность классифицировать игроков по степени их значимости для коалиций, а также можно увидеть весь путь формирования коалиции и проследить последовательность присоединения к ней игроков.

Superadditivity for Special Classes of Characteristic Functions

Melnikov V.V.

Saint Petersburg State University, Russia

In cooperative game theory we regard the characteristic function $V(S)$ as a function defined on various coalitions S which gives a security level for these coalition including those consisting of a single player and the grand coalition N.

We use new approach for definition of characteristic function in which the actions of players are rational, even if they are not entered into coalition S (see Petrosjan L.A. and G. Zaccour “Time-consist Shapley value allocation of pollution cost reduction”, 1999).

МОДЕЛИ СОГЛАСОВАНИЯ КОЛЛЕКТИВНЫХ ТРЕБОВАНИЙ

Наумова Н.И.

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

Рассматривается задача распределения фиксированного бесконечно-делимого ресурса между несколькими участниками, когда каждое подмножество S множества участников (коалиция) выдвигает свое требование $v(S)$ на количество ресурса. Ее можно трактовать как задачу целевого программирования, где целевая точка — набор требований коалиций (неаддитивная функция множеств), а допустимое множество — множество всех аддитивных функций множеств с фиксированным значением на множестве всех участников N.

Рассматривается итеративный процесс модификации требований коалиций. Для каждой коалиции S задается ее функция полезности g_S. На каждом шаге переоценка требований производится только элементами одного разбиения множества участников так, чтобы сумма их требований была равна общему количеству ресурса и приращения их полезностей были одинаковы. (Для логарифмических функций полезности это соответствует пропорциональной переоценке требований элементами разбиения.) Если все возможные разбиения появляются в этом процессе циклически, то набор требований всех коалиций сходится к аддитивной функции множеств, порождающий вектор, являющийся единственным решением задачи

$$\min_{x \in X^n:\, x(N)=v(N)} \sum_{S:\, S \subset N} \int_{v(S)}^{x(S)} (g_S(t) - g_S(v(S)))dt,$$

где $x(S) = \sum_{i \in S} x_i$, $X = R^1$ или $X = (0, +\infty)$.

В случае пропорциональной переоценки положительных требований получаем задачу максимизации взвешенной энтропии

$$\max_{x \in R^n:\, x_i > 0, x(N)=v(N)} \sum_{S:\, S \subset N} x(S) \ln(v(S)/x(S)).$$

Дополнительные свойства решений позволяют их описать. Равноправие участников и требование, чтобы участник, дающий одинаковое приращение требований для всех коалиций, его и получил, приводят к известному Вектору Шепли кооперативной игры, порождаемой требованиями коалиций, а равноправие коалиций и положительная однородность решения дают решение задачи максимизации взвешенной энтропии.

При заданных функциях полезности коалиций описанные решения можно также получить аксиоматически. При этом основная аксиома — ассоциированная согласованность, требующая сохранения решения при переоценке требований элементами разбиения, дающей им одинаковые приращения полезностей.

Работа была поддержана грантами РФФИ 05-01-89005-НВО_а и NWO 047.017.017.

Литература

[1] L.M. Bregman and N.I. Naumova. Lecture Notes in Econ. and Math. Systems, 510 (2002), 495-514.
[2] N.I. Naumova, Game Theory and Applications, v.13, Nova Science Publishers, New York.
[3] Л.М.Брэгман, ЖВМ иМФ 7(1967), 620-631.
[4] Л.М.Брэгман и И.В.Романовский, В сб. Исследование операций и статистическое моделирование, вып.3, издат. ЛГУ, Ленинград, 1975, 137-162.

Models of Concordance of Collective Requests

Naumova N.I.

Saint Petersburg State University, Russia

For a cooperative game, the worth of a coalition is treated as its request in a bargaining process. For given utility functions of coalitions, we consider an iterative process of modification of coalition requests. At each step, a considered partition of the set of agents overestimates the requests of its members. The sum of new requests is equal to the value of the grand coalition and all members of the partition have equal increments of their utility functions. If all partitions appear in the process cyclicly, then the sequence of characteristic functions converges to an additive set function that provides the allocation result. This allocation is a unique solution of a special minimization problem. The anonymity assumption and the "dummy" property give the Shapley value. The positive homogeneity assumption leads to proportional overestimations, then the allocation is the weighted entropy solution.

КООПЕРАТИВНАЯ СТОХАСТИЧЕСКАЯ ИГРА С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ ИГРОВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Парилина Е.М.

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

Впервые стохастические игры были рассмотрены Шепли [1]. В работах [2,3,4] даны определения кооперативной стохастической игры, решения и дележа кооперативной стохастической игры, кооперативной процедуры распределения дележа, а также получены условия для проверки на позиционную состоятельность решения, выбранного игроками. Поиск кооперативных решений в стохастических играх является актуальной проблемой, поскольку с помощью стохастических игр можно адекватно моделировать конфликтные ситуации в области менеджмента, экономике, страховании.

Стохастической игрой с конечным числом игровых элементов называется набор

$$\overline{G} = \left\langle N, \{\Gamma^j\}_{j=1}^t, q, \pi, \{p(i,j,x^i)\}_{i=\overline{1,t},\, j=\overline{1,t},\, x^i \in \prod\limits_{k=1}^{n} X_k^i} \right\rangle,$$

где N — множество игроков, $\{\Gamma^1, \dots, \Gamma^t\}$ — конечное множество игровых элементов (одновременных игр), $p(i,j,x^i)$ — вероятность перехода из игрового элемента Γ^i в игровой элемент Γ^j при условии реализации в игре Γ^i ситуации x^i $(p(i,j;x^j) \geq 0,\ \sum\limits_{j=1}^{t} p(i,j;x^j) = 1)$, π — вектор начального распределения вероятностей на множестве игровых элементов, q — вероятность окончания игры на каждом шаге.

Рассматривается кооперативный вариант $\overline{\overline{G}}$ стохастической игры, для этого определяется характеристическая функция $V(S)$ как максимин суммы математических ожиданий выигрышей игроков, входящих в коалицию S. Строится кооперативная процедура распределения дележа. Дается определение позиционной состоятельности решения, получено условие для построения кооперативной процедуры распределения дележа, которая, фактически представляет собой выплаты игрокам в игровых элементах, реализовавшихся в игровом процессе.

Литература

[1] Shapley L. S. "Stochastic Games" // Proceedings of National Academy of Sciences of the USA, 1953, vol. 39, pp. 1095-1100.

[2] Петросян Л.А., Баранова Е.М., Шевкопляс Е.В. «Многошаговые кооперативные игры со случайной продолжительностью» // Сборник статей «Оптимальное управление и дифференциальные игры» в трудах института математики и механики. Екатеринбург: УрО РАН. 2004. Том 10, №2, стр. 116-130.

[3] E.M. Baranova, L.A. Petrosyan "Cooperative Stochastic Games in Stationary Strategies" // "Game Theory and Applications", Nova Science Publishers, April 2006, vol. 11, pp. 7-17.

[4] Petrosjan L.A. "Cooperative Stochastic Games" // Advances in Dynamic Games, Annals of the International Society of Dynamic Games, Application to Economics, Engineering and Environmental Management, ed. by A. Haurie, S. Muto, L.A. Petrosjan, T.E.S. Raghavan, 2006, pp. 139-146.

Cooperative Stochastic Game with Finite Number of Game Elements

Parilina E.M.

Saint Petersburg State University, Russia

The search of cooperative solutions in stochastic games is an actual problem because conflict situations in management, economy, insurance can be appropriately modeled with the help of stochastic games. This work is devoted to the definition of a cooperative stochastic game, its solution, imputation and cooperative payoff distribution procedure. The equation for the construction of the cooperative payoff distribution procedure is derived. The cooperative payoff distribution procedure represents the real payments to the players in the game elements realized in the game process.

КООПЕРАТИВНЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИГРЫ

Петросян Л.А.

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

Уравнения движения имеют вид

$$dx(s) = f[s, x(s), u_1(s), \dots, u_n(s)]ds + \sigma[s, x(s)]dz(s), \tag{1}$$

$$x(t_0) = x_0,$$

где $u_i(s)$ — управление игрока $i \in \{1, \dots, n\}$, и функция выигрыша игрока i полагается равной

$$E_{t_0}\left\{\int\limits_{t_0}^{T} g^i[s, x(s), u_1(s), \dots, u_n(s)] \exp\left[-\int\limits_{t_0}^{s} r(y)dy\right] ds + \right.$$

$$\left. + \exp\left[-\int\limits_{t_0}^{T} r(y)dy\right] g^i(x(T))\right\}. \tag{2}$$

Здесь E_{t_0} — оператор математического ожидания в момент $t = t_0$, $z(s)$ — Винеровский процесс, x_0 — начальное состояние.

Обозначим через $\Gamma_c(x_0, T - t_0)$ кооперативную игру, построенную на базе уравнений (1) и выигрышей (2). Соглашение о кооперации включает совместный выбор стратегий и правило дележа общего выигрыша.

В классической кооперативной теории предполагается, что игроки выбирают стратегии из условия максимизации суммарного выигрыша, т.е.

$$\max_{u_1, \dots, u_n} \sum_{i=1}^{n} \left\{\int\limits_{t_0}^{T} g^i[s, x(s), u_1(s), \dots, u_n(s)] \exp\left[-\int\limits_{t_0}^{s} r(y)dy\right] ds + \right.$$

$$\left. + \exp\left[-\int\limits_{t_0}^{T} r(y)dy\right] g^i(x(T))\right\}.$$

Обозначим через $\lfloor \psi_1^{t_0 *}(t, x), \dots, \psi_n^{t_0 *}(t, x) \rfloor$, $t \in [t_0, T]$ соответствующие стратегии, максимизирующие сумму выигрышей игроков. Тогда кооперативная траектория будет решением следующего стохастического дифференциального уравнения

$$dx(s) = f\lfloor s, x(s), \psi_1^{t_0 *}(t, x), \dots, \psi_n^{t_0 *}(t, x) \rfloor ds + \sigma[s, x(s)]dz(s).$$

Обозначим через X_t^* множество возможных значений $x^*(t)$ в момент t.

Важнейшим условием кооперации является сохранение принципов кооперации в подыграх $\Gamma_c(x, T - t)$ для всех $x \in X_t^*$. Это есть позиционная состоятельность принципов кооперации. К сожалению, использование классических подходов не обеспечивает выполнения этого важного условия. Нами предложен метод регуляризации оптимальных решений, приводящий к позиционно состоятельным принципам кооперации.

Литература

[1] D.W.K. Yeung, L.A. Petrosyan. "Cooperative Stochastic Differential Games", Springer, 2006. 241 pp.

Cooperative Stochastic Differential Games

Petrosyan L.A.

Saint Petersburg State University, Russia

The subject of the presentation is the theory and application of cooperative stochastic differential games. It is shown that in the presence of stochastic elements a very stringent condition is required — subgame consistency.

СТРАТЕГИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ КОАЛИЦИОННЫХ РЕШЕНИЙ

Петросян Л.А., Мамкина С.И.

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

Рассматриваются многошаговые игры с полной информацией и переменным коалиционным разбиением. Под решением такой игры понимается PMS вектор, введенный ранее в работах [1,2]. Показано, что при использовании процедуры регуляризации можно обеспечить, с одной стороны, позиционную состоятельность решения, а с другой — его стратегическую устойчивость. С этой целью вводится понятие усеченной подыгры и определяется понятие индивидуальной секвенциальной рациональности решения. Дается определение квазипоследовательного равновесия и показывается, что PMS вектор реализуется в некоторой ситуации квазипоследовательного равновесия в регуляризованной игре с переменным коалиционным разбиением. Далее определяется кореллированное квазипоследовательное равновесие и показано, что компоненты PMS вектора представляют собой выигрыши в специальным образом построеном корелированном квазипоследовательном равновесии.

Литература

[1] Петросян Л.А., Мамкина С.И. Игры с переменным коалиционным разбиением. Вестник СпбГУ, 2004, Сер.1, Вып. 3, С.60-69.

[2] Petrosjan L., Mamkina S, Dynamic Games with Coalitional Structure. Game theory review. Vol.8, Num.2, June 2006, p.295-307.

Stability of Solution in Cooperation Games

Petrosyan L.A., Mamkina S.I.

Saint Petersburg State University, Russia

Games with perfect information and changeable coalitional structure are considered. The stability of solutions of these games is proved.

ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫЙ ЭКСЦЕСС ДЛЯ ИГР С НЕТРАНСФЕРАБЕЛЬНЫМИ ПОЛЕЗНОСТЯМИ И СВЯЗАННЫЕ С НИМ РЕШЕНИЯ

Печерский С.Л.

Санкт-Петербургский экономико-математический институт РАН, Россия

Важным принципом распределения прибыли между участниками совместного предприятия, берущим свое начало от Аристотеля, является пропорциональный принцип, согласно которому участники получают выигрыши, пропорциональные своим вкладам (если все вклады и выигрыши положительны). Для классических кооперативных игр пропорциональное решение опирается на пропорциональный эксцесс, определяемый для положительных кооперативных игр u, коалиции S и распределения x как $u(S)/x(S)$. В случае игр с нетрансферабельными полезностями (НТП игр) возникает проблема, связанная с отсутствием столь же естественного пропорционального эксцесса.

Такой эксцесс был определен и аксиоматически охарактеризован в работе [1]. С его помощью для НТП игр были определены и исследованы n-ядро и пред-n-ядро, обладающие, как оказалось, целым рядом хороших свойств, включая прозрачную геометрическую интерпретацию. В частности, n-ядро (и пред-n-ядро) в специальном случае арбитражных схем с безуровневыми множествами допустимых альтернатив определяет «sq-пропорциональное решение», которое каждой арбитражной схеме (q, Q) ставит в соответствие оптимальную по Парето точку множества Q, пропорциональную точке *status quo* q. Это решение может быть аксиоматически охарактеризовано следующим образом.

Теорема 1. sq-пропорциональное решение является единственным решением, удовлетворяющим аксиомам оптимальности по Парето, ковариантности относительно шкал, анонимности и сильной монотонности.

SQ-пропорциональное решение можно распространить на НТП игры, используя понятие конфигурации выигрышей. Под конфигурацией выигрышей понимается семейство $\{x^{(S)}\}$, $S \in 2^N \backslash \{\varnothing\}$ где N — множество игроков. Построение соответствующей конфигурации выигрышей можно интерпретировать как следующий $|N|$-шаговый процесс.

На первом шаге определяется «первоначальная точка *status quo*», которой соответствуют максимальные полезности, которые игроки могут обеспечить себе самостоятельно. На втором шаге для любых пар игроков $i, j \in N$ определяется sq-пропорциональное решение соответствующей арбитражной схемы с множеством допустимых альтернатив $V(\{i, j\})$. Далее для каждой коалиции S мы определяем sq-пропорциональное решение арбитражной схемы с множеством допустимых альтернатив $V(S)$ и точкой *status quo*, определяемой покоординатными максимумами sq-пропорциональных решений арбитражных схем с множествами игроков, являющимися подмножествами S. Получаемая таким образом конфигурация выигрышей называется конфигурационно пропорциональным решением игры V, а вектор $x^{(N)}$ — конфигурационно пропорциональным значением игры V. Так определенное решение обладает свойствами тотальности, положительной однородности и конфигурационной рациональности.

Теорема 2. Конфигурационно пропорциональное решение является единственным решением в конфигурациях на, удовлетворяющим аксиомам тотальности, положительной однородности и конфигурационной рациональности.

Литература

[1] Печерский С.Л. Функции эксцесса для кооперативных игр без побочных платежей: аксиоматический подход. // В кн. Экономико-математические исследования: математические модели и информационные технологии, СПб: Наука. 2000.

Proportional excess for NTU games and related solutions

Pecherskii S.L.

Saint Petersburg Institute for Economics and Mathematics, RAS, Russia

Status quo proportional solution for bargaining games and its extension for NTU games is defined and axiomatically characterized.

О ПОНЯТИЯХ УСТОЙЧИВОСТИ И НЕУСТОЙЧИВОСТИ В ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКЕ

Прасолов А.В.

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

В докладе рассматриваются понятия устойчивости и неустойчивости по Ляпунову применительно к задачам экономической динамики. Уточняются некоторые понятия, и на примерах различных явлений в экономике показывается необходимость уделять большее внимание неустойчивости. Исключая задачи стабилизации, т.е. управляемых процессов, неустойчивость характерна большинству динамических процессов. Обсуждаются эффекты нелинейности, нестационарности, диссипативности и наличия запаздывающего аргумента в динамических моделях. В качестве объектов моделирования отмечаются макродинамические процессы, конкурирующие экономические агенты при ограничениях на производственные факторы, ресурсы и объемы рынка, взаимодействие отраслей экономики с учетом временных лагов.

Приводятся обратимые теоремы Ляпунова о неустойчивости систем с последействием, полученные автором. Описываются модели Лотки-Вольтерры с запаздыванием применительно к биологическим сообществам и экономическим агентам.

Утверждается, что в большинстве случаев динамика адекватно может быть представлена несколькими неустойчивыми положениями равновесия в фазовом пространстве и явлениями диссипации на больших удалениях от равновесных точек. Это сопровождается многочастотными колебаниями вокруг положений равновесия. Но и данное представление усложняется изменением самого фазового пространства с течением времени.

Автор призывает развивать математический аппарат нелинейных динамических систем с последействием, особенно, диссипативных, в направлении развития инструментов прогнозирования. Изучение только качественных свойств различных моделей снижает их ценность конструктивного применения. Определенный интерес представляют оценки автоколебаний с помощью функций и функционалов Ляпунова.

Литература

[1] Прасолов А.В. «Признаки неустойчивости для систем с последействием» – Вестник Ленинградского университета. 1984. № 1. С. 37-42.

[2] Прасолов А.В. Математические модели динамики в экономике. - СПб, изд-во СПбУ экономики и финансов, 2000, 246 стр.

[3] Пу Т. Нелинейная экономическая динамика. - Ижевск, Издательский дом «Удмуртский университет». 2000. - 200 стр.

On Stability and Instability Concepts in Economic Dynamics

Prasolov A.V.

Saint Petersburg State University, Russia

Importance of the instability notion for economic dynamics is discussed.

СТРАТЕГИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ В ДИНАМИЧЕСКОМ КОНФЛИКТЕ С ЧАСТИЧНОЙ КООПЕРАЦИЕЙ

Седаков А.А.

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

При моделировании конфликтных ситуаций основным является предположение относительно поведения сторон. Как правило, рассматриваются две классические с точки зрения теории игр крайние ситуации: индивидуальное поведение каждой из сторон или же их полный сговор. В первом случае изначально считается, что никакой кооперации между участниками быть не может, и все стороны действуют независимо друг от друга. В случае полного сговора изначально считается, что альянс участников конфликта (коалиция) является монополистом, и исход конфликта зависит от принятого альянсом решения.

Немалый интерес представляют также модели, которые являются некоторой комбинацией этих двух крайних ситуаций. В настоящей работе в качестве динамического конфликта рассматривается позиционная игра с коалиционной структурой, полной информацией и терминальными выигрышами [1]. Под коалиционной структурой понимается разбиение всех участников конфликта на непересекающиеся коалиции. В процессе конфликта каждый из его участников перед принятием решения имеет возможность объявить остальным стиль своего поведения на какую-то часть игрового процесса. Индивидуальный участник вправе либо вступить в некоторую так называемую «допустимую» коалицию, либо продолжать действовать индивидуальным образом. Участник коалиции решает либо покинуть ее, став индивидуальным участником, либо присоединиться к другой «допустимой» коалиции, либо же не менять своего решения. В течение процесса участник конфликта может несколько раз пересматривать способ своего поведения, однако, за один «ход» этот способ пересматривается только один раз, и более того, только одним участником. Предполагается, что участник коалиции действует в ее интересах, т.е. стремится максимизировать коалиционный выигрыш — суммарный выигрыш всех ее участников.

Наличие полной информации о конфликте подразумевает следующее: каждому участнику известны сама позиционная игра, полная предыстория и коалиционная структура в любом ее состоянии.

В работе устанавливается факт существования «оптимальной» в определенном смысле коалиционной структуры, а также предлагается метод ее построения. Кроме этого находится значение игры — PMS-вектор [2], являющийся комбинацией классических в теории игр принципов оптимальности: равновесия по Нэшу [3] и вектора Шепли [4].

Литература

[1] Петросян Л.А., Седаков А.А., Сюрин А.Н. Многошаговые игры с коалиционной структурой // Вестник С-Петерб. ун-та., сер. 10, 2006, вып. 4, сс. 97-110.

[2] Петросян Л.А., Мамкина С.И. Игры с переменным коалиционным разбиением // Вестник С-Петерб. ун-та., сер. 1, 2003, вып. 3, сс. 60-69.

[3] Nash J. Non-Cooperative Games // Ann. of Math., 1951, vol. 54, pp. 286-295.

[4] Shapley L.S. A Value for n-Person Games // Contribution to the Theory of Games II, Princeton Univ. Press, 1953, pp. 307-317.

Strategic Behavior in Dynamic Games with Partial Cooperation

Sedakov A.A.

Saint Petersburg State University, Russia

In the paper we consider a multistage game, in which each player has an option to cooperate or not to cooperate before the decision making. Players who choose the cooperative behavior form a coalition. It is supposed that a player can reconsider the decision about the way of behavior he has made: he can either join to some "admissible" coalition or choose the individual behavior. Therefore, the coalitional structure is changing during the game. When the game ends each player gains according to the PMS-value. A method of solving this type of multistage games is proposed.

КОММУНИКАЦИОННОЕ РАВНОВЕСИЕ И РАВНОВЕСИЕ ПО НЭШУ

Строкан П.*, **Матсухиса Т.****

**Санкт-Петербургский государственный университет, Россия,*
***Государственный Колледж Технологий Ибараки, Япония*

В теоретико-игровых моделях нескольких лиц в качестве принципа оптимальности часто используется равновесие по Нэшу. В данной работе рассмотрен коммуникационный процесс, в котором достигается равновесие по Нэшу в смешанных стратегиях.

Предположим, что есть некоторое конечное множество игроков и конечное множество элементарных событий. У каждого игрока есть начальные информационные множества, состоящие из элементарных событий, т.е. каждому элементарному событию ставится в соответствие некое множество элементарных событий, элементы которого игрок не может различать. На множестве игроков задан протокол (правило), по которому происходит процесс взаимодействия. Исходя из своих информационных множеств, игроки могут судить о вероятности возникновения того или иного события. Игра происходит во времени, первый игрок (определяется протоколом) посылает сообщение со своими суждениями о вероятности возникновения событий второму игроку (определяется протоколом). Второй игрок, опираясь на информацию, содержащуюся в сообщении первого игрока, перестраивает своё информационное множество, далее пересматривает свои суждения и посылает сообщение следующему игроку и т.д.

Через некоторое время наступает момент, когда информационные множества игроков перестают изменяться при приёме сообщения, этот момент называется информационным равновесием.

Тематикой данной работы является создание программного обеспечения для моделирования процессов обмена информации между игроками. Была построена компьютерная модель описанного коммуникационного процесса, с помощью которой было рассмотрено несколько примеров и найдены равновесия по Нэшу.

Литература

[1] Aumann, R. J., and Brandenburger, A. (1995): Epistemic equilibrium, Econometrica 63, 1161-1180.
[2] Kalai, E., and Lehrer, E. (1993): Rational learning to mixed Econometrica 61, 1019-1045.
[3] Matsuhisa, T. (2000): Communication leading to mixed Maruyama (eds) Mathematical Economics, Suri-Kaiseki-256.
[4] Matsuhisa, T.: Communication leading to epsilon-mixed paper (2001). The extended abstract was presented in the XIV and Applications (IMGTA XIV), July 11-14, 2001.
[5] Monderer, D., and Samet,, D. (1989): Approximating common beliefs, Games and Economic Behaviors 1, 170-190.
[6] Nash J. F. (1950): Equilibrium points in n-person games, Proceedings of Sciences of the United States of America 36, 48-49.

Communication Equilibrium and Nash Equilibrium

Strokan P.*, **Matsuhisa T.****

**Saint Petersburg State University, Russia,*
***Ibaraki State Technological College, Japan*

This paper relates equilibrium and distributed knowledge. In the communication process each player predicts the other players' actions under his/her private information with probability at least his/her belief. The players communicate privately their conjectures through message according to the communication graph, where each player receiving the message learns and revises his/her conjecture. We build a computer model of described communication process. Several examples are considered by using this result.

УСТОЙЧИВЫЕ КОАЛИЦИОННЫЕ СТРУКТУРЫ В ДИНАМИЧЕСКИХ ИГРАХ С ПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ

Сюрин А.Н.

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

В кооперативных играх зачастую процесс формирования коалиционной структуры остается за рамками рассматриваемой задачи. В реальной жизни игроки испытывают множество ограничений при создании коалиций, они не только присоединяются к существующим коалициям, но и покидают их. На практике мы нередко сталкиваемся с ситуациями нарушения условий сотрудничества, расколы в партийных рядах, конфликты между участниками различных объединений и ассоциаций, которые могут приводить к непредсказуемым последствиям. Все это необходимо учитывать при моделировании конфликтных ситуаций.

В работе [1] рассматривается способ формирования коалиционного разбиения. На первых n шагах игры игроки последовательно выбирают элементы из конечного множества индексов $1, \dots, m$. Множество игроков, выбравших один и тот же индекс $1 \leq k \leq m$, объединяются в одну коалицию S_k [2]. Таким образом, на $n+1$ шаге игры в некоторых позициях x возникает коалиционное разбиение $\Delta(x)$, которое остается неизменным на последующих шагах игры. Даны определения позиционной коалиционной игры с полной информацией, коалиционного равновесия, получен алгоритм построения решения данной игры и установлены свойства коалиционного равновесия.

В настоящей работе предполагается, что игроки, стремясь максимизировать личный выигрыш, в позициях своих множеств очередности, могут покидать коалицию, которая сформировалась на первых n шагах игры. Дается определение устойчивых коалиционных разбиений в многошаговых играх с полной информацией. Исследуется вопрос о нахождении условий существования устойчивости коалиционного разбиения. Выигрыши игроков-участников такой коалиционной структуры определяются как компоненты PMS-вектора [3].

Литература

[1] Петросян Л.А., Седаков А.А., Сюрин А.Н. Многошаговые игры с коалиционной структурой // Вестник С-Петерб. ун-та., сер. 10, 2006, вып. 4, сс. 97-110.
[2] Arnold T., Wooders M. Dynamic club formation with coordination // II Congress of Game Theory Society. Marceille. 2004. 00 p.
[3] Петросян Л.А., Мамкина С.И. Игры с переменным коалиционным разбиением // Вестник С-Петерб. ун-та.,. сер. 1, 2003, вып. 3, сс. 60-69.

Stable Coalitional Structures in Dynamic Games with Perfect Information

Syurin A.N.

Saint Petersburg State University, Russia

Stable coalitional partitions in dynamic games with perfect information are considered. Players form coalitional partitions on the first stages of the game. Thereafter, each player acts in personal interests and can leave the coalition to which he belongs. The methods of constructing the stable coalitional partition are proposed.

ПОЛИГАУССОВЫ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ В СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Чабдаров Ш.М., Каримуллин Э.М.

Академия наук Республики Татарстан, Казань, Россия

Более полувека назад доказательство необходимости и достаточности линейной фильтрации при проверке статистических гипотез о гауссовских случайных процессах привело к проблеме отыскания нелинейной динамической системы, необходимой и достаточной при снятии ограничения гауссовости. Полного решения этой проблемы пока нет. В докладе с использованием полигауссовых моделей и методов синтезируется динамическая система с определенной нелинейностью, достаточная для байесовской оптимальности проверки гипотез о наблюдаемых процессах с произвольно заданными флуктуациями при условии их физической реализуемости. Она имеет структуру многоканального типового радиотехнического звена с экспоненциальными детекторами, а вероятности ошибок проверки гипотез о произвольно заданных при ее синтезе негауссовских процессах, а также при произвольно варьируемых негауссовских воздействиях представимы сколь угодно приближенно линейными комбинациями интегралов вероятности. Последовательность приближенных оценок сходится к точным значениям — линейным комбинациям многократных кубатур от модифицированных логарифмически-гауссовских плотностей вероятности.

Этот актуальный для статистической радиотехники факт — преамбула основного тезиса доклада: феноменологические и теоретико-вероятностные условия и плодотворность для нелинейной статистической динамики вероятностных смесей случайных, преимущественно гауссовских явлений — полигауссовых моделей. По определению выборочное пространство полигауссовского явления суть объединение пространств реализаций всех гауссовских компонент, а его вероятностная мера — взвешенная линейная комбинация гауссовских. Смесь N гауссовских компонент, имеющих по 2 параметра, обладая числом $3N-1$ свободных параметров, обеспечивает в $(1,5N-0,5)$ большие аппроксимационные возможности, чем корреляционная теория. Полигауссовы модели наряду с практически неограниченными ($N \to +\infty$) возможностями описания управляющих и возмущающих воздействий, инвариантны относительно произвольных измеримых по вероятности преобразований реализаций случайных процессов.

Финитное, счетное или континуальное распределение вероятностей в двумерном функциональном пространстве двух низших вероятностных моментов гауссовских мер — средних значений и ковариационных функций — приводит к вероятностным гауссовым спектрам, соответственно дискретным или непрерывным, а также к прямому и обратному преобразованию Гаусса. Гауссовы спектры и преобразования свободны от принципа суперпозиции в пространстве реализаций. При фиксации одного среднего значения или одной ковариационной функции получаем соответственно гауссовы спектры и преобразования по свободному вероятностному моменту. Для случайных величин известны условия существования гауссова спектра средних при фиксированной дисперсии, а также условия финитности гауссова спектра по обеим переменным.

В докладе приводятся условия точных и сколь угодно приближенных полигауссовых представлений случайных процессов, условия устойчивости и примеры выполнения полигауссовых статистического анализа и (или) синтеза линейных и нелинейных систем при произвольно заданных физически реализуемых флуктуациях управляющих и (или) возмущающих воздействий.

Poly-Gauss Models and Methods in the Statistical Theory of Dynamic Systems

Chabdarov Sh.M., Karimullin E.M.

Academy of Science of Republic Tatarstan, Kazan, Russia

In this report, conditions of exact and arbitrarily approximate poly-Gauss representations of random processes are considered. Stability conditions and examples of poly-Gauss statistical analysis are given.

УПРАВЛЕНИЕ С ПОВОДЫРЕМ В ИГРОВОЙ ЗАДАЧЕ СБЛИЖЕНИЯ С m ЦЕЛЕВЫМИ МНОЖЕСТВАМИ

Члингарян А.С.

Ереванский государственный университет, Армения

Управление с поводырем, которое доставляет устойчивое по отношению к информационным помехам решение в случае задачи сближения с одним целевым множеством, рассмотрено в работах Н.Н. Красовского [1].

В данной работе процедура управления с поводырем распространена на случай m целевых множеств [2]. Предполагается, что последовательность встреч с целевыми множествами зафиксирована, а динамика системы постоянная.

Процедура управления с поводырем заключается во введении в рассмотрение вспомогательной системы — поводыря, движущейся по заданному стабильному мосту. Предполагается, что движения управляемой системы и поводыря описываются обыкновенными нелинейными дифференциальными уравнениями. Движения исходной системы и поводыря формируются так, чтобы в процессе игры они взаимно отслеживались, что обеспечивает устойчивость решений относительно информационных помех. Доказывается теорема согласно которой предложенная в работе процедура управления с поводырем доставляет решение задачи сближения, устойчивое по отношению к информационным помехам.

Литература

[1] Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука. 1974. 455 с.
[2] Габриелян М.С., Субботин А. И. Игровые задачи о встрече с m целевыми множествами. //ПММ. 1979. Т. 43. N. 2. С. 204-208.

Control with a Guide in a Gaming Problem of Approaching with m Target Sets

Chlingaryan A.S.

Erevan State University, Armenia

In this work, a procedure of control with a guide is extended to the case of target sets. The sequence of encounters with target sets is assumed to be fixed, system dynamics is constant. Suggested procedure provides a solution of an approach problem, stable with respect to the information noise.

О КООПЕРАЦИИ В УСЛОВИЯХ СЛУЧАЙНОЙ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТИ ИГРЫ

Шевкопляс Е.В.

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

Кооперативные дифференциальные игры являются удобными математическими моделями для описания процессов, происходящих в экономике, экологии, менеджменте и прочих сферах человеческой деятельности. Кроме того, все стремительнее возрастает необходимость в построении теоретико-игровых моделей при наличии той или иной неопределенности, поскольку использование при моделировании фактора неопределенности позволяет более адекватно описывать происходящие в реальности конфликтно-управляемые процессы. В частности, в 2000 году в совместной работе автора и Петросяна Л.А. [1] был введен новый класс игр — кооперативные дифференциальные игры со случайной продолжительностью.

Момент окончания игры T является случайной величиной с известной функцией распределения $F(t)$. В такой постановке задачи под основными терминами кооперативной теории игр, такими как выигрыш, дележ и т.д., понимаются математические ожидания данных величин. Таким образом, функционал, соответствующий совместному ожидаемому выигрышу игроков, не является стандартным, т.к. имеет вид повторного интеграла. В связи с этим само по себе нахождение оптимальных управлений и значения максимального совместного выигрыша игроков не является тривиальной задачей. В работе [2] выведено функциональное уравнение типа Гамильтона-Якоби-Беллмана, которое позволяет решать поставленную задачу.

Актуальной является и проблема динамической устойчивости [1] выбранного игроками перед началом игры принципа оптимальности в условиях случайной продолжительности игры. Разрешить данную проблему предлагается путем введения специальных выплат (процедуры распределения дележа), которые будут регулировать распределение общего выигрыша во времени так, чтобы ни в какой момент времени ни у кого из игроков не возникло желание уклониться от первоначального соглашения.

Полученные результаты демонстрируются на примере игры 3 лиц со случайной продолжительностью.

Литература

[1] Петросян Л. А., Шевкопляс Е.В. Кооперативные дифференциальные игры со случайной продолжительностью. // "Вестник СПбГу", издание СПбГу, 2000, серия 1, выпуск 4, стр. 18-23.

[2] Шевкопляс Е.В. Уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана для кооперативных дифференциальных игр со случайной продолжительностью. // Труды международной конференции "Устойчивость и процессы управления", СПбГу 2005, НииВМПУ ОООВВМ 2005, т. 1, стр. 630-639.

On the Cooperation under Random Game Duration

Shevkoplyas E.V.

Saint Petersburg State University, Russia

The class of cooperative differential games with random duration is studied. The Hamilton-Jacobi-Bellman equation for the problem with random duration is derived.

It is proved, that in many cases the decision for such games is time-inconsistent. With the help of special imputation distributed procedure (IDP), the new regularized optimality principle is defined and its time-consistency proved.

The results are illustrated on the example of 3-person game with random duration.

УСТОЙЧИВОСТЬ МЕТОДОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ ЗАДАЧ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ

Яновская Е.Б.

Санкт-Петербургский экономико-математический институт РАН, Россия

Неоднородные задачи распределения ресурсов определяются заданием множества агентов N, непрерывной монотонно возрастающей функцией затрат или доходов $C\colon R^N \to R$, и начальным вектором $q \in R_+^N$ заявок или ресурсов агентов. Решением такой задачи называется распределение величины $C(q)$ между агентами. Метод распределения сопоставляет каждой задаче распределения ее решение. Наиболее изученными правилами распределения являются аддитивные по функции C методы, которые вдобавок приписывают нулевой доход агенту, от переменной которого не зависит функция C (свойство болвана). Эти методы образуют выпуклое множество, крайними точками которого являются методы, порожденные путями в R^N из нуля в точку q. Для каждого пути доход агента определяется как интеграл вдоль пути от частной (по переменной, соответствующей агенту) производной функции затрат. Таким образом, каждый крайний метод задается некоторым путем, соединяющим нуль с точкой q.

В докладе предлагается выбор пути предоставить агентам как игрокам в следующей бескоалиционной игре. Стратегией каждого игрока $i \in N$ является способ расходования его ресурса, предполагаемый произвольной ограниченной плотностью на некотором интервале, интеграл от которой равен q_i. Тогда ситуация в игре порождает путь из нуля в точку q, а выигрыши игроков определяются как их выигрыши для метода, порожденного этим путем. Ситуации равновесия определяют «равновесные» пути, и, соответственно, равновесные методы распределения.

Устанавливается существование ситуаций равновесия для игр, соответствующим задачам распределения ресурсов с функциями затрат, являющимися мультилинейными расширениями выпуклых или вогнутых положительных кооперативных игр с трансферабельными полезностями. Для таких игр равновесными путями являются известный сериальный метод и двойственный к нему. Путь, задающий сериальный метод, определяется диагональю пространства R^N и ее проекциями на грани параллелепипеда $[0, q]$. Этот метод обладает свойством *декомпозиции*: метод, определяемый путем γ, обладает свойством декомпозиции, если для для любой задачи (N, C, q), любого агента $i \in N$ и любого $t_i \in [0, q_i]$ найдутся такие точки $t_j \in [0, q_j]$, $j \in N\backslash i$, что отрезок пути $\gamma(\tau)$, $\tau \in [0, t]$ определяет путь для данного метода для задачи (N, C, t), а для задачи $(N, C^t, q - t)$, где $C^t(x) = C(t + x)$, путем является $\gamma(\tau) - t$, $\tau \in [t, q]$,

Нетрудно заметить, что свойство декомпозиции совпадает со свойством динамической устойчивости стратегий в динамической версии указанной бескоалиционной игры, в которой игроки могут управлять интенсивностью расходования ресурсов в любой момент времени.

Stability of Cost Sharing Methods for Heterogenous Problems

Yanovskaya E.B.

Saint Petersburg Institute for Economics and Mathematics, RAS, Russia

For each heterogenous cost sharing problem a noncooperative game is constructed. The strategies of players (agents) are densities of spending their resources (demands). A strategy n-tuple determines a path from 0 to the demand vector q, and, hence, a path-generated cost sharing method. The corresponding shares determine the payoff function of the game. Equilibrium points of the noncooperative games define "equilibrium" path-generated methods. The existence of equilibrium path-generated methods for cost sharing problems which are generalized multilinear extensions of convex (concave) positive TU games has been proved. It is shown that for convex positive TU games the equilibrium path coincides with the path determined by the "dual" serial method, and for concave games it coincides with the serial one. These path possess the time consistency property: in every point of the path the equilibrium path for the remained subproblem coincides with the corresponding part of the path for the initial problem.

МЕТОДЫ А.М. ЛЯПУНОВА В ХАОТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКЕ
CHAOS THEORY

ORGANIZING CENTERS IN 2D AND 3D PARAMETER SPACES OF NON-SMOOTH DYNAMICAL SYSTEMS

Avrutin V., Schanz M.

IPVS, University of Stuttgart, Germany

Recently the behavior of piecewise smooth dynamical systems has received significant attention because a large number of systems of practical interest can be modeled in this way. The typical application areas include power electronic circuits, systems involving relays, mechanical systems with impacts and stick-slip oscillations, etc. As shown in several works, the behavior of these systems is strongly influenced by discontinuity-induced (border-collision) bifurcations. Remarkably, these bifurcations turned out to be important not only for piecewise smooth dynamical systems, but to be of a more general interest. This is due to the fact that Poincaré return maps of smooth dynamical systems, like for instance the well-known Lorenz system, are often discontinuous and demonstrate these bifurcations as well. Meanwhile codimension-1 border-collision bifurcations are investigated quite well. However, when investigating codimension-1 bifurcation scenarios in extended parameter intervals one observes often bifurcation sequences, which are very difficult to understand. Most unexpectedly, increasing the dimension of the considered parameter space, it is possible to obtain much better understandable bifurcation structures, caused by bifurcations of codimension-2 and -3. These discontinuity induced bifurcations serve as organizing centers in multi-dimensional parameter spaces and dominate their structure.

In the presentation, an introduction of those aspects of bifurcation theory will be given which are relevant for the above mentioned topics. It will be shown how the investigation of a dynamical system under variation of one control parameter may lead to results which are very difficult to interpret. Especially we consider three typical bifurcation scenarios, which have been reported in systems as diverse as biological autocatalytic processes, optogalvanic circuits, impact oscillators, switching circuits, and neural relaxation oscillators. These are period increment with coexistence of attractors, pure period increment and period adding scenarios. In all three cases, there exists a sequence of periodic attractors, whose periods form an arithmetic series $p_{n+1} = p_0 + n\Delta p$ with a starting period p_0 and an increment value Δp. Let η_n be the parameter value at which the attractor with period p_n is created, and let $\overline{\eta}_n$ be the value at which it is destroyed. The common property of all three bifurcation scenarios mentioned above is that $\eta_n < \eta_{n+1}$ implies $\overline{\eta}_n < \overline{\eta}_{n+1}$. For the period increment with coexistence of attractors, the parameter ranges of the occurrence of attractors with subsequent periods overlap ($\overline{\eta}_n > \eta_{n+1}$), for the pure period increment scenario the parameter value for the annihilation of one attractor is the same as that for the emergence of the next one ($\overline{\eta}_n = \eta_{n+1}$), and for the period adding scenario there is a gap between the two ranges ($\overline{\eta}_n < \eta_{n+1}$). In the last case we observe higher-periodic attractors in this gap, whose periods can be calculated based on p_n and p_{n+1} using the infinite adding scheme for the corresponding symbolic sequences. Since the adding process continues ad infinitum, this scenario includes attractors with arbitrary high periods and as a limiting case aperiodic attractors. These attractors are not chaotic in the sense that they have negative Lyapunov exponents. It can also be shown, that these attractors are non-robust. The mentioned results become well-understandable if one considers the corresponding structures in the two-dimensional and even three-dimensional parameter space, although an infinite number of bifurcation curves (or surfaces) are involved. As a first step, we present a classification of generic discontinuity-induced codimension-2 bifurcations inducing the scenarios mentioned above. Then, the unfolding of some discontinuity-induced codimension-3 bifurcations will be discussed, which we currently assume to be of generic types.

ON WELL-STRUCTURED ROBUST CHAOS IN DISCONTINUOUS MAPS

Avrutin V., Schanz M.

IPVS, University of Stuttgart, Germany

In recent times the dynamics of piecewise smooth maps have received significant research attention because a large number of systems of practical interest are modeled by such maps. This includes power electronic circuits, systems involving relays, mechanical systems with impacts and stick-slip oscillations, etc. Most of the efforts in developing the theory for border collision bifurcations have concentrated on piecewise smooth but continuous maps. In contrast, discontinuous maps have received far less research attention even though many practical dynamical systems have been shown to be modeled by piecewise smooth maps with discontinuity at the boundary. Such maps occur in situations where there is a borderline in the Poincaré section such that two arbitrarily close points on the two sides of the border are separated at the next observation instant. It has been shown also, that such a situation occurs in sigma-delta modulators, dc-dc converters and many other electronic circuits.

It is in the meanwhile well-known, that piecewise smooth dynamical systems undergo bifurcations, which can not be observed in smooth systems. However, until now mainly bifurcations involving fixed points and periodic attractors were investigated for piecewise smooth systems. It is also known, that these systems can show chaotic behavior as well, but bifurcations and bifurcation scenarios formed by chaotic attractors are currently still far away from being understood. Especially piecewise smooth systems show often so-called robust chaos (chaos without any periodic inclusions). The organizing principles of this phenomenon are still not investigated extensively. The short statement "here is chaos" sounds similar to the "here be dragons" inscription on old maps and does not explain, how this chaos emerges and how it is structured. A detailed investigation of this phenomenon in general represents a really challenging task. For instance, although the concept of robust attractors is well-defined, it has to be clarified, whether it can be applied for the presumable robust chaotic attractors mentioned above.

In our current work we focus on a particular model, so that our aims are less ambitious than in the general case. Starting from one of the most standard and "most simple" models in the field of piecewise smooth maps, we consider the question, how transitions to chaos take place. When dealing with this question, we detect an infinite number of bifurcation curves organized by a new bifurcation scenario. This scenario explains the structure of the area of chaotic dynamics and is formed by multiband chaotic attractors only, whereby the bandcounts (number of connected components of the attractors) are organized by some kind of infinite adding scheme. This adding scheme is similar to the period adding scheme and hence to the well-known Farey trees. According to this, we detect an infinite number of multiband chaotic attractors with bandcounts increasing to infinity. Furthermore, we detect, that specific areas organized by this scenario have a complex interior structure, consisting of further areas with increasing bandcounts nested in each other. Currently we are not able to explain this structure in full detail. However, in this talk some hypotheses will be presented, leading us to the assumption, that the area of chaotic dynamics has a self-similar structure. Therefore we conclude, that the area of the so-called robust chaos is robust only with respect to its chaotic nature, but is structured by an infinite number of bifurcation curves, leading to an infinite number of different multiband chaotic attractors. In this presentation we will discuss the concept of codimension-2 and 3 organizing centers in the context of multiband chaotic attractors. Especially, we will discuss the question, up to which extend the concept of Lyapunov exponents is useful for the investigation of the presented structure and for description of its properties.

A HYBRID METHOD FOR COMPUTING LYAPUNOV EXPONENTS

Beyn W.-J., Lust A.

Department of Mathematics, Bielefeld University, Germany

In this talk we present a new numerical method for computing some or all Lyapunov exponents of a discrete dynamical system. The method is called hybrid because it combines the classical QR-method (taking time averages of linearizations about single trajectories) with more recent methods that use spatial integration with respect to an invariant ergodic measure. More specifically, consider a discrete system $x_{n+1} = g(x_n), n = 0, 1, ...$ where $g : M \mapsto M$ is a diffeomorphism of a d-dimensional manifold M that has an invariant ergodic measure μ. Then we approximate the j-th Lyapunov exponent $\lambda_j, 1 \leq j \leq d$ by the sequence $\{a_n^j\}$ of integrals

$$a_n^j = \frac{1}{n} \int \ln R_{jj}(Dg^n(x)) d\mu$$

where $R_{jj}(Dg^n(x))$ is the j-th diagonal entry of the R-matrix in the unique QR-decom-position of the Jacobian $Dg^n(x)$. Our method extends the approach of Aston and Dellnitz (see e.g. [1]) who used the sequence of integrals $a_n = \frac{1}{n} \int \ln \|(Dg^n(x))\| d\mu$ for computing the dominant Lyapunov exponent λ_1. As in their approach we use the package GAIO (see [2] for a summary) in order to compute a box covering of the underlying attractor and in order to compute an approximate invariant measure with support on this covering. Combining this with the QR-decomposition leads to a robust method for computing all Lyapunov exponents which even yields better approximations than a_n an for the dominant exponent. This will be illustrated by several numerical examples. For the approximate exponents above we obtain an error expansion of the form

$$a_n^j = \lambda_j + \frac{c_j}{n} + o\left(\frac{e^{-\delta n}}{n}\right) \quad \text{for some} \quad \delta > 0,$$

where the constant c_j is determined by integrating certain exterior products of Oseledets vectors with respect to the invariant measure. For the proof we assume a gap in the Lyapunov spectrum and sufficient separation of Oseledets spaces in the Multiplicative Ergodic Theorem. The error expansion allows to speed up convergence through extrapolation which is confirmed by numerical computations. Our results are based on the PhD thesis [3] of the second author.

References

[1] P.J. Aston, M. Dellnitz: Computation of the dominant Lyapunov exponent via spatial integration using matrix norms, Proc. Roy. Soc. Lond. A 459, 2933-2955, 2003.

[2] M.Dellnitz, G.Froyland, O.Junge: The algorithms behind GAIO - Set oriented numerical methods for dynamical systems B. Fiedler (ed.): Ergodic Theory, Analysis and Efficient Simulation of Dynamical Systems, 145-174, Springer, 2001.

[3] A. Lust: Eine hybride Methode zur Berechnung von Liapunow-Exponenten, PhD The- sis, Bielefeld University, 2006.

LYAPUNOV EXPONENTS AND CHAOTIC CLDW PHYSIOLOGICAL SYSTEM

G. Çigdem Yalçin and K. Gediz Akdeniz

Istanbul University, Department of Physics, Istanbul, Turkey

In a recent work, the dynamical properties of sensitively recorded breathing signals (SRBS) of representative rats shown that the CLDW (Cardia, Lungs, Diaphram and Windpipe) physiological system could be a good example of autonomous complex physical system [1].

In this presentation Lyapunov exponents of the CLDW physiological system are investigated by nonextensive statistical mechanics point of view.

References

Zeren T., Özbek M., Ekerbiçer N., Yalçin G.Ç., Akdeniz, K.G., 2006, "Sensitively Recorded Breathing Signal of Rat and Its Nonlinear Dynamics" submitted in Journal of Biochemical and Biophysical Methods.

CHAOTIC DYNAMICS OF GURSEY INSTANTONS IN PHASE SPACE

K. Gediz Akdeniz*, Fatma Aydogmus*, Serap Sagaltici*, Cem Önem**

**Istanbul University, Department of Physics, Turkey*

***Trakya University, Department of Physics, Edirne, Turkey*

1956 Gursey non-linear wave equation [1] is only possible conformally invariant pure spinor model in four dimension which contains no derivatives higher than the first. Since the nonlinear self-coupled spinor term in the model does not exit in perturbation theory, it is possible to quantize the model by the introduction of auxiliary field's [2].

On the other hand, much attention has been devoted to study of the nonlinear dynamical structure of ϕ^4 soliton [3], sine-Gordon soliton [4] and Gursey soliton [5]. In this presentation, we investigate the chaotic dynamics of the instanton type spinor solutions [6] of the Gursey Model in phase space.

References

[1] F. Gursey: Nuovo Cimento, 3, 988 (1956)
[2] K.G. Akdeniz, M. Arik, M. Durgut, M. Hortacsu, S. Kapanoglu and N.K. Pak: Phys. Lett., 124B, 79 (1983)
[3] L.E. Guerrero, A. Bellorin, J.R. Carbo and J.A. Gonzales: Chaos, Solitons Fractals 10, 1491 (1999).
[4] J.A. Gonzales, A. Bellorin, L.E. Guerrero: Phys. Rev.E, 65, 065601 (2002).
[5] K.G. Akdeniz, F. Ozok, S. Sagaltici and C. Onem: "On Nonlinear Dynamics of Spinor Type Solitons in Gursey Equation with Mass Term Istanbul University Department of Physics preprint, Unpublished (2005).
[6] F. Kortel: Nuovo Cimento, 4, 210 (1956) and K.G. Akdeniz: Lettere al Nuovo Cimento, 33, 40 (1982).

GLOBAL QUALITATIVE ANALYSIS OF POLYNOMIAL DYNAMICAL SYSTEMS

Gaiko V.A.

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Belarus

We establish the global qualitative analysis of planar polynomial dynamical systems and suggest a new geometric approach to solving *Hilbert's Sixteenth Problem* on the maximum number and relative position of their limit cycles in two special cases of such systems. First, using geometric properties of four field rotation parameters of a new canonical system, we present a proof of our earlier conjecture that the maximum number of limit cycles in a quadratic system is equal to four and the only possible their distribution is (3:1) [1-3]. Then, by means of the same geometric approach, we solve the Problem for Liénard's polynomial system (in this special case, it is considered as *Smale's Thirteenth Problem*) [2, 4]. Besides, generalizing the obtained results, we present a solution of *Hilbert's Sixteenth Problem* on the maximum number of limit cycles surrounding a singular point for an arbitrary polynomial system and, applying the Wintner-Perko termination principle for multiple limit cycles, we develop an alternative approach to solving the *Problem* [2, 4]. By means of this approach, for example, we give another proof of the main theorem for a quadratic system and complete the global qualitative analysis of a generalized Liénard's cubic system with three finite singularities [1-4].

We discuss also some different approaches to the *Problem*. In particular, our program on the complete solution of *Hilbert's Sixteenth Problem*, what is mainly realized in [1-4], is an alternative to the so-called "Roussarie's program" (see [1]). That program was reduced to the classification of separatrix cycles, determining their cyclicity and finding an upper bound of the number of limit cycles for quadratic systems. Unfortunately, there are some serious problems in the realization of the Roussarie's program: for example, it is not clear how to determine the cyclicity of non-monodromic separatrix cycles when there is no return map in the neighborhood of these cycles and there is no general approach to the study of the cyclicity of separatrix cycles in the case of center when the return map is identical zero. Besides, even in the case of realization of the program, as its author notes himself (see [1]), the obtained upper bound of the number of limit cycles obviously can not be optimal, since the used pure analytic methods cannot ensure neither the global control of limit cycle bifurcations around a singular point nor, especially, the simultaneous control of the bifurcations around different singular points. Our geometric approach to the global qualitative analysis of polynomial dynamical systems allowed also to correct a mistake in a quite recent work by Dumortier and Li (see [2, 4]), where the authors considered a generalized Liénard's cubic system with three finite singularities, used small perturbations of a Hamiltonian system and studied zeros of the Abelian integrals trying to "prove" that at most four limit cycles can bifurcate from the exterior period annulus and to "obtain" a configuration of four big limit cycles surrounding three finite singularities together with the fifth small limit cycle which surrounds one of the anti-saddles.

References

[1] V.A.Gaiko, *Global Bifurcation Theory and Hilbert's Sixteenth Problem*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 2003.
[2] V.A.Gaiko, Field rotation parameters and limit cycle bifurcations, Preprint M/06/54, Institut des Hautes Études Scientifiques, Bures-sur-Yvette (France), 2006.
[3] V.A.Gaiko, Geometry of planar quadratic systems, arXiv: math. DS/0611142.
[4] V.A.Gaiko, Liénard's system and Smale's problem, arXiv: math. DS/0611143.

GLOBALLY COUPLED MAPS IN PRESENSE AND ABSENSE OF NOISE

Ivanova A.S.*, Kuznetsov S.P.*,**

**Saratov State university, Russia*

***Saratov Division of Institute of Radio-Engineering and Electronics of RAS, Russia*

The study of networks composed of elements with different types of dynamics has attracted much attention recently. In particular, after seminal works by Kaneko (K. Kaneko. Physica D, 1990, Vol. 41, № 2, p. 137–172, etc.), a class of period-doubling maps with global coupling has been studied extensively. Global coupling means that all elements of network are coupled to each other. Such networks may serve as models for the description of dynamical phenomena in complex extended systems of different physical nature. It was shown the main phenomenon, which is typical for system with globally coupling, called clusterization. It consists in spontaneous formation of groups of cells — clusters in such way that instantaneous states of elements relating to the same cluster coincide exactly. It is very interesting to investigate the stability of clusters. For this we use method of transversal Lyapunov exponents [1].

In [2] it has been shown, that for the description of dynamics of system of globally coupled logistic maps it is necessary and enough to use two types of coupling, dissipative and inertial, differing by the properties relatively of renormalization transformations (S.P. Kuznetsov. Theory and applications of coupled map lattices, ed. by K. Kaneko, John Wiley and Sons Ltd, 1993, p. 50–93).

In natural excitable systems it is often the case that a particular element, or a part of the network of elements, may be identified as affecting and controlling the other elements. In biological studies it is called a pacemaker (R.F. Schmidt, G. Thews. Human Physiology. Springer, N.Y., 1983.). We consider a generalization of the Kaneko model with a pacemaker represented by a single period-doubling element coupled unidirectionally with a set of other, mutually coupled cells. A pacemaker is represented as a logistic map, which is unidirectionally coupled with a set of globally coupled elements.

Influence of noise on systems of globally coupled maps will be investigated. In case of identical noise (when the noise added to everyone element is equal.) the phenomenon of clusterization should be kept, though process of formation of clusters depending on value of parameters will be another. It will be investigated, as process of formation of clusters and dynamics of system depends on amplitude of noise.

In case of non-identical noise (when noise is added to each element) it is impossible to speak about clusters as exact concurrence of instant conditions does not occur. It will be consider "clusters as a group of the elements conterminous to some accuracy. Dynamics of two-clusters state which can be described as system of two coupled equations will be in detail investigated. For the common case it will be investigated, as process of formation "clusters" depends on amplitude of noise and on accuracy of definition of "clusters". At presence of pacemaker the case when noise is added only to the allocated element will be investigated also.

The work is financial support by CRDF (appendix 02–2006) and DFG (SFB 555)

References

[1] A. Pikovsky, O. Popovich, Yu. Maistrenko. Resolving clusters in chaotic ensembles of globally coupled identical oscillators. Physical Review Letters, 2001, Vol.87, № 4, 044102.
[2] A.S. Ivanova, S.P. Kuznetsov. Scaling at the onset of chaos in a network of logistic maps with two types of global coupling. Nonlinear Phenomena in Complex Systems, 5:2, 2002, p. 151–154.

ON MINIMAL SUBSETS OF PROJECTIVE FLOWS

Johnson R.

Università di Firenze, Italy

An n – dimensional linear differential system with almost periodic coefficients induces, in a natural way, a flow on a trivial fiber bundle whose fiber is the $(n-1)$ – dimensional projective space. We pose the problem of describing the minimal subsets of this projective flow. This is one concrete way to formulate the ill-defined question concerning the "angular behavior" of the solutions of a linear almost periodic differential system.

We provide a classification of the minimal subsets of the projective flow when $n=2$. Such a minimal set has particularly interesting structure when the differential system is of Millionshchikov-Vinograd type. And other non-trivial structural patterns are also possible.

We note that there is as yet no example of an almost periodic "Denjoy cocycle"; that is, a two-dimensional, linear, almost periodic differential system whose projective flow admits a minimal set whose generic fiber is a Cantor-type set. Neither can the existence of such systems be excluded.

The results we present are discussed in a joint paper with K. Bjerkloev.

CHAOS IN THE NEIGHBORHOOD OF A GRAZING BIFURCATION

Kryzhevich S.G.

Saint-Petersburg State University

The grazing bifurcation has been first described by A. Nordmark. It appears in a vibro-impact system provided the impact velocity of a periodic solution vanishes as the parameter changes. For different examples of vibro-impact systems the chaotic behavior of solutions in the neighborhood of grazing has been established numerically. The main target of this report is to show analytically how the "Smale horseshoes" appear in the neighborhood of grazing.

Let $0 \in U \subset \mathbb{R}^2$ be the domain, $J = [0, \mu^*]$. Consider the function $f(t, x, y, \mu)$ of the class $C^1(\mathbb{R} \times U \times J \to \mathbb{R})$ and C^1 smooth by x, y and μ. Suppose that $f(t, x, y, \mu) \equiv f(t+T(\mu), x, y, \mu)$. Here $T(\mu)$ is a continuous function on J. Consider the mechanical system, described by the equation $\ddot{x} = f(t, x, \dot{x}, \mu)$, which can be reduced to the system

$$\dot{x} = y; \qquad \dot{y} = f(t, x, y, \mu),$$

which is defined for $x \geqslant 0$. Define $f_0(t, \mu) = f(t, 0, 0, \mu)$. Let the following impact conditions take place.

A. Let $z(t) = (x(t), y(t))$ be the solution. If $x(t_0) = 0$, then $y(t_0 + 0) = -ry(t_0 - 0)$, where $r \in (0, 1]$.

B. If $z(t_0 - 0) = 0$, $f_0(t_0, \mu) \leqslant 0$, and t_1 be such that $f_0(t, \mu)| \leqslant 0$ for all $t \in I = [t_0, t_1]$, then $z(t)|_I \equiv 0$.

Denote $z = (x, y)$, the obtained vibro-impact system by $(*)$ and the solution of the system $(*)$ with initial data $z(t_0) = z_0$ and a fixed value of the parameter μ by $z(t, t_0, z_0, \mu)$. Consider the Poincaré mapping defined by the formula $F_{\mu,\theta}(z_0) = z(T(\mu) - \theta + 0, -\theta, z_0, \mu)$.

Theorem. *Let there exists a continuous family of $T(\mu)$ - periodic solutions*

$$\varphi(t, \mu) = (\varphi_x(t, \mu), \varphi_y(t, \mu)) \qquad (\mu \in J)$$

of the system $(*)$, satisfying following properties.

1. *$\varphi(t, \mu) \in U$ for all $\mu \in J$, $t \in [0, T(\mu)]$.*
2. *Every function $\varphi_x(t, \mu)$ has exactly $N + 1$ zeroes $\tau_0(\mu), \ldots, \tau_N(\mu)$ on the segment $[0, T(\mu))$.*
3. *The velocities $y_k(\mu) = \varphi_y(\tau_k(\mu) + 0, \mu))$ are such that $y_0(\mu) > 0$ for $\mu > 0$, $y_0(0) = 0$, $f_0(\tau_0(0), 0) > 0$, $y_k(\mu) > 0$, for all $\mu \in J$, $k = 1, \ldots, N$.*
4. *Denote $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \lim\limits_{\mu,\theta \to 0+} DF_{\mu,\theta}(\varphi(-\theta, \mu))$. Suppose that $a_{12} \neq 0$, $a_{11} + a_{22} \neq 0$.*

Then there exist such values $\mu_0 > 0$ and $\theta_0 > 0$, that for any $\mu \in (0, \mu_0)$, $\theta \in (0, \theta_0)$ there is a compact set $K = K_{\mu,\theta}$, invariant to the respect of the mapping $F^2_{\mu,\theta}$ and such that the following conditions are satisfied.

I. *The mapping $F^2_{\mu,\theta}|_{K_{\mu,\theta}}$ has infinitely many periodic points.*

II. *The periodic points of the mapping $F^2_{\mu,\theta}$ are dense in $K_{\mu,\theta}$.*

III. *There is such a point $p_\mu \in K_{\mu,\theta}$, whose orbit $\{F^{2n}_{\mu,\theta}(p_{\mu,\theta}) : n \in \mathbb{Z}\}$ is dense in $K_{\mu,\theta}$.*

Supported by RFBR (grant 03-01-06493), by the Ministry of Education and Science of Russia and Government of Saint-Petersburg (PD06-1.1-50), by the scientific program of the Ministry of Education and Science "Russian Universities" and by the fund of Vladimir Potanin.

EXTENSIONS OF LYAPUNOV'S IDEAS IN THE ALGEBRAIC APPROXIMATION OF ATTRACTORS

Leonov G.A. and Reitmann V.

Saint-Petersburg State University, Russia

We consider polynomial systems of the form

$$dx/dt = f(x) \tag{1}$$

on $\mathbb{K}^n$, where f from $\mathbb{K}^n[x1, \ldots, xn]$ is a polynomial and $\mathbb{K}$ denotes the field of real and complex numbers, respectively. It is assumed that the vector field (1) is complete and has constant divergence. It is well-known that the Lorenz equations and the Bloch equations which arise in nonlinear optics are examples of polynomial systems. In the contribution we present approximation procedures for attractors of (1) based on algebraic arguments. This means in the real case that semialgebraic sets of $\mathbb{R}^n$ of the type $\{x|p(x) = 0\}$ and $\{x|p(x) > 0\}$, where $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is a polynomial, can be taken as approximation of the attractor. Conditions for the existence of such approximation sets can be expressed in terms of the Lie-derivatives of a polynomial Lyapunov function, computed with respect to the vector field (1). In the case when (1) represents the real or complex Lorenz system, we derive explicit semialgebraic sets approximating the attractor. It will be also demonstrated how to use algebraic approximation sets of attractors for the solution of control and observation problems of (1) in the class of polynomials.

A METHOD FOR PLANNING ORBITALLY STABLE PERIODIC SOLUTIONS IN UNDERACTUATED MECHANICAL SYSTEMS

Shiriaev A.[*], Freidovich L.[*], Robertsson A.[**], Johansson R.[**]

[*]*Dept. Applied Physics and Electronics, UmeåUniversity, Sweden*
[**]*Dept. Automatic Control, Lund University, Sweden*

Abstract: This note is devoted to a discussion of recently proposed approach for controlling nonlinear mechanical systems having a number of control inputs (actuators) less than a number of degrees of freedom. Controlling such systems is inherently difficult problem due to the fact that not any motion can be achieved via feedback design. Dynamics of non-actuated degrees of freedom of such systems introduce constraint equations that should be taken into account at the stage of planning motions for such systems.

The approach suggests arguments for analytical motion planning new non-trivial period orbits for systems with the deficiency (under-actuation) in a number of control inputs (actuators) being equal to one. As a first step in planning a periodic orbit, we propose to choose artificial geometrical functions that relate degrees of freedom with one scalar variable. Intuitively, such functions should exist if a periodic orbit is present in dynamics: all degrees of freedom behave in synchrony on a cycle parameterized by a scalar variable. As a second step, we suggest to analyze the dynamics of the mechanical system provided that some controller stabilizes the chosen geometrical functions. This step reduces to exploring properties a particular second order scalar dynamical system. It is shown that if it has a periodic solution then the original mechanical system (with a particular feedback law) has a periodic solution. The necessary and sufficient conditions for this second order system to possess the centre in one of its equilibriums are given.

When a periodic motion is successfully pre-planned, the approach suggests methods for synthesis of controllers, which ensure orbital stabilization of the solution in the closed loop system. The key step here is to introduce a particular coordinates for the closed-loop system: a part of coordinates become written in terms of geometrical functions chosen in motion planning steps, another part of coordinates is written in terms angle and action pairs. Such representation of dynamics of the system allows synthesizing a variety of controllers (both time-varying and time invariant) that ensure orbital stabilization.

The method is illustrated by the example: shaping periodic motions of the Furuta pendulum around its unstable upright equilibrium. The feedback design steps are commented, the results of computer simulation and successful experimental implementation are shown.

LOCALIZATION ANALYSIS OF COMPACT INVARIANT SETS OF SOME NONPOLYNOMIAL SYSTEMS WITH COMPLEX DYNAMICS

Starkov K.E., Starkov K.K.

CITEDI-IPN, Mexico

In this paper we consider the localization problem of compact invariant sets for two systems with a nonpolynomial differentiable right side. This problem is intensively studied during the last decade by different researchers; see e.g. the book [1] and the paper [Krishchenko and Starkov, 2006] with references therein. Here by a localization we mean a description of a set containing all compact invariant sets of the system under consideration in terms of equalities and inequalities. Our approach is based on using the first order extremum conditions, see e.g. Theorems 2 and 3 in [Krishchenko and Starkov, 2006]. One of these systems mentioned above is a model characterizing the "labyrinth chaos":

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sin y - bx, \\ \dot{y} &= \sin z - by, \\ \dot{z} &= \sin x - bz. \end{aligned} \tag{1}$$

It was introduced in [Thomas et al, 2004] as an example of a system generating hyperchaos, . Another system is given by equations:

$$\begin{aligned} \dot{J}_1 &= -\alpha J_1 - \beta \tanh(pu_1), \\ \dot{J}_2 &= -\alpha J_2 - \beta \tanh(pu_2), \\ \dot{u_1} &= -lu_1 + T_{12} \tanh(pu_2) + J_1, \\ \dot{u_2} &= -lu_2 + T_{21} \tanh(pu_1) + J_2. \end{aligned} \tag{2}$$

It is a two-neuron model considered in [Li et al, 2006]. Here α; β; ρ; l; T_{12}; $T_{21} > 0$.

Example 1: the system (1). Here we establish the existence of the absorbing compact domain provided $b > 0$, find its algebraic description and show that the cube $C := \{-b^{-1} \leq x; y; z \leq \ b^{-1}\}$ contains all compact invariant sets of (1). Also, if $b > 0$ then all trajectories fall into C and remain there. In this case chaotic behavior is possible only inside C.

Example 2: the system (2). Here we establish the existence of the absorbing compact domain provided $l > 1/(4\alpha)$ and find its algebraic description. Then we demonstrate that the polytope

$$K = \left\{ -\alpha^{-1}\beta \leq J_1;\ J_2 \leq \alpha^{-1}\beta;\ -\frac{T_{12}\alpha + \beta}{l\alpha} \leq u_1 \leq \frac{T_{12}\alpha + \beta}{l\alpha};\ \ -\frac{T_{21}\alpha + \beta}{l\alpha} \leq u_2 \leq \frac{T_{21}\alpha + \beta}{l\alpha} \right\}$$

contains all compact invariant sets of (2). Also, all trajectories fall into K and remain there. Chaotic behavior is possible only inside K. Pictures illustrating our localization sets are presented as well.

Finally, we consider briefly a coupled laser system of dimension 5.

References

Boichenko V.A., Leonov G.A., Reitmann V. [2005] "Dimension Theory for Ordinary Differential Equations", Teubner.

Krishchenko A.P., Starkov K.E. [2006] "Localization of compact invariant sets of the Lorenz system Physics Letters A 353, 383-388.

Li Y., Zhou X., Wu Y., Zhou M. [2006] "Hopf bifurcation analysis of a tabu learning two-neuron model Chaos, Solitons and Fractals 29, 190–197.

Thomas R., Basios V., Eiswirth M., Kruel T., Rössler O.E. [2004] "Hyperchaos of arbitrary order generated by a single feedback circuit, and the emergence of chaotic walks Chaos 14, 669–674.

SYNCHRONIZATION OF MULTIPLE CHAOTIC GYROSCOPES USING THE FUNDAMENTAL EQUATION OF MECHANICS

Firdaus E. Udwadia

University of Southern California, USA

This paper provides a simple, novel approach for synchronizing the motions of multiple slave' nonlinear mechanical systems by actively controlling them so that they follow the motion of a master' mechanical system. The multiple slave systems need not be identical to one another. The method is inspired by recent results in analytical dynamics and it leads to the determination of the set of control forces to create such synchronization between highly nonlinear dynamical systems. No linearization or nonlinear cancellation is involved, and the exact control forces needed to synchronize the nonlinear systems are obtained in closed form. The method is applied to the synchronization of multiple, yet different, chaotic gyroscopes that are required to replicate the motion of a master gyro which may have chaotic or regular motion. The efficacy of the method and its simplicity in synchronizing these mechanical systems is illustrated by two numerical examples, the first dealing with a system of three different gyros, the second with five different ones.

ANALYSIS OF STABILITY OF NONLINEAR CONTROL SYSTEMS

Yang Wanly, Li Hongyan, Qian Kun

Mathematics Department, Academy of Armored Force Engineering, Beijing, China

By introducing the concept of imitate odd approximate systems, we gave the sufficient conditions for consistent asymptotic stability of the zero solution of two-dimension systems that have odd approximate systems. An example is presented to show that the new method is efficient and convenient t in use.

Keywords: Lyapunov function; imitate odd approximate systems; consistent asymptotic stability

О ПОСТРОЕНИИ ИНВАРИАНТНОЙ МЕРЫ НА СИМВОЛИЧЕСКОМ ОБРАЗЕ

Ампилова Н.Б.

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

Символический образ [1] динамической системы представляет собой конечный ориентированный граф, построенный по выбранному покрытию фазового пространства. Вершины графа соответствуют элементам покрытия, а дуги соответствуют существованию пересечений ячеек покрытия с их образами под действием исходной системы. Символический образ является конечным приближением системы и отражает ее глобальную структуру. При этом многие алгоритмы исследования могут быть сведены к алгоритмам на графах.

Для графа $G = (V, E)$ марковская цепь μ задается начальными вероятностями состояний $\mu(I)$ для $I \in V$ и условными вероятностями $\mu(e|i(e))$ для $e \in E$, $i(e)$ обозначает начало дуги e. Марковская цепь на графе называется стационарной, если для каждой вершины сумма вероятностей по входящим дугам равна сумме вероятностей по выходящим.

Пусть A — алфавит, X — пространство слов над A. Стационарный процесс в общем смысле определяется [2] как присваивание μ вероятностей блокам (словам) из X такое, что $\sum_{a\in A}\mu(a) = 1$ и для любого слова w над A верно $\mu(w) = \sum_{a\in A}\mu(wa) = \sum_{a\in A}\mu(aw)$. Носителем стационарного процесса называется множество слов, определяемых с помощью исключения слов с нулевой вероятностью. Стационарный процесс на X это стационарный процесс, носитель которого лежит в X. Стационарный процесс на $G = (V, E)$ определяется как стационарный процесс на $A = E$, с носителем в множестве X_G, где X_G обозначает множество слов над алфавитом E и называется пространством дуг графа G. Стационарная марковская цепь на графе есть стационарный процесс в смысле общего определения.

Известно, [2] что любая стационарная марковская цепь на G задает стационарную меру на X_G, инвариантную относительно отображения сдвига. Предлагается способ построения меры на символическом образе и вычисляется энтропия полученного стационарного процесса.

Выделим на графе все компоненты сильной связности и определим меру на каждой компоненте следующим образом. Выделим все простые циклы u_i, $i = 1, \dots, k$ и каждой дуге цикла припишем величину $\dfrac{1}{l_i}$, где l_i число дуг в цикле. Для каждого u_i выберем некоторый вес ν_i, $\displaystyle\sum_{i=1}^{k}\nu_i = 1$. Теперь мера дуги в цикле u_i определяется как $\dfrac{\nu_i}{l_i}$, а для дуг, принадлежащих нескольким циклам мера определяется как сумма мер по эти циклам. Для дуг, не входящих в циклы, мера полагается равной нулю. Мера вершины определяется как сумма мер по всем входящим в нее дугам. Мера всего графа определяется как выпуклая комбинация мер на компонентах.

Для полученного стационарного процесса вычисляется энтропия и анализируется ее зависимость от выбора весов ν_i.

Литература

[1] Осипенко Г.С. О символическом образе динамической системы, сб. Граничные задачи, Пермь, 1983, с. 101–105.
[2] Lind D., Marcus B. An introduction to symbolic dynamics and coding, New York, 1995.

On the Construction of an Invariant Measure on a Symbolic Image

Ampilova N.B.

Saint Petersburg State University, Russia

Symbolic image is an oriented graph which is constructed for a dynamical system on the given covering. It is an approximation of the system.

The method of construction of an invariant measure with the parameters ν_i, $\sum_{i=1}^{k}\nu_i = 1$, which are weights of n cycles of a strong connected component is proposed. Such a measure yields a stationary process on the graph and is invariant relative to shift map. The entropy of the process is calculated and its dependence on ν_i is investigated.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

Анашкин О.В.

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского Симферополь, Украина

Дискретные системы являются наиболее подходящим средством моделирования разнообразных динамических процессов в живой природе, в технике, в экономике и т.п., а также естественным образом возникают во многих разделах теоретических наук. Проблема устойчивости решений разностных уравнений, описывающих поведение дискретных систем, является одной из центральных при анализе конкретной модели.

В докладе рассматриваются различные методы решения задачи устойчивости, отмечаются их достоинства и недостатки. Помимо устойчивости относительно возмущений начальных условий (устойчивость по Ляпунову) обсуждается также влияние на характер поведения решений разного рода параметрических возмущений. Метод функций Ляпунова является одним из важнейших инструментов исследования на устойчивость. Большинство известных результатов об устойчивости в рамках прямого метода Ляпунова является распространением на дискретные системы теорем о достаточных условиях устойчивости решений дифференциальных уравнений.

В настоящее время сформировалось новое направление в теории разностных уравнений — разностные уравнения с запаздыванием. Во многих случаях такие уравнения легко сводятся к уравнению без запаздывания или могут рассматриваться как разностные уравнения высокого порядка. Тем не менее, следует признать целесообразность развития методов, специально нацеленных на исследования данного класса разностных уравнений. В докладе обсуждаются перспективы распространения не разностные уравнения с запаздыванием методов, развитых для функционально-дифференциальных уравнений.

Пусть $J[a,b] \subset \mathbf{Z}$ есть множество целых чисел на сегменте $[a,b] \subset \mathbf{R}$. Для натурального p обозначим символом M_p множество всех отображений $\varphi : J[-p,0] \to \mathbf{R}^n$. Введем в пространстве M_p норму $\|\varphi\| = \max\{|\varphi(s)| : s \in J[-p,0]\}$, где $|\cdot|$ — норма в $\mathbf{R}^n$. Для заданной последовательности $x : \mathbf{Z} \to \mathbf{R}^n$, $k \mapsto x(k)$ обозначим через $x[k]$ элемент пространства M_p, определенный следующим образом: $x[k](s) = x(k+s)$, $s = -p, \ldots, 0$. Рассмотрим дискретную систему вида

$$x(k+1) = F(k, x[k]), \quad k = \sigma, \sigma+1, \ldots, \tag{1}$$

где функция $F : \mathbf{Z} \times M_p \to \mathbf{R}^n$ для каждого $k \in \mathbf{Z}$ определена и непрерывна в области, $F(k,0) = 0$, $k = \sigma, \sigma+1, \ldots$. Введем в рассмотрение множество $A_R = \{\varphi \in M_p : \|\varphi\| \leq R|\varphi(0)|\}$, $R \geq 1$. Нетрудно видеть, что первая разность назад нормы точки на фазовой траектории решения уравнения (1) в пространстве M_p может возрастать тогда и только тогда, когда точка принадлежит A_1. Запись вида (1) позволяет с единой позиции рассматривать все возможные типы разностных уравнений с запаздыванием. Как и для функционально-дифференциальных уравнений, использование свойств множества A_R, позволяет эффективно расширить класс допустимых функций Ляпунова и упростить задачу исследования устойчивости в случае, когда уравнение (1) в определенном смысле близко к уравнению без запаздывания, например, содержит запаздывание в нелинейных слагаемых.

On Stability of Discrete Systems

Anashkin O.V.

Taurida National University, Simferopol, Ukraine

Discrete systems or difference equations are most appropriate tool to describe a lot of different dynamic processes in population dynamics, industry, economics and so on. Difference equations appear quite naturally inside of various theoretical sciences and not only in mathematics. The paper is devoted to some aspects of the theory of stability of difference equations. Main attention is given to difference equations with delay.

ПЕРЕХОД ОТ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ К КОНЕЧНОМЕРНЫМ: РАСЧЕТ КОЛИЧЕСТВЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК РЕЖИМОВ СЛОЖНОЙ ДИНАМИКИ

Балякин А.А.

Саратовский государственный университет, Россия

Расчет количественных характеристик режимов сложной динамики (спектр показателей Ляпунова, размерность пространства вложения и т.п.) является к настоящему времени важным направлением в нелинейной динамике. Методы, используемые в случае конечномерных систем, с успехом применяются в случае распределенных систем. В частности, разработана методика расчета спектра показателей Ляпунова для систем с бесконечным числом степеней свободы, основанная на модификации метода Бенеттина.

Ранее нами была исследована сложная динамика в модели кольцевого резонатора, заполненного нелинейной средой, под внешним гармоническим воздействием. Данная система описывается нелинейным уравнением Шрёдингера (НУШ) с запаздывающим граничным условием, которое в случае слабой дисперсии может быть сведено к двумерному отображению (отображение Икеды). При учете дисперсии сложная динамика системы обусловлена модуляционной неустойчивостью и переход к хаосу происходит через разрушение квазипериодического движения. В случае слабой дисперсии эффекты, связанные с модуляционной неустойчивостью, несущественны, и динамика системы качественно меняется и начинает напоминать поведение системы Икеды: в режиме автомодуляции огибающая сигнала напоминает последовательность почти прямоугольных импульсов, и переход к хаосу происходит по сценарию Фейгенбаума.

В настоящей работе представлены расчета спектра показателей Ляпунова для двух этих случаев. Показано, что для модели кольцевого нелинейного резонатора с учетом дисперсии возможны режимы гиперхаоса (более двух положительных показателей Ляпунова). Обнаружено, что в случае слабой дисперсии можно выделить два «основных» направления в фазовом пространстве, вдоль которых имеет место наименьшее сжатие N-мерного эллипсоида изображающих точек. Соответственно, для описания системы можно перейти от модели НУШ с запаздыванием к отображению Икеды. Проведено сравнение значений Ляпуновских показателей, полученных в рамках обоих моделей при одинаковых значениях параметров. Показано, что имеется хорошее соответствие между значениями показателей Ляпунова, рассчитанными в рамках моделей распределенной и конечномерной систем.

Работа выполнена при поддержке грантов МК–4945.2006.2, CRDF Y3–P–06–02, РФФИ № 06–02–16773.

Литература

[1] Балякин А.А., Блохина Е.В. // Конференция молодых ученых «Наноэлектроника, нанофотоника и нелинейная физика». Саратов, 2006. С. 65.
[2] Balyakin A.A., Ryskin N.M., Khavroshin O.S. // Books of abstracts "Dynamics Days Europe 2006 Crete, Greece, P. 47.
[3] Балякин А.А., Рыскин Н.М., Хаврошин О.С. // Изв. Вузов. Радиофизика. 2007 (в печати).

From Distributed to Finite-Dimensional Systems: Calculation of Quantitative Characteristics of Regimes of Complex dynamics

Balyakin A.A.
Saratov State University, Russia

We present the results of numerical calculations of quantitative characteristics of complex regimes for the model of a ring cavity, described by nonlinear Schroedinger equation with delay term. The special attention is paid to the case when the dispersion is negligible, in that case infinite system can be reduced to the finite one, that can be well described with the help of the Ikeda map. We compared the results obtained for both cases and found good coincidence.

ОСОБЕННОСТИ РАСЧЕТА СПЕКТРА ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА В РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМАХ

Балякин А.А., Блохина Е.В.

Саратовский государственный университет, Россия

Исследование хаотической динамики в распределенных системах представляет сегодня важную и нетривиальную задачу. Для количественной характеристики сложных режимов используют показатели Ляпунова (ЛП), которые определяют экспоненциальный в среднем рост (или затухание) возмущений вблизи типичной принадлежащей аттрактору фазовой траектории. При этом полное число ЛП отвечает размерности фазового пространства системы. Критерием хаоса является присутствие в спектре хотя бы одного положительного показателя. Если имеется более одного положительного ЛП, говорят о гиперхаосе. В случае распределенных систем, фазовое пространство которых является бесконечномерным, число показателей ЛП также будет бесконечным.

В настоящей работе мы описываем численную схему расчета спектра показателей Ляпунова для ряда распределенных радиофизических систем, основанную на модификации метода Бенеттина. Рассмотрены модели распределенных автоколебательных систем с запаздыванием, нелинейных распределенных резонаторов, заполненных средой с модуляционной неустойчивостью, а также распределенных систем электронно-волновой природы.

Описаны характерные режимы, наблюдающиеся в данных системах и приведены результаты расчетов спектра показателей Ляпунова для этих режимов. Показано, что существуют как режимы «слабого» хаоса, характеризующиеся одним положительным показателем Ляпунова, так и режимы «развитого» хаоса, когда имеется более чем один положительный показатель Ляпунова (гиперхаос). На примере модели гиротрона с нефиксированной структурой продольного поля показано, что размерность хаотических аттракторов может быть аномально высокой.

Обсуждаются типичные особенности расчета спектра показателей Ляпунова в распределенных системах. Показано, что конкретный вид начального возмущения не влияет на точность получаемых значений спектра ЛП и сказывается лишь на скорости выхода зависимости накапливающихся сумм от времени на линейный закон. Установлено, что число рассчитываемых ЛП не влияет на точность вычислений и предложенная численная схема хорошо работает для любого значения пространства вложения. Описана высокая чувствительность нулевых ЛП к изменению параметров численной схемы, что может облегчить различение режимов «слабого» хаоса с единственным положительным ЛП и гиперхаоса. Обсуждается зависимость результатов компьютерного моделирования от параметров численной схемы. Показано, что скорость расчетов может быть существенно ускорена, если задавать начальное возмущение в виде разложения по линейным собственным модам.

Работа выполнена при поддержке грантов МК-4945.2006.2, CRDF Y3-P-06-02, РФФИ №№ 05-02-16931 и 06-02-16773.

Литература

[1] Кузнецов С.П., Трубецков Д.И. // Изв. вузов. Радиофизика. 2004. Т. 48. № 5–6. С. 383-398.
[2] Блохина Е.В., Кузнецов С.П., Рожнев А.Г. // Письма в ЖТФ. 2006. Т. 32. № 8. С. 83–94.
[3] Балякин А.А., Блохина Е.В. // Конференция молодых ученых «Наноэлектроника, нанофотоника и нелинейная физика». Саратов, 2006. С. 65.

The Pecularities of Lyapunov Spectrum Calculation in Distributed Systems

Balyakin A.A., Blokhina E.V.

Saratov State University, Russia

We discuss some features that are typical for Lyapunov spectra calculation for distributed systems. We present the results of numerical simulations for several models of distributed systems of radiophysical nature. Our study was aimed at following aspects: the behaviour of zero exponents, the regime of hyperchaotic oscillations, the influence of numeric scheme parameters on the Lyapunov exponents values.

УСТОЙЧИВЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ТОЧКИ ГЛАДКИХ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ С ГОМОКЛИНИЧЕСКОЙ ТОЧКОЙ

Васильева Е.В.

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

Рассматривается диффеоморфизм плоскости в себя класса C^r, где $1 \leq r \leq \infty$, с гиперболической неподвижной точкой. Предполагается наличие нетрансверсальной гомоклинической точки.

Из работ Ш. Ньюхауса, Б. Ф. Иванова, Л. П. Шильникова и других авторов [1–3] следует, что при выполнении определенных условий произвольная окрестность гомоклинической точки содержит бесконечное множество устойчивых периодических точек, однако, по крайней мере, один из характеристических показателей этих точек стремится к нулю с ростом периода. Эти условия накладываются, прежде всего, на характер касания устойчивого и неустойчивого многообразий неподвижной точки.

В работе [4] для диффеоморфизма класса C^1 показано, что при ином способе касания устойчивого и неустойчивого многообразий окрестность гомоклинической точки может содержать счетное множество устойчивых периодических точек, при этом характеристические показатели у этих точек меньше некоторого заранее заданного отрицательного числа.

Цель данной работы — показать, что это свойство может иметь место и у диффеоморфизмов класса C^r, где $r \geq 1$. Более того, это справедливо и в случае диффеоморфизма класса C^∞.

Литература

[1] *Sh. Newhouse* // Topology, 1973. V. 12. P. 9–18.
[2] *Б. Ф. Иванов* // Дифференц. уравнения, 1979. Т. XV, № 8. С. 1411–1419.
[3] *С. В. Гонченко, Л. П. Шильников* // Доклады Академии наук, 1986. Т. 286, № 5. С. 1049–1053.
[4] *Е. В. Васильева* // Доклады Академии наук, 2005. Т. 400, № 2. С. 151–152.

Stable Periodic Points of Smooth Diffeomorphisms with Gomoclinic Point

Vasiljeva E.V.

Saint Petersburg State University, Russia

The goal of this work is to prove that a neighborrhood of homoclinic point may contain a countable set of stable periodic points with characteristic exponents smaller any negative number for diffeomorphisms C^r-class ($r \geq 1$).

ИЗУЧЕНИЕ БИФУРКАЦИИ, ПРИВОДЯЩЕЙ К ХАОСУ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С УДАРНЫМИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯМИ

Горбиков С.П., Меньшенина А.В.

Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет, Россия

Изучается бифуркация, которая может происходить в динамических системах с ударными взаимодействиями, своеобразном классе импульсных дифференциальных уравнений. Бифуркация, возникает при попадании периодического движения на границу области существования бесконечноударных движений (движений с бесконечным числом ударных взаимодействий на конечном промежутке времени).

Показано, каким образом при рассматриваемой бифуркации в динамической системе могут возникать подковы или кратные подковы Смейла. (Под последними понимаются подковы, образующиеся при действии степеней точечных отображений, определяемых динамической системой). Доказаны теоремы о символическом описании возникающих при изучаемой бифуркации сложных движений динамической системы и о существовании хаотических движений в малой окрестности (в фазовом пространстве) периодического движения, претерпевающего бифуркацию.

Описываемая бифуркация рассматривается на примере одной конкретной виброударной системы. В результате численных экспериментов указаны параметры и области в пространстве параметров системы, при которых происходит изучаемая бифуркация и возникают хаотические движения. Подковы и кратные подковы Смейла, наблюдавшиеся в этом случае, объясняют наличие хаотических движений.

Численно изучаются статистические свойства найденных хаотических движений. Показано, что в данной ситуации «среднее по ансамблю совпадает со средним по времени». Найдено необычное инвариантное множество, возникающее в малой окрестности периодического движения, которое претерпевает бифуркацию. Это множество является предельным для происходящих в системе хаотических движений.

Investigation of the Bifurcation Resulting in Chaotic Motions of Dynamical Systems with Impact Interactions

Gorbikov S.P., Menshenina A.V.

Nizhny Novgorod State University of Architecture and Civil Engineering, Russia

A new bifurcation of dynamical systems with impact interactions is investigated in the report. It is shown how Smale's horseshoes or multiple Smale's horseshoes can emerge in considered systems after the bifurcation. There are proved theorems that the bifurcation implies chaotic behavior of the systems motions. A model of vibro-impact device is considered as an example. Statistical characteristics of chaotic motions arising from the bifurcation are researched in computer simulation of specified system. According to the computational investigations, these chaotic motions have unusual limiting set.

СУЩЕСТВОВАНИЕ ПРЕДЕЛЬНОГО ЦИКЛА В СИСТЕМЕ С ГИСТЕРЕЗИСНОЙ ФУНКЦИЕЙ РЕЛЕЙНОГО ТИПА

Евдокимов С.Е., Звягинцева Т.Е.

Санкт Петербургский государственный университет, Россия
РГПУ им. А.И. Герцена, Россия

Рассматривается система автоматического регулирования

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\alpha y - \beta x - \varphi(t,\sigma), \end{cases} \tag{1}$$

где $\sigma = ay + bx$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\varphi(t,\sigma)$ — нелинейная неоднозначная функция.

В статье Г.А. Леонова с помощью метода систем сравнения получены эффективно проверяемые необходимые и достаточные условия абсолютной устойчивости двумерных нестационарных систем вида (1), где функция $\varphi(t,\sigma)$ удовлетворяет секторному условию $0 \le \varphi(t,\sigma)\sigma \le k\sigma^2$ для любых t и σ.

В настоящей работе методом, аналогичным [1], рассматривается система (1) при условии, что функция $\varphi(t,\sigma)$ описывает релейную гистерезисную петлю с обходом против часовой стрелки:

$$\varphi(t,\sigma) = \begin{cases} M, & \text{если } \sigma > -\delta, \\ -M, & \text{если } \sigma < \delta \quad (M, \delta > 0). \end{cases} \tag{2}$$

Предположим, что передаточная функция системы (1) $W(p) = \dfrac{ap+b}{p^2+\alpha p+\beta}$ является невырожденной, т.е. $b^2 - \alpha ab + a^2\beta \neq 0$. Поведение системы (1) с нелинейностью вида (2) хорошо изучено аналитическими методами в частном случае, когда $\beta = 0$, и в другом частном случае, когда $a = 0$ (например, [2-3]). Здесь рассматривается наиболее общий случай.

Будем предполагать, что $a > 0$, $Mb - \delta\beta > 0$. Последнее условие означает, что состояния равновесия $(\pm M/\beta, 0)$ системы (1) являются «виртуальными», т.е. не принадлежат двулистному фазовому пространству системы (1).

Доказывается следующая теорема.

Теорема. При сделанных выше предположениях на фазовой поверхности системы (1) существует предельный цикл.

Литература

[1] Леонов Г.А. Необходимые и достаточные условия абсолютной устойчивости двумерных нестационарных систем. Автоматика и телемеханика. № 7, 2005, с. 43-53.
[2] Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959.
[3] Цыпкин Я.З. Релейные автоматические системы. М.: Наука, 1974.

Existence of Limit Cycle in Systems with Relay Type Hysteresis Function

Evdokimov S.M., Zvyagintseva T.E.

Saint Petersburg State University, Russia
RSPU named by A.I. Gertsen, Saint Petersburg, Russia

Control system

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\alpha y - \beta x - \varphi(t,\sigma) \end{cases}$$

is considered. Nonlinear function $\varphi(t,\sigma)$ describes hysteresis loop with anticlockwise direction:

$$\varphi(t,\sigma) = \begin{cases} M, \text{ if} & \sigma > -\delta, \\ -M, \text{ if} & \sigma < \delta \ (M, \delta > 0). \end{cases}$$

With the assumption $b^2 - \alpha ab + a^2\beta \neq 0$, α, β, a, $b > 0$, $Mb - \delta\beta > 0$ the existence of limit cycle on phase space of system (1) is proved by the elementary analytical methods.

СИНХРОНИЗАЦИЯ СИСТЕМ С ГРУБЫМ ХАОСОМ НА БАЗЕ СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ ВАН-ДЕР-ПОЛЯ

Жалнин А.Ю.

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН, Россия

Потоковая система с грубым хаотическим аттрактором типа Смейла-Вильямса была предложена в работе С.П. Кузнецова (Phys. Rev. Lett. **95**, 2005, 144101). Эта система представляет собой пару связанных осцилляторов Ван-дер-Поля с базовыми частотами колебаний, отличающимися вдвое, с параметрами возбуждения, медленно и противофазно модулирующимися во времени, и с особым типом связи между осцилляторами, обеспечивающим эстафетную фазу колебаний, так что эволюция хаотической фазы за один период модуляции описывается отображением Бернулли, как в известной дискретной модели Смейла-Вильямса. Как было показано в работе Кузнецова и Сатаева, в такой системе реализуется грубый хаотический аттрактор, траектории на котором удовлетворяют условиям гиперболичности (Изв. ВУЗов — Прикладная нелинейная динамика, **14**, 2006, № 5, стр. 3–29).

В настоящей работе исследуется динамика двух связанных систем описанного типа, в каждой из которых наблюдается структурно-устойчивая хаотическая динамика. Между системами установлена однонаправленная связь, так, что управляющая система передает фазу своих хаотических колебаний управляемой через нелинейную функцию связи. При этом происходит явление захвата фазы, и в системах устанавливается режим полной хаотической синхронизации. Выполнена аналитическая оценка значения ляпуновского показателя, характеризующего динамику трансверсальных отклонений от инвариантного многообразия синхронных состояний в фазовом пространстве. Показано, что этот ляпуновский показатель является строго отрицательным, что означает асимптотическую устойчивость синхронного хаотического режима, а флуктуации ляпуновского показателя, рассчитанного на конечных временных интервалах, не выводят его из области отрицательных значений, из чего следует «сильный» характер синхронизации. Такой режим колебаний должен быть устойчивым по отношению к расстройке параметров подсистем и аддитивным возмущениям в функции связи. Для иллюстрации этого факта численно исследована зависимость отклика десинхронизации от значения расстройки параметров, а также от вида и амплитуды возмущений в функции связи. Показано, что при малой расстройке параметров отклик десинхронизации линейным образом зависит от ее величины, определены пороговые значения расстройки параметров, разрушающие режим синхронизации. Исследовано влияние постоянного, гармонического, квазипериодического и хаотического возмущений в функции связи на режим синхронизации. Построены зависимости отклика десинхронизации от амплитуд и базовых частот возмущений, определены условия резонансных воздействий, вызывающих значительный отклик расстройки, установлены пороговые значения, за которыми наступает разрушение синхронного режима. Обсуждается возможность использования однонаправлено связанных систем с грубым хаосом в схеме конфиденциальной передачи информации на основе «нелинейного подмешивания».

Работа выполнена при поддержке грантов CRDF (BRHE REC-006 ANNEX BF4M06 APPENDIX 10, Y2-P-06-16) и РФФИ (№ 06-02-16619).

Synchronization of Systems with Robust Chaos Based on Coupled Van-Der-Pol Oscillators

Jalnine A.Yu.

Saratov Branch of the Institute of Radio-Engineering and Electronics of RAS, Russia

The flow system with a robust chaotic attractor of Smale-Williams type was first suggested in the paper by S.P. Kuznetsov (Phys. Rev. Lett. 95, 2005, 144101). This basis system consists of a pair of coupled Van-der-Pol oscillators with own frequencies of generation differing twice, with the generation parameters undergoing slow periodic counterphase variation in time, and with a special type of connection between oscillators. In the present work a synchronization of two coupled robust chaotic systems of the described type is investigated. Due to the unidirectional coupling, the chaotic phase of the "master" system is transmitted into the "slave" system, such that the phase locking occurs, and a full synchronization of the chaotic systems appears. The analytical estimation of the transversal Lyapunov exponent shows it to be strictly negative, with finite-time variations which do nor bring the exponent out from the negative value area. Therefore, this synchronization regime is characterized as "strong". Numerical analysis shows it to be stable with respect to the parameter mismatch and to the perturbations of coupling function.

О БИФУРКАЦИЯХ ИНВАРИАНТНОГО ТОРА В КУСОЧНО-ГЛАДКИХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Жусубалиев Ж.Т., Чевычелов С.Ю.

Курский государственный технический университет, Россия

Практические приложения, в которых приходится прибегать к рассмотрению дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями или кусочно-гладких динамических систем, необычайно широки. Это, например, системы с сухим трением и виброударные осцилляторы, релейные и импульсные системы автоматического управления, широкий класс устройств современной силовой электроники.

Фазовые траектории рассматриваемых динамических систем сшиваются из отдельных гладких участков. Усложнение колебаний в кусочно-гладких системах связано с двумя типами бифуркаций. Первый тип — точно такой же, как и в гладких системах. Это так называемые локальные и глобальные бифуркации.

Второй тип не имеет аналогов в гладких системах и связан с ситуацией, когда траектория периодического движения проходит через границу одной из поверхностей сшивания, что вызывает нарушение условий существования этого движения. Такие бифуркации получили название C-бифуркаций или "border-collision bifurcations".

Простейшей бифуркационной картине при C-бифуркациях соответствует непрерывный переход решения одного типа в решение в другого типа. Возможны и более сложные ситуации, например, удвоение, утроение периода колебаний, слияние двух решений различных типов и последующее их исчезновение, рождение хаотического аттрактора из периодического движения.

Изучению C-бифуркаций и нелинейных явлений в кусочно-гладких системах в последние годы уделяется пристальное внимание. Теоретические исследования стимулируются потенциальными приложениями результатов во многих областях науки и техники. Они охватывают приложения к механике, теории управления, современной силовой электронике, экономическим и биологическим системам.

В данной работе изучаются новые случаи сложного поведения кусочно-гладких систем при C-бифуркациях-рождение инвариантного двумерного тора из периодической орбиты и состояния равновесия. Мы показываем, что в кусочно-гладких системах существуют два механизма рождения двумерного инвариантного тора через C-бифуркацию.

В первом случае тор возникает мягко из периодической орбиты. В такой бифуркации комплексно-сопряженная пара мультипликаторов скачком выходит из единичного круга, что соответствует катастрофической потере устойчивости. Потеря устойчивости сопровождается появлением резонансного или эргодического тора. Во втором случае инвариантный тор рождается из устойчивого состояния равновесия. Здесь состояние равновесия исчезает на C-бифуркационной границе и мягко сменяется неустойчивым циклом типа фокус, окруженным резонансным или эргодическим тором. В обоих случаях характерный размер инвариантного тора ("диаметр") при удалении от точки бифуркации изменяется приблизительно линейно от нуля в отличие от параболической зависимости, характерной для классической бифуркации Неймарка–Саккера.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 06-01-00811-а)

On Torus Birth Bifurcations in Piece-Wise Smooth Dynamical Systems

Zhusubaliyev Zh.T. and Chevychelov S.Yu.

Kursk State Technical University, Russia

Considering a two-dimensional system of nonautonomous differential equations with discontinuous right-hand, the paper describes a new type of border-collision bifurcation that can lead to appearance of quasi-periodicity.

We demonstrate how a two-dimensional torus can arise from a periodic orbit and a stable equilibrium point through a border-collision bifurcation. Under variation of the parameters, the periodic orbit or equilibrium may collide with a discontinuity boundary between two smooth regions in the phase space. When this happens, one can observe a variety of different bifurcation scenarios. One scenario is the continuous transformation of the stable equilibrium into an unstable period-1 focus, and the associated formation of a two-dimensional (ergodic or resonant) torus. The second option is that two complex-conjugate multipliers jump abruptly from the inside to the outside of the unit circle. This bifurcation result in the birth of a two-dimensional torus. In both cases the "diameter" of the torus develops approximately linearly with distance to the bifurcation point as opposed to the characteristic parabolic form of the well-known Neimark-Sacker bifurcation.

РЕАЛИЗАЦИЯ ФЕНОМЕНОВ КОМПЛЕКСНОЙ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ В СВЯЗАННЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

Исаева О.Б.

Саратовский филиал Института радиотохники и электроники РАН, Россия

Известная универсальность Фейгенбаума связана с последовательностью бифуркаций удвоения периода и переходом к хаосу для семейства одномерных отображений с квадратичным экстремумом. При переходе к комплексным числам в отображении, наряду с удвоениями периода могут возникать новые особые типы бифуркаций - утроения, учетверения и т.д. На плоскости комплексного параметра при этом возникают области, в которых реализуется периодическая динамика со всевозможными циклами, окруженные сложным узором для которого характерна ограниченная в фазовом пространстве хаотическая динамика. Совокупность этих областей образует популярный фрактальный объект — множество Мандельброта. С ним связан целый ряд уникальных феноменов, характерных лишь для определенного класса систем — для комплексных аналитических отображений, удовлетворяющих условиям Коши-Римана.

В работе изучен вопрос о возможности физической реализации формальных, абстрактных математических феноменов комплексной аналитической динамики. Разработана методика конструирования физических систем (и экспериментальных устройств), позволяющих реализовывать указанные нетривиальные явления. Методика основана на рассмотрении специальным образом симметрично связанных систем (отображений, осцилляторов с периодическим внешним воздействием, автономных потоковых систем).

Кроме того, построена колебательная система, моделирующая динамику квадратичного комплексного отображения в сечении Пуанкаре, основной механизм динамики которой состоял в эстафетной передаче через специальную связь возбуждения между колебательными подсистемами с различающимися в два раза собственными частотами и медленным противофазным изменением параметров диссипации. Действительной и мнимой частям переменной квадратичного отображения при этом отвечали координата и скорость одной из подсистем.

Рассмотрен важный с точки зрения возможной физической реализации вопрос о влиянии неаналитических возмущений и различных типов шума на критические явления, характерные для комплексных аналитических отображений. Изучены универсальные скейлинговые характеристики, связанные со сценариями перехода к хаосу в комплексных отображениях.

Работа поддержана грантами РФФИ (06-02-16619, 04-02-04011) и INTAS (05-109-5262)

Realization of the Phenomena of Complex Analytic Dynamics in Coupled Oscillatory Systems

Isaeva O.B.

Institute of radio-engineering and electronics of RAS, Saratov, Russia

The problem of possibility of physical realization of formal mathematical phenomena of complex analytic dynamics (such as fractal Mandelbrot and Julia sets) is investigated. Two methodologies of building up of physical systems (and experimental devices), manifesting such non-trivial phenomena are developed. First algorithm is based on the consideration of pair systems (discrete maps, oscillators with periodic external force or autonomous systems) from Feigenbaum class of criticality with special symmetric coupling. Another one imply coupled oscillatory systems with alternating excitation and relay transition of signal.

МЕТОД РЕКУРРЕНТНЫХ ДИАГРАММ В АНАЛИЗЕ ГЕЛИОГЕОФИЗИЧЕСКИХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Киселёв В.Б.

Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, Россия

В 1987 году Экман и соавторы [Eckmann J.-P., Kamphorst S.O., Ruelle D. Recurrence Plots of Dynamical Systems // Europhysics Letters 5, 1987, pp. 973-977] предложили способ отображения m-мерной фазовой траектории состояний $\vec{x}(t)$ на двумерную квадратную двоичную матрицу размером $N \times N$, в которой 1 (черная точка) соответствует повторению состояния при некотором времени i в некоторое другое время j, а обе координатные оси являются осями времени. Такое представление было названо рекуррентной диаграммой (recurrence plot, RP), так как оно фиксирует информацию о рекуррентном поведении системы.

Математически вышесказанное описывается как

$$\mathbf{R}_{i,j}^{m,\varepsilon_i} = \Theta(\varepsilon_i - \|\vec{x}_i - \vec{x}_j\|), \quad \vec{x} \in \mathsf{R}^m, \quad i,j = 1\ldots N,$$

где N — количество рассматриваемых состояний x_i, ε_i — размер окрестности точки $\vec{x}$ в момент i, $\|\cdot\|$ — расстояние и $\Theta(\cdot)$ — функция Хэвисайда.

Внешний вид рекуррентной диаграммы позволяет судить о характере протекающих в системе процессов, наличии и влиянии шума, наличии состояний повторения и замирания (ламинарности), совершении в ходе эволюции системы резких изменений состояния (экстремальных событий).

Исследовалась структура геомагнитных пульсаций типа Pc1, которые представляют собой квазисинусоидальные сильно модулированные колебания в диапазоне порядка одного герца. Построены рекуррентные диаграммы (recurrence plot) для самих пульсаций Pc1, огибающей и фильтрованных колебаний. Полученные диаграммы сравнивались с диаграммами для простейших сигналов (синусоида, комбинации синусоид) и сложных (обобщенное броуновское движение, множество Мандельброта, система Лоренца). Оказалось, что при увеличении пространства вложения (m) структура рекуррентных диаграмм разрушается для синусоидальных сигналов и для несущей пульсаций Pc1. В тоже время структура рекуррентных диаграмм для огибающей пульсаций Pc1 и сложных сигналов (обобщенное броуновское движение, множество Мандельброта, система Лоренца) сохраняется.

Таким образом, можно сказать, что:

1. Геомагнитные пульсации типа Pc1 представляет собой колебания, где одномерный квазисинусоидальный сигнал модулированный хаотическим фрактальным процессом;

2. Рекуррентные диаграммы можно использовать для обнаружения фрактальных трендоустойчивых процессов.

Using of the Recurrence Plots for Heliogeophysical Time Series Analysis

Kiselev V.B.

Saint Petersburg University of Information Technologies, Mechanics and Optics, Russia

With recurrence plots [Eckmann J.-P., Kamphorst S. O., Ruelle D. Recurrence Plots of Dynamical Systems // Europhysics Letters 5, 1987, pp. 973-977] we can investigate the m-dimensional phase space trajectory through two-dimensional representation of its recurrences. Such recurrence of a state at time i at a different time j is pictured within a two-dimensional squared binary matrix with black and white dots, where black dots mark a recurrence, and both axes are time axes. This can be mathematically expressed as

$$\mathbf{R}_{i,j}^{m,\varepsilon_i} = \Theta(\varepsilon_i - \|\vec{x}_i - \vec{x}_j\|), \quad \vec{x} \in \mathsf{R}^m, \quad i,j = 1\ldots N,$$

where N is the number of considered states x_i, ε_i is a threshold distance, $\|\cdot\|$ is a norm and $\Theta(\cdot)$ — the Heaviside function.

The view of recurrence plot provide a possibility to talk about properties of processes in investigated system, to find out presence and influence of noise, to find out recurrent states in time series, to find out extreme events and state changes in system's evolution.

The structure of Pc1 geomagnetic pulsations were investigated. The Pc1 pulsations is a quasisinusoidal highly modulated oscillations in the range about 1 hertz. Recurrence plots of the Pc1 pulsations, envelope and filtered oscillations were built.

RP structure of the Pc1 pulsations envelope with increasing of embedding dimension m remains as for complicated chaotic time series such as Lorentz attractor. But RP structure of the Pc1 pulsations carrier destructs as for sinusoidal signal.

Conclusions:
1. Pc1 geomagnetic pulsations is a quasisinusoidal oscillations modulated with fractal chaotic process;
2. PR can be used for detecting of fractal processes with steady trends.

КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ «В БОЛЬШОМ» ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАШИН ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

Кондратьева Н.В., Леонов Г.А.

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

В настоящем докладе исследуется математическая проблема динамической устойчивости (устойчивости «в большом») синхронных и асинхронных электрических машин и тесно связанная с этой проблемой задача о предельной нагрузке.

В качестве наиболее простого адекватного описания динамики асинхронной машины рассматривается система

$$\begin{aligned} \dot{s} &= ay + \gamma, \\ \dot{y} &= -cy - s - xs, \\ \dot{x} &= -cx + ys. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь безразмерные переменные s — скольжение ротора, y, x — квазитоки в обмотках; безразмерные параметры c — сопротивление обмоток, γ — момент внешней нагрузки на валу ротора.

Предположим, что $\gamma < 2c^2$ и введем обозначения

$$\varphi(s) = -\frac{\gamma}{c}s^2 + as - c\gamma, \quad \Gamma = 2\max_{\lambda\in(0,c)}\Big[\lambda\Big(c - \lambda - \frac{\gamma^2}{4c^2(c-\lambda)}\Big)\Big]^{1/2}.$$

Если $\gamma < a/2$, функция $\varphi(s)$ имеет два нуля: $s_0 \in (0, c)$ и $s_1 > c$. Из неравенства $\gamma < 2c^2$ следует, что $\Gamma > 0$.

Теорема. Пусть для решения уравнения $\ddot{\theta} + \Gamma\dot{\theta} + \varphi(\theta) = 0$ с начальными данными $\theta(0) = \dot{\theta}(0) = 0$ выполнено условие $\theta(t) \le s_1, \forall t \ge 0$. Тогда решение системы (1) с начальными данными $s(0) = y(0) = x(0) = 0$ удовлетворяет соотношениям $\lim\limits_{t\to+\infty} s(t) = s_0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = -\frac{\gamma}{a}$, $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = -\frac{\gamma s_0}{ac}$.

В результате получена оценка

$$M \le \frac{\sqrt{3}}{2}M_{max}$$

для допустимого резкопеременного наброса нагрузки M на асинхронный двигатель, работающий на холостом ходу. Здесь M_{max} – максимальная нагрузка, при которой двигатель имеет рабочие режимы.

В докладе приводится также решение задачи о предельной нагрузке для синхронной машины.

Global Stability of Electromechanical Systems

Kondratieva N.N., Leonov G.A.

Saint Petersburg State University, Russia

The dynamical stability analysis of synchronous and asynchronous machines is presented. The estimations of discontinuous load ratings are obtained.

ВИЗУАЛИЗАЦИЯ СЛОЖНОЙ СТРУКТУРЫ ПРОСТРАНСТВА ПАРАМЕТРОВ НЕАВТОНОМНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПРИ ПОМОЩИ КАРТ ЛЯПУНОВСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ

Кузнецов А.П., Савин А.В.

Саратовский государственный университет, Россия
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН, Россия

При анализе поведения динамической системы, особенно при переходе к хаосу, большую роль играет исследование бифуркационной структуры ее пространства, позволяющее выявить типичные конфигурации бифуркационных линий, а также продемонстрировать наглядные иллюстрации свойства самоподобия (скейлинга) вблизи критической точки. При наличии непериодического (например, шумового или иерархически организованного) воздействия на систему представляется целесообразным применять для этой цели метод построения карт ляпуновских показателей [1,2]. В соответствии с этим методом в каждой точке пространства параметров вычисляется величина старшего ляпуновского показателя, которая затем кодируется оттенком серого цвета. Обычно соответствие выбирается так, что большему (по абсолютной величине) отрицательному значению соответствует более темный оттенок серого цвета. Этот метод приводит к весьма эффектным иллюстрациям, которые могут содержать очень тонкие детали во все более малых масштабах карты.

В настоящей работе метод построения карт ляпуновских показателей применяется к анализу устройства пространства параметров динамических систем двух типов. Во-первых, это системы с удвоениями периода, находящиеся под воздействием своего рода фрактального сигнала [3], обладающего иерархической структурой и при надлежащем выборе параметров аппроксимирующем критические аттракторы различных типов [2]. В качестве одной из таких систем рассмотрено логистическое отображение:

$$x_{n+1} = \lambda - x_n^2 + \varepsilon y_n,\ y_{2n+1} = -\alpha(1+y_n),\ y_{2n} = \beta(1+y_n), y_0 = \beta/(1-\beta), \quad (1)$$

где α и β — параметры фрактального сигнала, которому отвечает движение изображающей точки по двухмасштабному канторову множеству. Анализ структуры карт ляпуновских показателей на плоскости параметров (λ, ε) и (λ, α) позволяет продемонстрировать ряд интересных явлений, в частности, эффект потери гладкости границы хаоса при увеличении масштабных параметров сигнала.

Другой системой являются два неидентичных логистических отображения с несимметричной связью, находящиеся под шумовым воздействием. В такой системе реализуется особое критическое поведение, характеризующееся сосуществованием двух сценариев перехода к хаосу: через фейгенбаумовские удвоения периода и через разрушение квазипериодических движений [4]. При воздействии на систему внешнего шума для наблюдения самоподобной структуры пространства параметров в окрестности критической точки необходимо, как было показано в [5], при переходе к каждому следующему уровню скейлинга уменьшать амплитуду шума в $\gamma = 8.206143...$ раз. В настоящей работе приведены соответствующие иллюстрации скейлинга в пространстве параметров такой системы в окрестности критической точки.

Работа поддержана грантом РФФИ № 06-02-16773.

Литература

[1] Marcus M. //Computer in Physics, 1990, Sept/Oct, p. 481
[2] Кузнецов С.П. Динамический хаос. М.: Физматлит, 2006
[3] Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Сатаев И.Р. //Изв. ВУЗ: ПНД, 1995, т. 3, № 5, с. 64.
[4] Kuznetsov S.P., Sataev I.R. //Physica D, 1997, v. 101, p. 249.
[5] Кузнецов А.П. и др. //Изв. ВУЗ: ПНД, 2006, т. 14, № 5, с. 62.

The Visualization of Complex Structures in the Parameter Plane of Driven Dynamical Systems by the Charts of Lyapunov Exponents

Kuznetsov A.P., Savin A.V.

Saratov State University, Russia
Institute of Radio-Engineering and Electronics of RAS, Saratov Branch, Russia

The method of charts of Lyapunov exponents is used to carry out the two-parameter analysis of single and coupled discrete maps with period-doubling driven by nonperiodical signals. The structure of the parameter plane of such systems is investigated and the self-similarity (scaling) near the "critical point" is demonstrated.

МЕТОД КАРТ ЛЯПУНОВСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ В ИССЛЕДОВАНИИ СВЯЗАННЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ С ШУМОМ

Кузнецов А.П., Седова Ю.В.

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, Россия
Саратовский филиал ИРЭ РАН, Россия

Связанные системы с удвоениями периода являются одним из популярных и глубоко изученных объектов нелинейной динамики [1, 2]. Определенным направлением исследований таких систем является изучение критических явлений в идентичных подсистемах у порога хаоса, т.е. явлений, допускающих ренормгрупповое описание по аналогии с известным анализом Фейгенбаума. В работе с помощью построения карт ляпуновских показателей исследуется критическая динамика связанных логистических отображений с двумя типами связи — диссипативным и инерционным. Для построения карты ляпуновских показателей в каждой точке пространства параметров вычисляется значение ляпуновского показателя Λ и кодируется в соответствии с этим в градациях серого.

Важнейшим выводом теории, основанной на ренормгрупповом анализе, является представление о скейлинге, т.е. о самоподобном устройстве пространства параметров. Отметим, однако, что первые работы в этом направлении были выполнены в середине 80-х годов, и иллюстрации скейлинга были даны всего для нескольких бифуркационных точек и нескольких «уровней» удвоений. В настоящее время развитие компьютерной техники позволяет дать более «весомые» иллюстрации скейлинга, которые представлены в настоящей работе. Кроме того, в начале 80-х годов был выполнен ряд исследований с применением метода ренормгруппы по воздействию шума на классическую одиночную систему с удвоениями периода (см., например, [3, 4]). Что касается связанных систем с шумом, то подобное исследование в настоящее время известно для своего рода альтернативной ситуации односторонней связи существенно неидентичных подсистем. Поэтому представляется важным обсудить соответствующие вопросы для случая идентичных связанных подсистем со взаимной связью. Нам кажется полезным в этом плане воспроизвести также простейший вариант РГ анализа в одиночной системе с шумом, поскольку именно его «технология» и сопоставление с РГ анализом идентичных связанных систем делает понятным свойство скейлинга в связанных системах с шумом. Последнее будет проверено в численных экспериментах в различных сечениях пространства параметров для разных типов связи между подсистемами.

Работа выполнена при поддержке РФФИ-ННИО (грант № 04-02-04011), Фонда содействия отечественной науке, аналитической ведомственной программы Минобрнауки РФ и CRDF «Развитие научного потенциала высшей школы» (CRDF BRHE REC-006 SR-006-X1/BF5M06 Y3-P-06-07) и гранта Президента РФ (МК-4162.2006.2).

Литература

[1] Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Астахов В.В. Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем // Изд-во Саратовского университета. 1999. 367 с.
[2] Кузнецов С.П. Динамический хаос // М.: Физматлит. 2006. 356 с.
[3] Crutchfield J.P., Nauenberg M., Rudnik J. Scaling for external noise at the onset of chaos // Phys. Rev. Lett. 1981. Vol. 46, № 14. P. 933.
[4] Shraiman B., Wayne C.E., Martin P.C. Scaling theory for noisy period-doubling transitions to chaos // Phys. Rev. Lett. 1981. Vol. 46, № 14. P. 935.

Method of Lyapunov Exponent Charts at Investigation of Coupled Maps with Noise

Kuznetsov A.P., Sedova J.V.

Chernyshevsky Saratov State University, Russia
Kotel'nikov Institute of Radio-Engineering and Electronics of RAS, Saratov Branch, Russia

In paper the influence of noise in system of identical coupled logistic maps with two types of coupling – dissipative and inertial – is discussed. The corresponding renormalization group analysis is presented. We consider scaling property in the presence of noise and give necessary illustrations in style of numerical experiment.

СИСТЕМЫ СИНХРОНИЗАЦИИ В СХЕМОТЕХНИКЕ

Кузнецов Н.В., Леонов Г.А., Селеджи С.М.

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

Системы фазовой автоподстройки (ФАПЧ) широко распространены в радиотехнике и электросвязи. После их изобретения в 30–40-х годах двадцатого века стала интенсивно развиваться как практика применения, так и теория систем ФАП [1,5,6].

Одно из первых применений ФАПЧ связано с задачами передачи данных по радиосигналу. В радиотехнике ФАПЧ применяют для синхронизации несущей, восстановление сигнала, демодуляции, деления и умножения частоты. При появлении архитектур использующих чипы, работающие на разных частотах, системы ФАПЧ стали использоваться для генерации внутренних частот чипов, генерации частот и синхронизации работы отдельных устройств и шин передачи данных. Так, например, современные материнские платы компьютеров содержат различные чипы и шины передачи данных, работающие на разных частотах и часто требующие синхронизации. В дальнейшем, системы ФАПЧ получили большое применение для устранения проблемы расфазировки, синхронизации и генерирования частот для микроархитектур чипов. В настоящее время ФАПЧ применяется для решения задачи энергосбережения для многоядерных систем.

В данной работе, с помощью разработанных методов анализа систем с цилиндрическим фазовым пространством[1,2,3,4], получены результаты, позволяющие проводить синтез систем ФАПЧ с импульсными генераторами. Эти позволяют провести для импульсных тактовых генераторов параллельное рассмотрение: на уровне электронной реализации и на уровне фазовых соотношений, где можно применять общие принципы теории фазовой синхронизации. Получены критерии глобальной устойчивости систем ФАПЧ, получено обобщение результатов американских ученых Линсея и Витерби [5,6].

Литература

[1] Леонов Г.А., Селеджи С.М., Системы фазовой синхронизации в аналоговой и цифровой схемотехникею.СПб: Невский диалект, 2002.

[2] Leonov G. & Seledghi S. Stability and bifurcations of phase-locked loops for digital signal processors // International journal of bifurcation and chaos. 2005, Vol. 15, No. 4, pp. 1347-1360.

[3] Leonov G. & Seledghi S. Design of phase-locked loops for digital signal processors // International Journal of Innovative Computing, Information & Control. 2005, Vol. 1, No. 4, pp. 779-789.

[4] Леонов Г.А., Фазовая синхронизация. Теория и приложение // Автоматика и телемеханика, N 10, 2006, стр. 47-85.

[5] Viterbi J., Principles of Coherent Communications. NY: McGraw-Hill, 1966.

[6] Lindsey W.C. Synchronization System in Communication and Control. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1972.

Phase Locked-Loops in Circuit Techniques

Kuznetsov N.V., Leonov G.A., Seledzhi S.M.

Saint-Petersburg State University, Russia

Phase-locked loops (PLLs) are frequently encountered in radio engineering and communication. Survey of the application of PLL in computer architectures and microprocessors is given. Design of PLL in terms of phase relations is considered. Generalization of Viterbi theorem on the form of phase detector characteristic is made.

ОЦЕНКА ПАРАМЕТРА ГОМОКЛИНИЧЕСКОЙ БИФУРКАЦИИ В СИСТЕМЕ ЛОРЕНЦА

Леонов Г.А., Оленчук С.А.

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

Целью работы является изучение некоторых свойств сепаратрисы системы Лоренца. Численные эксперименты показывают, что при некоторых значениях параметров одномерная неустойчивая сепаратриса стремиться к одному из положений равновесия системы. При изменении отдельных параметров сепаратриса начинает стремиться к другому положению равновесия. Как численные эксперименты, так и применение различных методов типа метода точечных отображений позволяют утверждать, что существуют значения, при которых неустойчивая сепаратриса возвращается в седло, и образуется так называемая петля сепаратрисы, или гомоклиническая траектория (тоже самое, очевидно, происходит и со второй симметричной сепаратрисой, так что в фазовом пространстве системы образуется сепаратрисная «восьмерка»). Мы докажем существование такого бифуркационного значения одного из параметров (при фиксированных остальных), и, таким образом, сможем установить это для любых значений параметров. Особенностью представленного метода является его высокая точность, наглядность и простота для реализации на компьютере. Метод основан на применении систем сравнения. Мы строим две последовательности систем сравнения, которые приближают сепаратрису системы Лоренца сверху и снизу соответственно. Системы из последовательностей явно не разрешимы, поэтому мы будем и для них строить системы сравнения. Попытки оценки решений систем из последовательностей, в том числе и с помощью систем сравнения, предпринимались и ранее, однако они приводили к технически сложным и недостаточно точным результатам, причем, оценивались решения только сверху. Предлагаемый в докладе способ гораздо проще ранее использовавшихся и интуитивно более понятный. Он дает возможность оценить сепаратрису сверху и снизу, и тем самым дать необходимое и достаточное условие наличия гомоклинической сепаратрисы. Кроме того, в виду особенности метода, он позволяет делать оценки сколь угодно точные и точность этого метода ограничена лишь возможностями используемого компьютера. Способ предполагает оценку решений систем из последовательностей с помощью построения для них численных верхних и нижних оценок явно интегрируемых систем. Причем верхние и нижние оценки сходятся к самому решению, т.е. мы можем приблизить его сколь угодно точно. Таким образом, мы сможем сколь угодно точно приблизить решения систем из последовательностей, которые сходятся к сепаратрисе системы Лоренца (одна из последовательностей является верхней оценкой, вторая — нижней), а следовательно мы можем получить сколь угодно точные верхнюю и нижнюю оценку для сепаратрисы. Основываясь на этом получен критерий, позволяющий определить, является ли сепаратриса гомоклинической траекторией или нет, а т.ж. разработан алгоритм, который позволяет проверить это для любого набора параметров.

Lorenz System Homoclinic Bifurcation Parameter Approximation

Leonov G.A., Olenchuk S.A.

Saint-Petersburg State University, Russia

Lorenz system separatrix behavior depending on the parameters values is studied. We are interested in the parameter value (for any fixed other parameters values) when the separatrix becomes a homoclinic trajectory, i.e. returns to the equilibrium point from which it comes from. New way of using comparative systems for approximating this parameter is presented. The main benefit of the new method is its simplicity and high precision.

О ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ СУЩЕСТВОВАНИЯ ГОМОКЛИНИЧЕСКОЙ ТРАЕКТОРИИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ЛОРЕНЦА

Ляшко С.А.

Балашовский филиал Саратовского государственного университета, Россия

Рассмотрим систему Лоренца

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\sigma(x-y), \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= -bz + xy, \end{aligned} \tag{1}$$

где σ, b, r — положительные параметры, $r > 1$.

Пусть $\sigma(s)$, $b(s)$, $r(s)$ — гладкий путь в пространстве параметров этой системы. Обозначим через $x(t)^+$, $y(t)^+$, $z(t)^+$ сепаратрису седла $x = y = z = 0$, удовлетворяющую соотношениям

$$\lim_{t\to\infty} x(t)^+ = \lim_{t\to\infty} y(t)^+ = \lim_{t\to\infty} z(t)^+ = 0, \quad x(t) > 0, \ \ \forall t \le t_0,$$

где $t_0 \ll 0$. Г.А. Леоновым доказан следующий результат.

Пусть $2\sigma(s) > b(s)$, $\forall s \in [0,1]$ и для любого $s \in [0, s_0)$ существуют числа $T(s) > \tau(s_0)$ такие, что выполнены следующие соотношения:

$$x(T)^+ = \dot{x}(\tau)^+ = 0, \tag{2}$$

$$x(t)^+ > 0, \ \ \forall t < T, \tag{3}$$

$$x(t)^+ \ne 0, \ \ \forall t < T, \ \ t \ne \tau. \tag{4}$$

Предположим, что для $s = s_0$ не существует пары $T(s_0) > \tau(s_0)$ такой, что выполнены соотношения (2)-(4). Тогда при $s = s_0$ траектория $x(t)^+$, $y(t)^+$, $z(t)^+$ является гомоклинической:

$$\lim_{t\to\infty} x(t)^+ = \lim_{t\to\infty} y(t)^+ = \lim_{t\to\infty} z(t)^+ = 0.$$

Рассмотрим специальный путь $\sigma(s) \equiv \sigma_0$, $r(s) \equiv r_0$, $b(s) : b(0) = 0$, $b(1) = 2\sigma_0$, $b(s) \in (0, \sigma_0)$, $\forall s \in (0,1)$, и два предельных случая: $|b(s) - 2\sigma_0| \le \varepsilon$, где ε — достаточно малое число, и $b(0) = 0$. Г.А. Леонов показал, что в первом предельном случае сепаратриса седла $x(t)^+$, $y(t)^+$, $z(t)^+$ стремится при $t \to +\infty$ к устойчивому состоянию равновесия и $x(t)^+ > 0$, $\forall t \in R^1$.

Автором получены достаточные условия на параметры σ и r выполнения соотношений (2)–(4) для системы (1) во втором предельном случае. Теперь из приведенных выше результатов Г.А. Леонова и непрерывной зависимости от параметров куска сепаратрисы $x(t)^+$, $y(t)^+$, $z(t)^+$ $(t \le T)$ следует, что при этих условиях (которые, например, при $\sigma = 10$ выполняются для $r \in [28,23; 35,43]$ а при $\sigma = 16$ — для $r \in [39,84; 55,92]$) существует такое $b \in (0, 2\sigma)$ что система (1) имеет гомоклиническую траекторию.

About Sufficient Conditions of the Lorenz System Homoclinic Orbit Existence

Lyashko S.A.

Balashov branch of Saratov State University, Russia

The property of unstable manifold of the equilibrium state (0,0,0) of the Lorenz system is proved. It furnished a proof of a sufficient condition of homoclinic orbit existence.

ДИНАМИЧЕСКИЙ ХАОС В НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Магницкий Н.А.

Институт системного анализа РАН, Россия

В работах [1-6] предложена новая универсальная теория динамического хаоса в нелинейных диссипативных системах дифференциальных уравнений, включая автономные обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения с частными производными и с запаздывающим аргументом. Основными характерными чертами новой теории являются: существование единственного типа нерегулярных аттракторов во всех нелинейных диссипативных системах дифференциальных уравнений (сингулярные аттракторы), отсутствие положительного показателя Ляпунова на сингулярном аттракторе, существование единственного универсального сценария перехода к динамическому или пространственно-временному хаосу в нелинейных диссипативных системах дифференциальных уравнений через субгармонический каскад бифуркаций устойчивых циклов или двумерных торов.

В основе новой теории динамического хаоса лежат: теория Фейгенбаума-Шарковского субгармонического каскада бифуркаций циклов в одномерных унимодальных отображениях, теория Магницкого особой точки типа ротор двумерной неавтономной системы дифференциальных уравнений, являющаяся мостом между автономными системами дифференциальных уравнений и одномерными отображениями, и теория гомоклинического каскада бифуркаций, следующего за каскадом Шарковского. Все положения теории Фейгенбаума-Шарковского-Магницкого строго и в деталях доказаны в [1-6]. Там же продемонстрирована универсальность ФШМ-теории и уникальная широта ее применимости к различным системам дифференциальных уравнений, начиная со всех классических трехмерных автономных хаотических систем, таких как системы Лоренца, Ресслера, Чуа, и кончая системами нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными и с запаздывающим аргументом, такими как уравнение Курамото-Цузуки (зависящее от времени уравнение Гинзбурга-Ландау) и уравнение Мэкки-Гласса.

В настоящем докладе показано, что универсальная ФШМ-теория динамического хаоса в диссипативных системах нелинейных дифференциальных уравнений описывает также переход к хаосу и в некоторых классических нелинейных дифференциальных уравнениях второго порядка с периодическими коэффициентами, таких, например, как уравнение Дюффинга-Холмса, обобщенное уравнение Матье и некоторых других уравнениях, анализ которых иными методами не представлялся возможным в течение многих десятилетий.

Литература

[1] Магницкий Н.А. О природе хаотических аттракторов нелинейных диссипативных систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Нелинейная динамика и управление. Вып.4, М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004, с.37-58.
[2] Магницкий Н.А., Сидоров С.В. Новые методы хаотической динамики. -М.:УРСС, 2004, 320с.
[3] Магницкий Н.А., Сидоров С.В. Особые точки типа ротор неавтономных систем дифференциальных уравнений и их роль в образовании сингулярных аттракторов нелинейных автономных систем тем. // Дифференц. уравн. т. 40, N. 11, 2004. с. 1500-1514.
[4] Magnitskii N.A. On singular attractors of dissipative systems of nonlinear ordinary differential equations.// Proc. of ENOC-2005 Int. Conf.- Eindhoven: 2005.- Univ. Technol.-P. 1285-1294.
[5] Магницкий Н.А., Сидоров С.В. О переходе к диффузионному хаосу через субгармонический каскад бифуркаций двумерных торов: численное исследование. // Дифференц. уравн. т. 41, N. 11, 2005. с. 1550-1558.
[6] Magnitskii N.A., Sidorov S.V. New methods for chaotic dynamics.- World Scientific, Singapore, 2006, 363p.

Dynamical Chaos in Nonlinear Differential Equations of the Second Order with Periodic Coefficients

Magnitskii N.A.

Institute for Systems Analysis of Russian Academy of Sciences, Russia

It is shown that the universal Feigenbaum-Sharkovskii-Magnitskii(FSM) theory of dynamical chaos in nonlinear dissipative systems of differential equations is applied also for nonlinear non-autonomous differential equations of the second order with periodic coefficients such as Duffing-Holmes equation, generalized Matie equation and so on.

ХАОС И СТРУКТУРЫ В НЕЛИНЕЙНЫХ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ВАЙДЛИХА – ТРУБЕЦКОВА

Магницкий Ю.Н.

Институт системного анализа РАН, Россия

Класс нелинейных динамических моделей, представляющих собой двумерные системы нелинейных дифференциальных уравнений с правыми частями логистического типа, был предложен В. Вайдлихом в [1-2] для качественного описания весьма широкого круга социально-экономических процессов. Однако, модели Вайдлиха при описании явлений, происходящих в обществе, учитывают лишь два наиболее существенных, по мнению их автора, фактора. Это оказывается достаточным для описания некоторых колебательных, периодических во времени процессов, но совершенно недостаточно для описания более сложных колебательных и непериодических (хаотических) режимов. В связи с этим Д.И. Трубецким в [3] было предложено обобщение класса нелинейных моделей Вайдлиха на трехмерные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которые, как известно, допускают сложные нерегулярные и, в том числе, хаотические решения. В [3] проведен анализ нескольких социально-экономических моделей такого типа и показано, что в некоторых случаях эти модели могут иметь периодические решения различных периодов и даже нерегулярные (хаотические) аттракторы. Однако, невыясненным остался ответ на вопрос, каким образом в этих моделях происходит переход от периодических колебаний к хаотическим и какие нерегулярные аттракторы могут рождаться в процессе такого перехода?

В представленном докладе показано, что переход к хаосу в нелинейных социально-экономических моделях Вайдлиха – Трубецкого происходит в полном соответствии с универсальным ФШМ-сценарием перехода к динамическому хаосу в диссипативных нелинейных системах обыкновенных дифференциальных уравнений [4-7], т.е. через каскад бифуркаций Фейгенбаума удвоения периода устойчивых циклов, затем через субгармонический каскад бифуркаций Шарковского рождения устойчивых циклов любого периода вплоть до цикла периода три, и затем через гомоклинический каскад бифуркаций Магницкого. Таким образом, все нерегулярные аттракторы, рождающиеся в моделях Вайдлиха – Трубецкого в процессе перехода к динамическому хаосу, являются сингулярными аттракторами в смысле их определения в рамках ФШМ-теории.

Литература

[1] Weidlich W. Stability and cyclicity in social systems // Behavioral Science, 1988, 33, p.241.
[2] Weidlich W. Physics and social science - the approach of synergetics // Phys. Rep.,1991,v.204, 1, p.1-169.
[3] Трубецков Д.И. Введение в синергетику. Хаос и структуры. М.: УРСС, 2004, 240с.
[4] Магницкий Н.А. О природе хаотических аттракторов нелинейных диссипативных систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Нелинейная динамика и управление. Вып.4, М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004, с.37-58.
[5] Магницкий Н.А., Сидоров С.В. Новые методы хаотической динамики.-М.:УРСС, 2004, 320с.
[6] Магницкий Н.А., Сидоров С.В. Особые точки типа ротор неавтономных систем дифференциальных уравнений и их роль в образовании сингулярных аттракторов нелинейных автономных систем тем. // Дифференц. уравн. т. 40, N. 11, 2004. с. 1500-1514.
[7] Magnitskii N. A., Sidorov S.V. New methods for chaotic dynamics.- World Scientific, Singapore, 2006, 363p.

Chaos and Structures in Nonlinear Social-Economic Weidlich-Trubetskov Models

Magnitskii Y.N.

Institute for Systems Analysis of Russian Academy of Sciences, Russia

It is shown in the report that the transition to dynamical chaos in nonlinear social-economic Weidlich-Trubetskov models occurs in accordance with the universal Feigenbaum-Sharkovskii-Magnitskii (FSM) scenario of transition to dynamical or spatial-temporal chaos in nonlinear dissipative systems of differential equations.

ИДЕНТИФИКАЦИЯ И АНАЛИЗ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Новоселов О.Н.

Московский государственный университет леса, Россия

В предлагаемом докладе последовательно изложены прикладные математические методы идентификации и анализа динамических систем, не только линейных, но и нелинейных. Полученные результаты включают построение феноменологического разностного уравнения динамической системы по последовательности измеренных значений наблюдаемых параметров (***задача идентификации системы***); нахождение и отображение полного множества решений разностного уравнения, характеризующих все возможные поведения системы (***задача решения уравнения***); анализ множества решений и выявление условий возникновения критических режимов функционирования динамической системы, приводящих к катастрофам (***задача анализа поведений системы***). Приведены примеры для реальных систем из экологии, медицины, физики, экономики.

Identification and Analysis of Dynamical Systems

Novoselov O.N.

Moscow State Forest University, Russia

In the present talk, applied methods of identification and analysis of both linear and nonlinear dynamical systems are discussed. Examples for real systems of ecology, medicine, physics and economics are given.

ПОСТРОЕНИЕ ИНВАРИАНТНЫХ МЕР И ОЦЕНКА ЭНТРОПИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Осипенко Г.С.

Севастопольский национальный технический университет, Украина

Пусть $f : M \to M$ гомеоморфизм компактного многообразия M, f порождает дискретную динамическую систему $x(n+1) = f(x(n))$. Задача состоит в конструктивном построении семейства инвариантных мер и их применение для оценки энтропии системы. При этом желательно получить компьютерно ориентированный алгоритм реализующий такое построение.

Пусть $C = \{M(i)\}$ является покрытием (разбиением) области M. Построим символический образ G отображения f, который является ориентированным графом с вершинами $\{i\}$, соответствующими ячейкам $M(i)$, и ребрами $\{i \to j\}$, соответствующими не пустым пересечениям $f(M(i)) \bigcap M(j)$. Определим (инвариантный замкнутый) поток на графе следующим образом. Каждому ребру $i \to j$ сопоставим меру (вес) потока $m(ij)$ так, что будут выполнены следующие условия:

1) $\sum_{ij} m(ij) = 1$,

2) для каждого i выполнено $\sum_k m(ki) = \sum_j m(ij)$.

Первое равенство означает, что мера всего потока равна 1, то есть эта мера вероятностная. Второе равенство означает, что мера входящего потока в вершину i равна мере выходящего потока. Это свойство можно назвать инвариантностью меры потока, а сумму $\sum_j m(ij) = m(i)$ назовем мерой вершины i. Простой замкнутый цикл $\{i(1), \ldots, i(N)\}$ (т.е. вершины различны) длины N порождает замкнутый поток вида: $m(ij) = 1/N$ для дуг цикла и $m(ij) = 0$ в остальных случаях. Такой поток мы назовем простым потоком. Так как простых циклов конечное число, то простых потоков конечное число. Поток на графе порождает цепь Маркова с вероятностью переходов $p(ij) = m(ij)/m(i)$. Под энтропией потока мы будем понимать энтропию данной цепи Маркова. Семейство потоков на графе G есть выпуклый многогранник, который является выпуклой оболочкой простых потоков. Если отображение f имеет инвариантную меру w, то существует поток $m(ij)$ такой, что $m(i) = w(M(i))$, то есть можно сказать, что каждая инвариантная мера вкладывается в семейство потоков на графе. Энтропия потока на графе вычисляется по формуле

$$E = \sum_i m(i) \ln m(i) - \sum_{ij} m(ij) \ln m(ij).$$

Отметим, что энтропия простого потока равна нулю. Рассмотрим последовательное подразбиение покрытий $C(n)$. Такая последовательность порождает последовательность символических образов $G(n)$ и семейств потоков $\{m(ij)\}(n)$, которые вкладываются друг в друга. Возникает последовательность энтропий $\{E\}(n)$. В докладе описываются взаимосвязи полученных семейств потоков символических образов и инвариантных мер динамической системы, а так же энтропий этих объектов.

Construction of Invariant Measures and the Estimates for the Entropy of Dynamical Systems

Osipenko G.S.

Sevastopol National Technical University, Ukraine

The invariant measures are constructed on a symbolic image of a dynamical system with respect to a covering. The entropy is calculated through each measure. A sequence of symbolic images is generated by the subdivisions of the initial covering. The report describes the correlation between the constructed measures and the invariant measures of the dynamical system. The properties of the constructed entropies and the topological entropy of the system are considered.

КАТАСТРОФИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ И БАЛАНСИРОВКА

Павлов В.А., Павлов В.В.

Казанский Государственный технический университет им. А.Н. Туполева, Россия

Теоретически и экспериментально установлено неизвестное ранее явление — колебания катастрофического изменения формы составных тел в потоке газа или жидкости. Открытие относится к разделу аэрогидроупругости и доказывается автором на примере аэроупругости составных авиаконструкций, таких как крыло самолета с элероном или оперение с рулем*.

Сущность его состоит в том, что в составных стержнях типа оперения самолета с рулем, имеющим большую изгибную жесткость в плоскости хорд, многошарнирную навеску, угол отклонения от плоскости оперения и находящегося в потоке газа или жидкости, при некоторой скорости набегающего потока происходит катастрофический переход из одного равновесного состояния в другое, не смежное с первоначальным в область больших прогибов и закручивания. Угол отклонения руля во всех сечениях, кроме близких к качалке управления, уменьшается до нуля. При уменьшении скорости потока следует возвращение к исходному состоянию — обратная катастрофа. В некоторых случаях такие переходы следуют один за другим, образуя колебательный процесс. Эти разовые катастрофы или катастрофические колебания и являются предметом открытия.

Причиной катастрофических переходов являются силы взаимодействия, направленные по нормали к оси шарниров, соединяющей стержни, и лежащие в плоскости хорд, обнаруженные автором и названные лобовыми реакциями.

Известно, что плоские стержни, загруженные в плоскости наибольшей жесткости, могут потерять устойчивость плоской формы и перейти к смежной форме равновесия. В данном случае этот переход происходит в виде прощелкивания, перехода из деформированного состояния (изгиба и кручения стержней) к несмежной форме равновесия.

Доказательством того, что обнаружены новые колебания, а не один из видов флаттера составных конструкций, служит обнаруженный автором обратный эффект влияния на них балансировки рулей. Флаттера не существует, если в каждом сечении руля выполнена балансировка, а катастрофические колебания после проведения балансировки становятся более четкими и с большей амплитудой. Из сказанного выше делается вывод, что установлено неизвестное ранее явление — колебания катастрофического изменения формы составных тел в потоке газа или жидкости, которых нет в существующей классификации колебаний авиационных конструкций.

Открытие изменяет сложившиеся научные представления в области авиации, в частности в области прочности и аэроупругости авиаконструкций, представляющих собой составные стержни, пластины или оболочки, такие как крыло с элероном, закрылком или оперение с рулем. Родилось новое научное направление, которое можно сформулировать как «геометрически нелинейные математические модели статики и динамики стержней и составных стержневых конструкций, и их приложение к задачам движения, прочности и проектирования несущих и управляющих поверхностей летательных аппаратов, к исследованиям динамики лопастей несущих винтов».

Это позволило по-новому оценить механику деформирования и движения составного многозвенного крыла, найти силы взаимодействия между отдельными звеньями, взаимные перемещения звеньев (крыла с закрылком), определяемые элементами их соединений (кронштейнами и рельсами).

Литература

Сборник «Научные открытия», вып. 2, Москва, РАЕН, МААНОИ, 2005

*Открытие, диплом № 270. Явление образования колебаний катастрофического изменения формы составных тел в потоке газа или жидкости.

Catastrophic Fluctuations and Balancing

Pavlov V.A., Pavlov V.V.

Kazan State Technical University named by A.N. Tupolev, Russia

The unknown earlier phenomenon — fluctuations of catastrophic change of the form of compound bodies in a stream of gas is found. Discovery is proved by example of compound aviation designs. Unlike flatter catastrophic fluctuations are not eliminated by traditional balancing and rather provoked by it.

ТИПИЧНЫЕ ОТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ПРИБЛИЖЕННОЙ И ТОЧНОЙ ДИНАМИКОЙ

Пилюгин С.Ю.

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

Пусть f – гомеоморфизм (диффеоморфизм) метрического пространства (гладкого замкнутого многообразия) (M, dist).

Обозначим через $O(p, f)$ траекторию точки p в динамической системе, порождаемой отображением f.

Последовательность $\xi = \{x_k : k \in \mathbf{Z}\}$ называется d-псевдотраекторией, если

$$\mathrm{dist}(x_{k+1}, f(x_k)) < d, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Говорят, что f обладает свойством отслеживания (орбитального отслеживания, слабого отслеживания), если по любому $\epsilon > 0$ можно указать такое $d > 0$, что для любой d-псевдотраектории ξ найдется такая точка p, что

$$\mathrm{dist}(x_k, f^k(p)) < d, \quad k \in \mathbf{Z}$$

(соответственно,

$$\mathrm{dist}_H\left(\overline{\xi}, \overline{O(p,f)}\right) < \epsilon,$$

где dist_H – расстояние по Хаусдорфу, и

$$\xi \subset N(\epsilon, O(p,f)),$$

где $N(a, A)$ – a-окрестность множества A).

Эти свойства можно рассматривать как варианты устойчивости структуры множества траекторий динамической системы относительно малых разрывных возмущений.

В докладе обсуждаются C^k-плотность и C^k-типичность введенных свойств при $k = 0, 1$.

Generic Relations Between Approximate and Exact Dynamics

Pilyugin S.Yu.

Saint Petersburg State University, Russia

We discuss the problem of C^k-density and C^k-genericity for the usual, orbital, and weak shadowing properties.

ДИНАМИЧЕСКИЕ РЕЖИМЫ, БИФУРКАЦИИ И ХАОС В СИСТЕМАХ С ЧАСТОТНЫМ И ЧАСТОТНО-ФАЗОВЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

Пономаренко В.П.

НИИ прикладной математики и кибернетики
Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского, Россия

В докладе обсуждаются проблемы математического моделирования процессов нелинейной динамики в системах с частотным и комбинированным частотно-фазовым управлением. Математические модели рассматриваемых систем представляются нелинейными динамическими системами второго и более высокого порядка, в том числе с цилиндрическим фазовым пространством. Основное содержание исследований этих моделей составляют: определение стационарных движений; выделение области значений параметров, соответствующих установлению в системах синхронного режима; исследование сценариев эволюции асинхронных движений, изучение их бифуркаций и построение параметрических портретов; исследование механизмов перехода к хаотическому поведению и процессов дехаотизации движений. В качестве методического обеспечения исследований применяются методы качественной теории и теории бифуркаций динамических систем и численные методы и алгоритмы исследования нелинейной динамики.

Приведены результаты исследования процессов динамики в конкретных моделях систем с частотным и частотно-фазовым управлением. Установлены динамические режимы, свойственные исследуемым системам: синхронный режим, определяемый устойчивым состоянием равновесия; квазисинхронные периодические и хаотические режимы, определяемые в фазовом пространстве предельными циклами и хаотическими аттракторами колебательного типа; асинхронные регулярные и хаотические режимы, соответствующие предельным циклам и хаотическим аттракторам вращательного и колебательно-вращательного типов. Исследованы устойчивость синхронного режима и поведение систем на границе области устойчивости. Обнаружено, что для значений параметров вне области устойчивости системы могут демонстрировать: различные типы колебательных движений, включая хаотические; мягкие и жесткие переходы между колебательными режимами; одновременное существование различных колебательных состояний при фиксированных значениях параметров; хаотические колебания на двухспиральных аттракторах моделей; нерегулярное чередование в фазовом пространстве периодических и хаотических аттракторов при изменении параметров. Построены двухпараметрические портреты моделей и выделены области параметров с различными динамическими режимами. На основе построения и анализа однопараметрических бифуркационных диаграмм изучена эволюция динамических состояний при изменении параметров моделей. Выяснено, что переходы к хаотическому поведению осуществляются через бифуркации удвоения периода, седло-узловые бифуркации предельных циклов, разрушение инвариантных торов. Особый интерес представляют колебательные режимы, соответствующие двухспиральным хаотическим аттракторам и хаотическим аттракторам, образующимся при объединении двух хаотических тор-аттракторов; для таких режимов характерны нерегулярные переходы между различными колебательными состояниями. Обнаруженные эффекты и явления нелинейной динамики свидетельствуют о широких возможностях систем для синтеза аттракторов в фазовом пространстве, соответствующих регулярным и хаотическим колебаниям, и управления процессами хаотизации и дехаотизации колебаний.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 05-02-17409 и № 06-02-16499).

Dynamical Modes, Bifurcation, and Chaos in the Systems with Frequency and Frequency-Phase Control

Ponomarenko V.P.

Research Institute of Applied Mathematics and Cybernetics
of Nizhni Novgorod State University after N.I. Lobachevski, Russia

The problems of computer simulation of nonlinear dynamics of the systems with frequency and frequency-phase control on the base of qualitative-numerical methods are discussed. On the basis of modeling, two-parameters diagrams of bifurcations were constructed, parameter domains corresponding to synchronous mode, periodic and chaotic nonsynchronous modes are allocated. Numerical analysis of the models under investigation has made it possible to establish the features of nonsynchronous modes attractors developing in the systems and reveal mechanisms of transition to the chaotic behavior. Possible scenarios of the evolution of oscillatory modes as a function of the models parameters are studied.

АНАЛИЗ И СИНТЕЗ СТОХАСТИЧЕСКИХ АТТРАКТОРОВ: МЕТОД ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА

Ряшко Л.Б., Башкирцева И.А.

Уральский госуниверситет, Екатеринбург, Россия

Анализ устойчивости инвариантных многообразий является одной из центральных задач теории динамических систем. Исследования последних лет показали, что разнообразие, наблюдаемое в поведении нелинейных динамических систем, можно свести к анализу относительно простых колебательных режимов и их качественных преобразований (бифуркаций). Анализ устойчивости соответствующих аттракторов, исследование их чувствительности к внешним воздействиям является здесь ключевым моментом в понимании механизма сложных явлений нелинейной динамики. Разработка методов управления даст возможность, придавая аттракторам те или иные желаемые свойства, использовать их на практике.

Метод функций Ляпунова в настоящее время является теоретическим фундаментом анализа устойчивости и управления стохастическими системами. Случай, когда аттрактором исследуемой динамической системы является точка покоя, достаточно подробно изучен. Первые базовые результаты были получены в начале 60-х годов Н.Н. Красовским и И.Я. Кацем. Вместе с тем, большой как практический, так и теоретический интерес представляет анализ устойчивости более сложных инвариантных многообразий, связанных с периодическими и квазипериодическими колебательными режимами. Подобные режимы неизбежно возникают при переходе системы от порядка к хаосу.

В докладе рассматриваются задачи анализа устойчивости, чувствительности и управления аттракторами нелинейных стохастических дифференциальных уравнений. Основой анализа является метод функций Ляпунова.

Для получения соответствующего аналога теоремы об устойчивости по первому приближению вводится конструкция стохастического линейного расширения и понятие Р-устойчивости. Обсуждается подход, позволяющий на основе теории положительных операторов свести вопрос об устойчивости к оценке спектрального радиуса некоторого оператора. Конструктивные возможности этого подхода демонстрируются на примере анализа устойчивости и синтеза стабилизирующих регуляторов для предельных циклов и тороидальных многообразий.

Для описания стохастических аттракторов развивается подход, использующий некоторую специально конструируемую функцию Ляпунова — квазипотенциал. В случае малых шумов, когда стохастический аттрактор локализован вблизи соответствующего детерминированного аттрактора, предлагается использовать квадратичную аппроксимацию квазипотенциала, задаваемую некоторой функцией — функцией стохастической чувствительности (ФСЧ). Построение ФСЧ сводится к решению линейного матричного дифференциального уравнения. ФСЧ позволяет получить достаточно простое и, вместе с тем, детальное описание разброса случайных траекторий вокруг аттрактора.

В докладе обсуждается задача управления стационарным вероятностным распределением случайных траекторий вблизи аттракторов нелинейных стохастических систем. Управление строится в виде обратной связи по отклонению случайного состояния системы от детерминированного аттрактора. Вводятся соответствующие понятия достижимости и полной управляемости. Для случая, когда аттрактором является точка покоя или предельный цикл, получено конструктивное описание множества достижимости и найдены условия полной управляемости.

Полученные теоретические результаты иллюстрируются примерами синтеза регуляторов, формирующих наперед заданные стохастические аттракторы для конкретных динамических систем.

Работа частично поддержана грантами РФФИ (№ 06-01-00625, 06-08-00396).

The Analysis and Synthesis of Stochastic Attractors: a Method of Lyapunov Functions

Ryashko L.B., Bashkirtseva I.A.

Ural State University, Ekaterinburg, Russia

The analysis of stability, sensitivity and control of attractors for the nonlinear stochastic differential equations on the basis of Lyapunov functions technique is considered. A problem of control for stationary probabilistic distribution is discussed.

The obtained theoretical results are illustrated by examples of synthesis of the regulators for specific dynamic systems.

This work is supported by RFBR grants (06-01-00625, 06-08-00396).

БИФУРКАЦИИ УДВОЕНИЯ ПЕРИОДА В СИСТЕМАХ СИНХРОНИЗАЦИИ

Селеджи С.М., Кудряшова Е.В.

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

Системы фазовой автоподстройки (ФАП) широко распространены в радиотехнике и электросвязи. В последнее десятилетие системы ФАП стали использоваться для управления тактовыми генераторами цифровых сигнальных процессоров и других устройств цифровой обработки информации. Системы ФАП показали свою высокую эффективность, как устройства, корректирующие расфазировку тактовых импульсов.

При изменении параметров систем ФАП могут происходить качественные изменения в фазовом пространстве (пространстве состояний): потеря устойчивости, возникновение и исчезновение циклов (периодических траекторий) и так далее. Эти явления качественных перестроек, называемые бифуркациями, позволяют выделить полосы захвата непрерывных систем синхронизации и определить значения параметров дискретных систем, при которых коррекция расфазировки невозможна.

В связи с этим, важной задачей в теории систем ФАП, является как аналитическое исследование бифуркаций, так и численный расчет значений бифуркационных параметров. В книге Леонова, Селеджи [1] подробно описаны бифуркации бесфильтровой системы ФАП с синусоидальной характеристикой фазового детектора.

В данной работе, с помощью компьютерного моделирования дискретных динамических систем в специализированных математических пакетах и мощных современных технических средств, получены более точные значения бифуркационных параметров для систем, исследуемых в [1]. На основе полученных результатов рассчитаны числа Фейгенбаума.

Литература

[1] Леонов Г.А., Селеджи С.М., Системы фазовой синхронизации в аналоговой и цифровой схемотехникею.СПб: Невский диалект, 2002.

[2] Leonov G. & Seledghi S. Stability and bifurcations of phase-locked loops for digital signal processors // International journal of bifurcation and chaos. 2005, Vol. 15, No. 4, pp. 1347-1360.

[3] Leonov G. & Seledghi S. Design of phase-locked loops for digital signal processors // International Journal of Innovative Computing, Information & Control. 2005, Vol. 1, No. 4, pp. 779-789.

Bifurcation of Doubling Period in Phase Locked-Loops

Seledzhi S.M., Kudryashova E.V.

Saint Petersburg State University, Russia

Phase-locked loops (PLLs) are frequently encountered in radio engineering and communication. The results of computer modeling of discrete equation which describes nonfiltered PLLs in the case of initial frequency of master and local generators coincidence are presented.

Analytical investigations of bifurcation of considered system are described in [1]. In the present work, with the help of modern software tools, more exact values of bifurcation points of considered system were found. Feigenbaum numbers were calculated. These results can be applied to the phase synchronization theory.

ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА В КИБЕРНЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

Фрадков А.Л.

Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Россия

Несмотря на оживленные дискуссии о взаимосвязях между физическими и информационными свойствами систем, до 1990-х годов взаимодействие между физикой и теорией управления (кибернетикой) было незначительным. Прорыв произошел с появлением работ по управлению и синхронизации хаотических систем, показавших, что даже слабая обратная связь может превратить хаотические движения в периодические и наоборот. Интерес к управлению хаосом дал толчок к исследованиям, направленным на изучение физических систем путем управления ими. Бурно развиваются и другие методы исследования физических систем с применением подходов, развитых в кибернетике (идентификация, распознавание образов, нейросетевые модели и т.д.), что дает основание назвать формирующуюся область кибернетической физикой.

В докладе обсуждается предмет и методология кибернетической физики. Представлен ряд подходов и исследованию физических систем, основанных на функциях Ляпунова. Понятие функции Ляпунова находит все большее признание в физике, поскольку оно является абстрактным аналогом таких физических характеристик как энергия и энтропия. В кибернетической физике функции Ляпунова используются прежде всего для синтеза систем, т.е. для решения обратных задач. В докладе описывается основанный на функциях Ляпунова метод скоростного градиента и обсуждаются его применения к установлению закономерностей преобразования траекторий консервативных и диссипативных нелинейных систем при помощи обратных связей, к анализу возбудимости и резонанса с обратной связью в нелинейных осцилляторах, к построению моделей динамики физических систем. В качестве примеров рассматриваются «управляемые» варианты классических задач о маятнике Капицы, о выбросе из потенциальной ямы, о синхронизации осцилляторов.

Доклад опирается на материалы книг [1,2] и обзора [3].

Литература

[1] Фрадков А.Л. Кибернетическая физика: принципы и примеры. СПб: Наука, 2003, 208 с.

[2] Fradkov A.L. Cybernetical physics: from control of chaos to quantum control. Springer-Verlag, 2007.

[3] Фрадков А.Л. О применении кибернетических методов в физике. Успехи физических наук, 2005, Т. 175, N 2, с. 113–138.

Lyapunov Functions in Cybernetical Physics

Fradkov A.L.

Institute for Problems of Mechanical Engineering RAS, Saint Petersburg, Russia

Subject and methodology of cybernetical physics (studying physical systems by cybernetical means) are presented, following the author's book "Cybernetical physics: from control of chaos to quantum control". (Springer-Verlag, 2007). Lyapunov functions play important role in physics as abstract analogues of energy or entropy. In cybernetical physics they are commonly used for solving design problems and studying limitations of control. The Lyapunov-based speed-gradient method is outlined and applied to energy control of conservative and dissipative systems. Exposition is illustrated by examples of studying feedback resonance, escape from potential wells, controlled Kapitsa pendulum, controlled synchronization.

МЕТОДЫ ЛЯПУНОВА В СИСТЕМАХ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ И РАЗРЫВНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

Шамриков Б.М.

Московский государственный авиационный институт (технический университет), Россия

Типичными представителями систем рассматриваемого класса являются цифровые автоматические системы (ЦАС) или, в общем случае, дискретные системы с произвольными кусочно-постоянными нелинейностями. Характерными нелинейными операциями в ЦАС являются операции преобразования непрерывных сигналов в цифровой код и обратного перехода от цифрового кода к непрерывному сигналу. При этом входные и выходные сигналы управляющей ЭВМ квантуются по времени и уровню.

Динамика таких систем весьма сложна и разнообразна. Суть проблемы ее изучения заключается в том, что классические подходы качественной теории непрерывных динамических систем типа Пуанкаре-Бирхгофа к системам рассматриваемого класса не применимы, так как эти системы не обратимы во времени. ЦАС характеризуются сложностью возникающих в них установившихся движений и топологической структурой их пространства состояний. Наиболее сложной динамикой обладают ЦАС собственно-неустойчивыми объектами. В таких системах всегда возникают непериодические установившиеся движения, которые носят «квазислучайный» характер — так называемый «детерминированный хаос». Все эти движения неустойчивы по Ляпунову, и их объединение образует континуальное асимптотически устойчивое множество, область притяжения которого, как правило, неодносвязна. Исследование динамики таких систем численными методами, как правило, оказывается неэффективным.

При исследовании динамики систем с дискретным временем и разрывными нелинейностями целесообразно изучать не отдельные предельные движения, например, периодические, исследовать их бифуркации и т.п., а рассматривать в макроаспекте целый ансамбль сложных установившихся движений. При этом адекватным математическим аппаратом может служить прямой метод Ляпунова. Этот метод на базе принципа достаточности позволяет находить при выбранной функции Ляпунова минимальное надмножество асимптотически устойчивого множества системы и максимальное подмножество его области притяжения. Более того, с использованием принципов объединения и пересечения множеств могут быть получены эффективные алгоритмы расчета достаточных оценок указанных множеств для целых классов выбранных функций Ляпунова.

Методы Ляпунова применительно к цифровым автоматическим системам, которые все шире используются в промышленности, позволяют разрабатывать конструктивные подходы, методы и алгоритмы решения насущных практических задач.

Литература

[1] Косякин А.А., Шамриков Б.М. Колебания в цифровых автоматических системах. М.: Наука, 1983.
[2] Шамриков Б.М. Основы теории цифровых систем управления. М.: Машиностроение, 1985.
[3] Теряев Е.Д., Шамриков Б.М. Цифровые системы и поэтапное адаптивное управление. М.: Наука, 1999.

The Laypunov's Methods in the Discrete Systems

Shamrikov B.M.

Moscow Aviation Institute, Russia

The paper is devoted to development of fundamentals of the digital systems qualitative theory. The Laypunov's direct method is used for the investigation of stability and oscillations in these systems.

ОБ УСЛОВИЯХ ПРОЧНОСТИ И НЕПРОЧНОСТИ ТРАЕКТОРИЙ В ЗАДАЧАХ НЕБЕСНОЙ И КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Шестаков А.А., Дружинина О.В.

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына
Российской академии наук, Москва, Россия

Представлен обзор результатов авторов доклада по теории прочности траекторий нелинейных динамических систем, полученных в период 2001 – 2006 г.г. и часть из которых опубликована в [1–7] и других работах. Предполагается изложить следующие вопросы: 1) прочность в смысле Жуковского траекторий классических уравнений кеплерова движения; 2) сохранение свойства асимптотической прочности в смысле Жуковского интегрального множества при возмущениях; 3) прочность в смысле Жуковского траекторий систем небесной механики; 4) условия прочности в смысле Жуковского траекторий динамических систем; 5) признаки прочности в смысле Жуковского орбит уравнений небесной механики; 6) устойчивость в смысле Ляпунова и прочность в смысле Жуковского траекторий консервативных механических систем; 7) прочность в смысле Жуковского почти периодических траекторий и свойства предельных движений динамических систем; 8) условная асимптотическая прочность в смысле Жуковского периодической орбиты; 9) предельные свойства асимптотически устойчивых по Ляпунову и асимптотически прочных по Жуковскому траекторий; 10) теоремы о прочности траекторий относительно части фазовых переменных; 11) условия непрочности в смысле Жуковского некоторых классов динамических систем; 12) финальные свойства асимптотически прочных динамических систем.

Работа поддержана Советом по грантам Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых (грант № МД-1199.2005.1).

Литература

[1] Дружинина О.В., Шестаков А.А. // ДАН. 2002. Т. 384. № 1. С. 52–56.
[2] Дружинина О.В., Шестаков А.А. // ДАН. 2003. Т. 393. № 4. С. 478–482.
[3] Шестаков А.А., Черкашин Ю.М., Дружинина О.В. // Транспорт: наука, техника, управление. М.: ВИНИТИ РАН, 2003. № 12. С. 10–15.
[4] Дружинина О.В. // ДАН. 2004. Т. 399. № 1. С. 38–41.
[5] Дружинина О.В., Шестаков А.А. ДАН. 2004. Т. 398. № 5. С. 615–619.
[6] Дружинина О.В., Ильина Т.А., Щенникова Е.В. // Вопросы теории безопасности и устойчивости систем. 2005. Вып. 7(2). С. 3–8.
[7] Дружинина О.В., Шестаков А.А. // ДАН. 2006. Т. 409. № 2. С. 185–190.

On Conditions of Zhukovskij Stability and Instability of Trajectories in the Problems of Celestial and Classical Mechanics

Shestakov A.A., Druzhinina O.V.

Computing Center of Russian Academy of Science, Moscow, Russia

The review of results of authors in direction of theory of Zhukovskij stability of trajectories of nonlinear dynamical systems is given in the report.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ В ЭНЕРГОСИСТЕМЕ С ИСТОЧНИКОМ ХАОТИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

Эпштейн Г.Л.

Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ), Россия

Рассматривается энергосистема, содержащая от нескольких десятков до нескольких сот генераторов, один из которых находится в режиме хаотических колебаний. Математическая модель энергосистемы представляет собой дифференциально-алгебраические уравнения вида

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y}), \quad \mathbf{g}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0.$$

Хаотические колебания возникают в системе электрический генератор — регулятор возбуждения при изменении коэффициента усиления [1]. Через линию электропередачи эти колебания проникают в энергосистему. Как показывают результаты численных экспериментов, возможны следующие ситуации:
— подавление колебаний по мере удаления от источника в результате действия автоматических регуляторов возбуждения и частоты вращения, а также естественного демпфирования,
— возникновение вокруг источника ограниченной области с незатухающими колебаниями,
— разрушение синхронного и синфазного движения генераторов энергосистемы, то есть энергетическая авария.

В связи с перечисленными ситуациями представляют практический интерес задачи построения бифуркационных диаграмм генераторов, построение критериев вовлечения соседних с источником генераторов в хаотический колебательный процесс, выявление и локализация источника хаотических колебаний по наблюдениям в различных точках энергосистемы.

Для решения указанных задач применяется аппарат показателей Ляпунова [2, 3]. Вычислительные алгоритмы и полученные соотношения приведены в тексте доклада.

Литература

[1] Иванова А. П., Эпштейн Г. Л. Опыт анализа хаотических колебаний в электроэнергетической системе. Труды четвертой международной конференции «Средства математического моделирования», «Математические исследования», том 10, Санкт-Петербург, 2003, стр. 62–66.
[2] Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Пер. с англ. - Москва, «Мир», 1970. - 720 с.
[3] Эпштейн Г. Л. Анализ в реальном времени хаотических электромеханических колебаний в регулируемых энергосистемах. Тезисы докладов Пятого международного семинара «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления». Москва, ИПУ, 1998, стр. 103.

Study of Processes in a Power System with a Source of Chaotic Oscillations

Epshtein G.L.

Moscow State University of Railway Engineering, Russia

The power system which contains from several tens up to several thousands of generators is considered. One of generators is in a mode of chaotic oscillations. The bifurcation diagrams are shown. The algorithm for the localization of a source of chaotic oscillations by observations in various points of a power system is described. The Lyapunov exponents is applied for solution of the indicated problem.

AUTHOR INDEX

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

Нелинейный динамический анализ – 2007:
Тезисы докладов международного конгресса,
Санкт-Петербург, 4–8 июня 2007 г.

Редактор *Е. В. Кустова*
Технический редактор *Л. А. Пузырева*

Подписано в печать 20.04.07. Формат бумаги 70×108/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Усл.-печ. л. 35,3. Тираж 500 экз.
Отпечатано с оригинал-макета, подготовленного в НИИ математики и механики Санкт-Петербургского государственного университета, в типографии ГНЦ РФ ЦНИИ "Электроприбор"
197046, С.-Петербург, ул. Малая Посадская. 30.
Заказ № 73 от 20.04.07