

REPORT DOCUMENTATION PAGE

Form Approved OMB No. 0704-0188

Public reporting burden for this collection of information is estimated to average 1 hour per response, including the time for reviewing instructions, searching existing data sources, gathering and maintaining the data needed, and completing and reviewing the collection of information. Send comments regarding this burden estimate or any other aspect of this collection of information, including suggestions for reducing this burden to Washington Headquarters Services, Directorate for Information Operations and Reports, 1215 Jefferson Davis Highway, Suite 1204, Arlington, VA 22202-4302, and to the Office of Management and Budget, Paperwork Reduction Project (0704-0188), Washington, DC 20503.

1. AGENCY USE ONLY (Leave blank)		2. REPORT DATE 2001	3. REPORT TYPE AND DATES COVERED Dissertation	
4. TITLE AND SUBTITLE Verfahren zur Genauigkeitsanalyse fuer Altkarten Process on the Precision Analysis for Old Maps			5. FUNDING NUMBERS	
6. AUTHOR(S) Dieter Beineke			8. PERFORMING ORGANIZATION Report Number REPORT NUMBER Heft 71/2001	
7. PERFORMING ORGANIZATION NAME(S) AND ADDRESS(ES) Fakultaet fuer Bauingenieur- und Vermessungswesen, Universitaet der Bundeswehr Muenchen			10. SPONSORING/MONITORING AGENCY REPORT NUMBER ISSN 0173-1009	
9. SPONSORING/MONITORING AGENCY NAME(S) AND ADDRESS(ES)			11. SUPPLEMENTARY NOTES Text in German. Title and abstract in German and English, 162 pages, ISSN 0173-1009, Heft 71/2001.	
12a. DISTRIBUTION/AVAILABILITY STATEMENT Distribution A: Public Release.			12b. DISTRIBUTION CODE	
ABSTRACT (Maximum 200 words) The dissertation pronounces its aim to be the establishment of a basis for continual and optimized solution processes on the precision analysis of old maps, which are defined as "printed maps from the end of the 15 th to the end of the 18 th century" (3), with the following restrictions: 1) the realization of such a basis is purely by calculation, not manual, that is accessible as a normal, commercially available map plan might be; 2) only non-mobile points of reference have been taken into account, whereas changing parameters, such as coastlines, are not included; 3) only the old map in question is used, but measurements taken during that time period and their potential influence on the precision of the data do not configure in the study.				
14. SUBJECT TERMS German, UNIBW, Cartography, German history, Geography, Topology			15. NUMBER OF PAGES	
			16. PRICE CODE	
17. SECURITY CLASSIFICATION OF REPORT UNCLASSIFIED	18. SECURITY CLASSIFICATION OF THIS PAGE UNCLASSIFIED	19. SECURITY CLASSIFICATION OF ABSTRACT UNCLASSIFIED	20. LIMITATION OF ABSTRACT UNLIMITED	

Heft 71

Neubiberg, 2001

D. Beineke

Verfahren zur
Genauigkeitsanalyse
für Altkarten

SCHRIFTENREIHE

STUDIENGANG GEODÄSIE UND GEOINFORMATION
UNIVERSITÄT DER BUNDESWEHR MÜNCHEN



20030108 070

AQ F03-02-0420

Der Druck dieses Heftes wurde aus Haushaltsmitteln der Universität der Bundeswehr München gefördert.

Auflagenhöhe: 250

Verantwortlich für die Herausgabe der Schriftenreihe:

Der Prodekan des Studiengangs Geodäsie und Geoinformation der Universität der Bundeswehr München

Bezugsnachweis:

Universität der Bundeswehr München
Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen
Studiengang Geodäsie und Geoinformation
Werner-Heisenberg-Weg 39
D - 85577 Neubiberg

ISSN 0173 - 1009

Verfahren zur Genauigkeitsanalyse für Altkarten

Dieter Beineke

Vollständiger Abdruck der zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.) bei der Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen der Universität der Bundeswehr München am 13. Mai 2000 eingereichten Dissertation.

Promotionsausschuß:

- | | |
|----------------------|---|
| Vorsitzender: | Univ.-Prof. Dr. rer.nat. Klaus Wichmann |
| 1. Berichterstatter: | Univ.-Prof. Dr.-Ing. Kurt Brunner |
| 2. Berichterstatter: | Univ.-Prof. Dr.-Ing. Wilhelm Caspary |

Tag der mündlichen Prüfung: 26. Oktober 2000

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung und Zielsetzung	1
2 Elementare rechnerische Methoden	5
2.1 Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate	5
2.1.1 Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen	5
(a) Ausgleichung von ungleichgewichtigen Beobachtungen	6
(b) Ausgleichung von gleichgewichtigen Beobachtungen	7
(c) Ausgleichung eines nichtlinearen Ausgangsgleichungssystems	8
2.1.2 Ausgleichung nach direkten Beobachtungen	9
(a) Ungleichgewichtigen Beobachtungen	9
(b) Gleichgewichtige Beobachtungen	10
2.2 Ebene Koordinatentransformationen	11
2.2.1 Einfache Drehung eines Koordinatensystems	11
2.2.2 Ähnlichkeitstransformation	12
2.2.3 Affintransformation	16
(a) 6-Parameter Transformation	16
(b) 5-Parameter-Transformation	19
2.2.4 Bilineare Transformation	21
(a) Ausgleichungsrechnung	22
(b) Die inverse bilineare Transformation	26
2.2.5 Projektive Transformation	27
2.3 Multiquadratische Interpolation	29
3 Datenerfassung und Plausibilitätsprüfung	33
3.1 Ablaufverfahren zur Rohdatenerfassung	33

3.2	Plausibilitätsprüfungen	37
3.2.1	Punkt-Test	37
3.2.2	Minimalstrecken-Test	38
3.2.3	Nachbearbeitung der Rohdaten	38
3.2.4	Exemplarisches Berechnungsbeispiel zur Plausibilitätsprüfung	38
4.	Bestimmung adäquater Netzentwürfe für Altkarten	41
4.1	Die Platkarte als adäquate Kartenabbildung	42
4.1.1	Abbildung mit <i>längentreuem Äquator</i>	42
4.1.2	Abbildung mit <i>zwei längentreuen Parallelkreisen</i>	43
4.1.3	Die Platkarte als affine Abbildung	43
4.1.4	Verifizierung der Platkarte als adäquate Kartenabbildung	44
	(a) Verifizierung der Platkarte mit Hilfe der Graduierung	44
	(b) Interpretation des Testwertes	44
	(c) Verifizierung der Platkarte mit Hilfe ausgeglicherer Maßstabsfaktoren	45
4.2	Die Trapezabbildung als adäquate Kartenabbildung	45
4.2.1	Die normale Trapezabbildung	46
4.2.2	Die Näherungslösung zur normalen Trapezabbildung	48
4.2.3	Die freie Trapezabbildung	50
4.2.4	Verifizierung der Trapezabbildung als adäquate Kartenabbildung	50
	(a) Verifizierung der Trapezabbildung mit Hilfe der Graduierung	51
	(b) Verifizierung der Trapezabbildung mit homologen Punkten des Karteninhalts	52
5.	Methoden zur Maßstabs- und Genauigkeitsbestimmung von Altkarten	55
5.1	Vergleichsstrecken-Verfahren	56
5.1.1	<i>Direkte</i> Maßstabsbestimmung aus der Altkarte	57
	(a) Mittlerer Erdradius und Längenmaßeinheiten	57
	(b) Maßstabsbestimmung aus der graphischen Maßstabsangabe	58
	(c) Maßstabsbestimmung aus der Graduierung im Kartenrahmen	61

5.1.2	<i>Indirekte</i> Maßstabsbestimmung durch Vergleich mit modernen Karten	62
	(a) Maßstabsbestimmung mit Hilfe des arithmetischen Mittels	63
	(b) Maßstabsbestimmung mit Hilfe des gewichteten Mittels	65
	(c) Optimale Streckenauswahl für die Maßstabsbestimmung	67
	(d) Schätzungen von Genauigkeitsmaßen aus Streckendifferenzen	69
5.2	Vergleichspunkt-Verfahren	70
5.2.1	Maßstabs- und Genauigkeitsbestimmung mit Hilfe der <i>Ähnlichkeitstransformation</i>	72
5.2.2	Maßstabs- und Genauigkeitsbestimmung mit Hilfe der <i>Affintransformation</i>	72
5.3	Weitere Methoden zur Genauigkeitsbestimmung	74
5.3.1	Orientierungsabweichung	74
	(a) Bestimmung der Orientierungsabweichung über Vergleichsrichtungen	74
	(b) Bestimmung der Orientierungsabweichung über Vergleichspunkte	76
5.3.2	Die Zuverlässigkeit der Graduierung im Kartenrahmen	77
	(a) Rechnerische Ermittlung von geographischen Punktkoordinaten in Altkarten	77
	(b) Berechnung der mittleren Verschiebung in Meridian- und Breitenkreisrichtung	78
5.4	Zur Genauigkeitsbestimmung von Teilgebieten	81
5.5	Beurteilung der Verfahren	81
6.	Graphische Darstellungen von Stichproben und Häufigkeitsverteilungen	83
6.1	Graphische Darstellung der Streuung von Stichproben	83
6.2	Graphische Darstellung von Häufigkeitsverteilungen	85
7.	Einsatz robuster Schätzverfahren	89
7.1	Grundbegriffe und -definitionen	89
7.1.1	Parameter der robusten Schätzung	90
7.1.2	Einfache robuste Schätzung des Lageparameters	90
7.1.3	Einfache robuste Schätzung des Skalenparameters	90

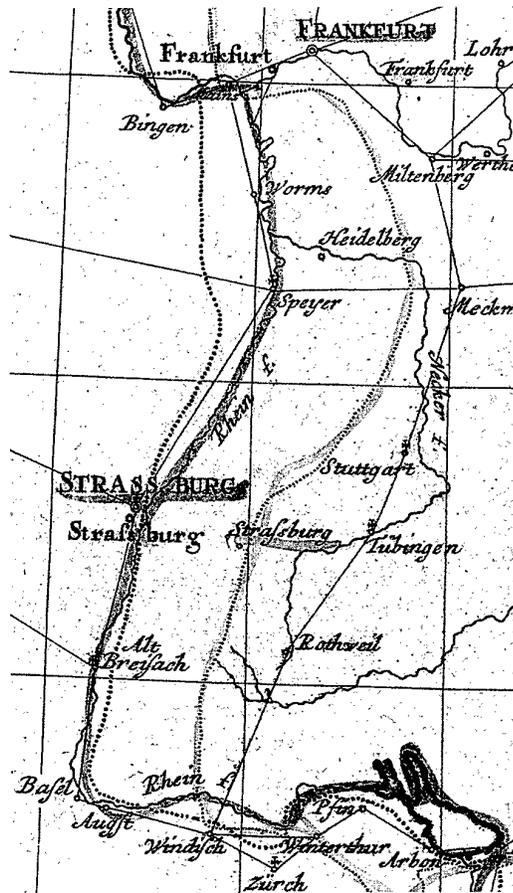
7.2 Robuste Parameterschätzung	91
7.2.1 Robuste M-Schätzer	92
(a) Huber-Schätzer	92
(b) Hampel-Schätzer	93
(c) Dänische Methode	94
(d) Methode der variablen Kontaminierung	95
(e) Methode der kleinsten absoluten Summe (LAS)	97
7.2.2 Rechentechnische Realisierung der Parameterschätzung	98
(a) Grundprinzip (ein-Parameter-Schätzung)	98
(b) Verallgemeinerung (mehr-Parameter-Schätzung)	99
7.3 Praktischer Einsatz von robusten Schätzern	100
7.4 Schätzunsicherheit der robusten Parameterschätzung	101
8. Visualisierung von Genauigkeitsanalysen	103
8.1 Methode der Restklaffungsvektoren	103
8.2 Methode der Dreiecksvermaschung	106
8.2.1 Optimale Dreiecksvermaschung	106
8.2.2 Erkennung von topologischen Unstimmigkeiten	106
8.2.3 Isolinien	109
(a) Isodeformate	109
(b) Verzerrungsgitter	111
8.3 Methode regulärer Gitternetze	114
8.4 Beurteilung der Verzerrungsgitter-Verfahren	120
9. Zusammenfassung und Ausblick	121
Anhang	125
A. Transformation zwischen Gauß-Krüger-Koordinaten und ellipsoidischen geographischen Koordinaten	126
B. Anwendungsbeispiele	131
B.1 Die Tirolkarte	133
B.2 Die Schlesienkarte	139
B.3 Die Ostfrieslandkarte	145
Literaturverzeichnis	151

Kapitel 1

Einleitung und Zielsetzung

Alte Landkarten sind seit jeher nicht nur beliebte Objekte von Sammlern, die sich vor allem an der Attraktivität und der künstlerischen Gestaltung bzw. Ausschmückung erfreuen, auch Wissenschaftler der unterschiedlichsten Disziplinen beschäftigten sich immer wieder mit ihnen, da sich in alten Karten politische, kulturelle und geistige Entwicklungen widerspiegeln. Insbesondere dem Geodäten, Topographen, Kartographen, Geographen und Kartenhistoriker erlauben sie Einblicke und Rückschlüsse auf den kartographiehistorischen, geographischen, topographischen, geodätischen Wissensstand sowie der angewandten Kartentechnik jener Zeit. Einen wertvollen Beitrag stellen in diesem Sinne daher auch Analysen dar, die sich mit der zahlenmäßigen Bestimmung der Genauigkeit (bzw. Fehler) alter Karten sowie deren Visualisierung beschäftigen. Die ersten Untersuchungen dieser Art gibt es seit ungefähr Ende des 19. Jahrhunderts [WOLF, 1879; WAGNER, 1896] und mit den „*Studien zu Philipp Apians Landesaufnahme*“ von GASSER [1906], liegt erstmals eine wissenschaftlich fundierte Arbeit über die Genauigkeit der Aufnahme einer Karte aus dem 16. Jahrhundert vor.

Kritik an Karten gab es demgegenüber aber bereits wesentlich früher. So erschien 1750 in den *Kosmographischen Nachrichten* (einzige herausgegebene Vereinszeitschrift der damaligen *Kosmographischen Gesellschaft* in Nürnberg) zu dem von J. M. FRANZ verfaßten Aufsatz: „*Vorschläge wie die Erdbeschreibung in Absicht Deutschlands zu verbessern sey*“ als Beilage die *Kritische Karte von Deutschland* (*Germaniae ... mappa critica*), die von TOBIAS MAYER (1723-1762) angefertigt wurde [nach MEURER, 1995]. Sie zeigt den ungefähren Verlauf der Grenzen und die Lage von 27 Hauptorten des damaligen Heiligen Römischen Reiches Deutscher Nation in einer *vergleichenden Gegenüberstellung* zweier zu der Zeit einflußreichsten Deutschlandkarten, sowie Eintragungen nach MAYERS eigenen Ermittlungen. In der nebenstehenden Abbildung (Ausschnitt in Originalgröße) sind die unterschiedlichen Verläufe der deutsch-französischen Grenze nach der Karte von DE L'ISLE aus dem Jahre 1701 (dick punktierte Linie) und nach der Karte von HOMANN aus dem Jahre 1705 (dünn punktierte Linie) zu erkennen, wobei Abweichungen bis zu einem Längengrad (ungefähr bei Heidelberg) deutlich sichtbar werden. Des weiteren hat MAYER die unterschiedlichen Positionen der untersuchten Hauptorte eingetragen. Zur Unterscheidung sind die Ortspositionen nach HOMANN mit *einfachen kleinen Kreisen* gekenn-



zeichnet, die nach DE L'ISLE mit *einfachen großen Kreisen* und die nach MAYERS eigenen Ermittlungen mit *gefüllten Kreisen*. In dem abgebildeten Ausschnitt sind die Lageabweichungen für die Städte Frankfurt und Straßburg deutlich zu erkennen.

Die von MAYER angewendete Methode, über einen *Kartenvergleich* zwischen zwei alten Karten und eigenen (moderneren) Messungen Genauigkeitsaussagen abzuleiten, ist im Prinzip bis heute gleich geblieben, da sie immer noch die beste Möglichkeit zur Beurteilung der Genauigkeit älterer Karten darstellt. Die Grundmethoden (auf der Basis des Kartenvergleiches) lassen sich heutzutage einteilen in die *rein rechnerischen Verfahren* (liefern u.a. den mittleren Maßstab) und die *graphisch-rechnerischen Verfahren*, die zur Visualisierung der rechnerisch ermittelten Genauigkeitsschätzungen dienen.

Gegenwärtig sind eine ganze Reihe unterschiedlicher Methoden für Genauigkeitsanalysen alter Karten bekannt. Einen guten Überblick über den heutigen Stand der rechnerisch-graphischen (zum Teil manuell-graphischen) Verfahren liefert der Aufsatz von FORSTNER und OEHLI [1998]. Dieser Artikel macht allerdings auch deutlich, daß moderne Verfahren, die auf einer rein digitalen Ebene (rechnerisch wie graphisch) arbeiten, nur vereinzelt veröffentlicht worden sind. Die Ursachen dafür sind vielfältig. Vom Bearbeiter verlangen die rechnerischen Verfahren neben mathematischen Kenntnissen (z.B. Ausgleichsrechnung und Statistik) auch programmiertechnische Umsetzungen, da nicht alle spezifischen Aufgabenstellungen (vor allem bei den graphischen Darstellungen) mit professionellen Mathematik- und Statistikprogrammen (z.B. Mathcad, Mathematica, SPSS) zufriedenstellend gelöst werden können. Zudem ist eine graphisch-rechnerische Realisierung immer sehr aufwendig und setzt auch (karto)graphisches Fachwissen und Einfühlungsvermögen voraus.

Vordringliches Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, einerseits die grundlegenden Verfahren zur *Bestimmung des Maßstabes und dessen Genauigkeit* sowie zur *graphischen Darstellung der Genauigkeit* alter Karten zusammenzustellen und andererseits *Möglichkeiten und Ansätze neuer Rechen- und Visualisierungsverfahren* zu entwickeln. Die Realisierung sollte dabei *ausschließlich rechnerisch* bzw. *graphisch-rechnerisch* erfolgen.

Mit Genauigkeitsuntersuchungen an alten Karten haben sich fachgemäß stets Geodäten und Kartographen beschäftigt, wobei die Ergebnisse immer dem persönlichen und zeitgemäßen Wissensstand sowie den graphischen Darstellungsmöglichkeiten (manuell wie rechnerisch) entsprachen. Die aus diesen Arbeiten hervorgehenden Ergebnisse bereiten aber insbesondere bei den angegebenen Genauigkeitsmaßen für Vergleichszwecke Schwierigkeiten, da sie oft uneinheitlich sind und nicht immer klare und nachvollziehbare Aussagen enthalten. So ist es z.B. bei der Angabe "Mittlerer Fehler des Maßstabes" von entscheidender Bedeutung, ob nun die *Standardabweichung* oder die *Standardabweichung des Mittelwertes des Maßstabes* gemeint ist.

Ein weiteres Anliegen dieser Arbeit ist es daher, die wichtigsten *elementaren Rechenverfahren*, wie sie bei Genauigkeitsuntersuchungen für Altkarten anfallen (z.B. Ausgleichsrechnung, Koordinatentransformationen etc.), in einer kompakten, einheitlichen und zeitgemäßen Terminologie zusammenzustellen. Dies erschien aus mehreren Gründen notwendig. Zum einen richtet sich diese Arbeit nicht nur an Geodäten, die mit den mathematischen Methoden naturgemäß vertraut sind. Sie richtet sich - im interdisziplinären Sinne - gleichermaßen auch an *Kartographen, Geographen und Kartenhistoriker*. In dieser Arbeit nur einzelne Hinweise auf entsprechende Fachbücher und Veröffentlichungen in Fachzeitschriften zu geben, würden aber gerade den "Nichtgeodäten" erhebliche Schwierigkeiten bereiten, da z.B. nicht nur die mathematische Schreibweise in den Literaturquellen immer wieder unterschiedlich ist, sondern auch Fachbegriffe zum Teil veraltet sind. So sollte z.B. die Bezeichnung *mittlerer Fehler* seit Einführung der DIN-Norm 18709 Teil 4 [Begriffe, Kurzzeichen

und Formelzeichen im Vermessungswesen] im Jahre 1984 nicht mehr verwendet werden. Zum anderen gibt es kein einziges Lehr- oder Fachbuch, in dem *sämtliche* mathematischen Rechenverfahren, die für die speziellen Aufgabenstellungen bei Altkarten anfallen, detailliert und nachvollziehbar zu finden sind. Aus diesen Gründen war es sinnvoll, das elementare mathematische Rüstzeug für die Genauigkeitsanalysen weitgehend vollständig und so kompakt wie möglich darzulegen.

Die vorliegende Arbeit soll außerdem *Grundlage* für weiterführende und optimierte Lösungsverfahren zur Genauigkeitsanalyse für Altkarten sein. Sie erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit, da die gesamte Problematik zu komplex ist, als daß sie umfassend in einer einzigen Arbeit abgehandelt werden könnte. Dadurch ergeben sich aber auch einige *Restriktionen*, auf die hier kurz eingegangen werden soll.

- Wie weiter oben schon erwähnt, sollte die Realisierung ausschließlich rechnerisch bzw. rechnerisch-graphisch erfolgen. Auf die *rein manuell-graphischen Verfahren* (die in einigen Fällen auch heute noch durchaus ihre Berechtigung haben) wird deshalb hier nicht eingegangen.
- Alle Untersuchungen beziehen sich auf *ortsfeste* und eindeutig zu identifizierende Einzelobjekte (Ortschaften). Vergleiche mit linienhaften Objekten (Konturenvergleich), wie Küstenlinien, die ihre Lage im Laufe der Zeit verändern können, werden im Rahmen dieser Arbeit nicht behandelt. Hier besteht noch Forschungsbedarf.
- *Untersuchungsgegenstand* ist ausschließlich die *vorliegende Altkarte*. Alte Meßverfahren und die Berücksichtigung deren Einfluß auf die Genauigkeit von Altkarten werden nicht behandelt. Hier besteht noch grundlegender Forschungsbedarf, da einerseits in den seltensten Fällen die konkreten Aufnahmeverfahren bekannt sind (meistens nur reine Vermutungen) und andererseits bis heute noch keine wissenschaftlich soliden Untersuchungen zu dieser Problematik vorliegen. Zudem hätte eine eingehende Behandlung dieses umfangreichen Themas den Rahmen dieser Arbeit gesprengt.

Häufig verwendete Fachausdrücke:

Altkarten

Als Altkarten werden hier *gedruckte* Karten, vom Ende des *15. Jahrhunderts bis - wie allgemein üblich - zum Ende des 18. Jahrhunderts* verstanden. Diese Karten sind zugänglich in Bibliotheken, seltener in Archiven. Als Vorlage für Genauigkeitsuntersuchungen stehen sie in Form von Nachdrucken (Faksimiles), Reproduktionen (z.B. Vergrößerungen von Diapositiven der Originaldrucke) oder in digitaler Form zur Verfügung.

Regionalkarten

Unter Regionalkarten werden hier *gedruckte* Karten verstanden, die vom *Anfang des 16. Jahrhunderts bis zum Ende des Dreißigjährigen Krieges*, vereinzelt aber auch bis zum Ende des 17. Jahrhunderts hergestellt wurden. Sie basieren auf originären Aufnahmen der damaligen Territorialstaaten und von (Reichs-)Kreisen des *Heiligen Römischen Reiches Deutscher Nation*. Vielfach handelt es sich dabei um Einzelkarten, seltener um Kartenwerke. Der Maßstabsbereich dieser Karten kann ungefähr zwischen 1 : 200 000 und 1 : 800 000 angesetzt werden. Vereinzelt können aber auch wesentlich kleinere Maßstäbe dazugezählt werden.

Moderne Karten

Hierunter werden alle *zeitgenössischen* Karten verstanden, die im Vergleich zu den Altkarten eine *übergeordnete Genauigkeit* besitzen. Für Genauigkeitsuntersuchungen werden sie vornehmlich in Form von Drucken oder in digitaler Form herangezogen.

Aufbau der vorliegenden Arbeit:

In **Kapitel 2** werden die elementaren rechnerischen Methoden (z.B. Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate, Koordinatentransformationen etc.) beschrieben, welche die Grundlage aller Verfahren zur Genauigkeitsuntersuchung alter Karten darstellen.

Kapitel 3 beschreibt die systematische Vorgehensweise bei der *Erfassung sämtlicher relevanten Daten* (z.B. Auswahl der Punkte, Methoden der Koordinatenerfassung) sowie Verfahren zur Plausibilitätsprüfung der ermittelten Rohdaten.

Kapitel 4 beschäftigt sich mit der *Bestimmung adäquater Netzentwürfe für Altkarten*, da der (vermutete) Netzentwurf einer zu untersuchenden Altkarte einen wesentlichen Einfluß auf die Berechnungsergebnisse hat. Da dieser Aspekt in der Literatur bislang vernachlässigt wurde, wird hier detailliert darauf eingegangen. Außerdem werden die Abbildungsgleichungen für die häufig in Altkarten vorkommende Trapezabbildung vorgestellt.

In **Kapitel 5** werden die (grundlegenden) *Methoden zur Maßstabs- und Genauigkeitsbestimmung* beschrieben, wie z.B. das Vergleichsstrecken- und das Vergleichspunkt-Verfahren, sowie weitere Methoden zur Genauigkeitsbestimmung.

In **Kapitel 6** werden die bei Altkartenuntersuchungen typisch auftretenden *Häufigkeitsverteilungen* (im Vergleich zur Normalverteilung) sowie die *Streuung von Stichproben* graphisch dokumentiert.

Kapitel 7 stellt ein für Genauigkeitsuntersuchung an Altkarten neues Berechnungsverfahren vor, die sogenannte *robuste Schätzung* und verdeutlicht den Vorteil dieser Methode im Vergleich zu den bisher traditionellen Verfahren der Parameterschätzung, wie z.B. der mittlere Maßstab oder die Standardabweichung.

In **Kapitel 8** werden die Verfahren zur Visualisierung der ermittelten Genauigkeitsergebnisse anhand verschiedener Kartenbeispiele aufgezeigt. Dabei werden auch neue Verfahren zur Generierung von *Verzerrungsgittern* vorgestellt.

Schließlich wird in **Kapitel 9** eine *Zusammenfassung* und ein *Ausblick* auf zukünftige Entwicklungen und Optimierungen gegeben.

Zur Komplettierung der Arbeit werden in einem *Anhang* neben einigen praktischen Formeln (*Transformation zwischen Gauß-Krüger-Koordinaten und ellipsoidischen geographischen Koordinaten*) die *Rechen- und Visualisierungsergebnisse am Beispiel von drei Regionalkarten* wiedergegeben.

Kapitel 2

Elementare rechnerische Methoden

Allgemein stehen für Genauigkeitsuntersuchungen von Altkarten alle möglichen mathematischen, statistischen und insbesondere geodätische Berechnungsverfahren zur Verfügung. Hier sollen allerdings nur solche Rechenverfahren beschrieben werden, die für Genauigkeitsanalysen von Altkarten besonders geeignet sind und das elementare mathematische Rüstzeug darstellen, auf das in dieser Arbeit zurückgegriffen wird.

Die vorgestellten Verfahren werden vornehmlich in prägnanter Form durch Anwendung der *Matrizenschreibweise* dargestellt, wobei allerdings auch traditionelle Schreibweisen - zum Teil in Kombination mit der Matrizenschreibweise - verwendet werden. Detaillierte Beschreibungen dazu lassen sich in den einschlägigen geodätischen Lehr- und Fachbüchern nachlesen (GOTTHARDT [1978]; GROSSMANN [1969, 1976]; HÖPCKE [1980]).

2.1 Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate

Zur Steigerung der Genauigkeit und Ermittlung eines repräsentativen Genauigkeitsmaßes, sowie einer weitgehenden Absicherung gegen grobe Fehler, führt man in der Regel *mehr* Beobachtungen (Messungen) aus, als unbedingt zur Bestimmung der gesuchten Größen erforderlich sind. Dabei treten infolge *nicht vermeidbarer Meßfehler* zwangsläufig Widersprüchlichkeiten auf. Die *Aufgabenstellung der Ausgleichsrechnung* besteht nun darin, diese *zufallsbedingten* Widersprüchlichkeiten (Abweichungen, Residuen, Verbesserungen) zu *minimieren*, so daß die ausgeglichenen (plausibelsten) Schätzwerte so *wenig wie möglich* von den *wahren Werten* abweichen. Das dabei bis heute noch angewendete Prinzip ist als "**Methode der kleinsten Quadrate**" (**MkQ**) bereits seit ca. 200 Jahren bekannt. Es wurde von C. F. GAUSS und A. M. LEGRENDE unabhängig voneinander und etwa zur gleichen Zeit entwickelt.

Im folgenden sollen zwei häufig benötigte Ausgleichungsverfahren für Genauigkeitsuntersuchungen von Altkarten vorgestellt werden und zwar die *Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen* und die *Ausgleichung nach direkten Beobachtungen*, mit denen sich die meisten der in dieser Arbeit auftretenden Ausgleichungsprobleme ausreichend beschreiben lassen.

2.1.1 Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen

Gegeben sei ein *lineares Gleichungssystem* mit n Beobachtungen und u Unbekannten, das wie folgt beschrieben werden kann:

$$\begin{aligned}
 l_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1u}x_u \\
 l_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2u}x_u \\
 &\dots\dots\dots \\
 l_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nu}x_u
 \end{aligned}
 \tag{2-1a}$$

Hierbei bedeuten:

- l_i ... bekannte Beobachtungen (Absolutglieder); $i = 1 \dots n$
- a_{ik} ... bekannte Koeffizienten; $i = 1 \dots n$; $k = 1 \dots u$
- x_k ... Unbekannte des Gleichungssystems; $k = 1 \dots u$

In Matrizenschreibweise läßt sich dieses lineare Gleichungssystem folgendermaßen angeben

$$\mathbf{l} = \mathbf{A} \mathbf{x}$$

mit

(2-1b)

$$\mathbf{l} = \begin{Bmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{Bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{Bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1u} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nu} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_u \end{Bmatrix}$$

wobei \mathbf{l} als *Beobachtungsvektor*, \mathbf{A} als *Koeffizientenmatrix* (auch: *Designmatrix*) und \mathbf{x} als *Lösungsvektor* bezeichnet wird.

Das Gleichungssystem läßt sich eindeutig lösen, wenn $n = u$ unabhängige Beobachtungen vorliegen und die quadratische \mathbf{A} -Matrix den *Rang* $r = n$ besitzt, bzw. die *Determinante* nicht verschwindet ($\det(\mathbf{A}) \neq 0$). In diesem Fall lautet die Lösung

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{l} \quad (2-1c)$$

wobei \mathbf{A}^{-1} die *Inverse* (Kehrmatrix) der \mathbf{A} -Matrix darstellt. Praktisch wird man bei einer sehr großen Anzahl von Unbekannte hier allerdings keine rechentechnisch aufwendige Invertierung der \mathbf{A} -Matrix vornehmen, da es nur auf die Bestimmung der Unbekannten ankommt, die wesentlich schneller z.B. nach dem sog. *Gaußschen Algorithmus* berechnet werden können.

Ist die Anzahl der Beobachtungen größer als die der Unbekannten ($n > u$), man spricht in diesem Fall auch von überschüssigen Beobachtungen, so liegt ein *Ausgleichsproblem* vor. Für eine *optimale Lösung* müssen die Unbekannten dieses sog. inkonsistenten Gleichungssystems so bestimmt werden, daß sich *möglichst kleine Abweichungen (Residuen)* zu den Beobachtungen ergeben. Diese Überlegung führt auf das Verbesserungsgleichungssystem

$$\mathbf{l} + \mathbf{v} = \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{v} = \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{l} \quad (2-2a)$$

in dem \mathbf{v} der zu minimierende Verbesserungsvektor und $\hat{\mathbf{x}}$ der zu bestimmende *ausgeglichene Lösungsvektor* darstellt. Das "Dach"-Zeichen (^) über dem Lösungsvektor \mathbf{x} ist ein in der Ausgleichsrechnung übliche Kennzeichnung für die (ausgeglichenen) Schätzwerte der Unbekannten. Zu Gunsten besserer Lesbarkeit wird es allerdings nachfolgend nicht immer konsequent eingehalten.

Als minimal wird der Vektor \mathbf{v} i.d.R. bezeichnet, wenn seine Länge (euklidische Norm) ein Minimum annimmt.

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v}^T \mathbf{v}} \rightarrow \min \quad (2-2b)$$

(a) Ausgleichung von ungleichgewichtigen Beobachtungen

Geht man allgemein von *ungleichgewichtigen*, also mit unterschiedlichen Genauigkeiten behafteten Beobachtungen aus, muß dem Gleichungssystem (2-2a) noch eine *Gewichtsmatrix* \mathbf{P}

zugeordnet werden, die sich auf den Beobachtungsvektor \mathbf{l} bezieht. Bei *unabhängigen* Beobachtungen ist diese Matrix *nur in der Diagonalen* mit den zum Beobachtungsvektor gehörenden Gewichten ($p_i = p_{ii}$) besetzt:

$$\mathbf{P} = \begin{Bmatrix} p_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p_{nn} \end{Bmatrix} \quad (2-3a)$$

Der *ausgeglichene Lösungsvektor* $\hat{\mathbf{x}}$ wird dann aus der *allgemeinen Minimumsbedingung*

$$\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = \min \quad (2-3b)$$

nach der MkQ wie folgt geschätzt:

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l} \quad (2-4a)$$

Die Matrix $(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})$ wird als *Normalgleichungsmatrix* \mathbf{N} bezeichnet und ihre Inverse als *Q-Matrix* oder *Matrix der Gewichtskoeffizienten*: $\mathbf{Q} = \mathbf{N}^{-1} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1}$. Mit der abkürzenden Definition $\mathbf{n} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l}$ für den sog. *Absolutgliedvektor*, läßt sich der Lösungsvektor auch in folgender Kurzform angeben:

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{n} = \mathbf{Q} \mathbf{n} \quad (2-4b)$$

Aus den Verbesserungen nach (2-2a) kann die Schätzung des *Gewichtseinheitsfehlers* (Standardabweichung einer Beobachtung vom Gewicht $p = 1$) abgeleitet werden:

$$s_0 = \sqrt{\frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{n-u}} \quad (2-5a)$$

Die Schätzungen der Standardabweichung *der Unbekannten* \hat{x}_i werden nach

$$s_{x_i} = s_0 \sqrt{q_{ii}} \quad ; \quad i = 1 \dots u \quad (2-5b)$$

berechnet, wobei q_{ii} das der Unbekannten \hat{x}_i entsprechende Diagonalelement in der *Q-Matrix* ist.

(b) Ausgleichung von gleichgewichtigen Beobachtungen

Werden *gleichgenaue* Beobachtungen unterstellt, geht die Gewichtsmatrix \mathbf{P} in die Einheitsmatrix \mathbf{E} über:

$$\mathbf{E} = \begin{Bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{Bmatrix} \quad (2-6a)$$

In diesem Fall wird von der nachstehend *vereinfachten* Minimumsbedingung ausgegangen

$$\mathbf{v}^T \mathbf{v} = \min \quad (2-6b)$$

aus der sich die Unbekannten und Standardabweichung wie folgt ergeben:

$$\text{Lösungsvektor:} \quad \hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{l} \quad (2-7a)$$

$$\text{Standardabweichung:} \quad s_0 = \sqrt{\frac{\mathbf{v}^T \mathbf{v}}{n-u}} \quad (2-7b)$$

$$\text{Standardabweichung der Unbekannten:} \quad s_{x_i} = s_0 \sqrt{q_{ii}} \quad \text{mit } \mathbf{Q} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \quad (2-7c)$$

(c) Ausgleichung eines *nichtlinearen* Ausgangsgleichungssystems

Wenn die Ausgangsgleichungen *nichtlinear* vorliegen, müssen sie in die für die Ausgleichungsrechnung notwendige Form nach (2-1a) gebracht werden. Dazu müssen sie *linearisiert* werden, wozu die *Taylorische Reihenentwicklung* (Taylorreihe) verwendet wird (siehe z.B. GROSSMANN [1969], Kap. 14.3).

Eine beliebige Beobachtung (L_i) sei durch eine *nichtlineare Funktion* (f_i) mit den Unbekannten x_1, x_2, \dots, x_u gegeben:

$$L_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_u) \quad (2-8a)$$

Die Entwicklung in eine Taylorreihe für *mehrere* Unbekannte, wobei *nur lineare Glieder* berücksichtigt werden, führt auf den Ansatz

$$L_i = f_i(x_1^0, x_2^0, \dots, x_u^0) + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}\right)^0 dx_1 + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_2}\right)^0 dx_2 + \dots + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_u}\right)^0 dx_u \quad (2-8b)$$

mit

$$x_1^0, x_2^0, \dots, x_u^0 \quad = \text{Näherungswerte der Unbekannten}$$

$$f_i(x_1^0, x_2^0, \dots, x_u^0) \quad = \text{Funktionswerte mit den Näherungswerten der Unbekannten}$$

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right)^0 \quad = \text{Partielle Ableitungen der Funktion } f_i \text{ nach } x_k \text{ an den Stellen } x_k^0$$

$$dx_k \quad = \text{Unbekannte des linearisierten Gleichungssystem (Korrekturwerte)}$$

Ein Vergleich mit (2-1a) ergibt die Entsprechungen

$$a_{ik} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right)^0$$

$$x_k = dx_k \quad (2-8c)$$

$$l_i = L_i - f_i(x_1^0, x_2^0, \dots, x_u^0)$$

mit der die Ausgleichung in gewohnter Weise durchgeführt werden kann, wobei die Schätzung der Unbekannten durch

$$\hat{x}_k = x_k^0 + dx_k = x_k^0 + x_k \quad (2-8d)$$

erfolgt. Bei *guter* Wahl der Näherungswerte ist die Ausgleichung damit abgeschlossen, ansonsten muß sie u.U. mehrmals erneut durchgerechnet werden, wobei als Näherungswerte die

jeweils zuvor nach (2-8d) verbesserten Unbekannten eingesetzt werden. Diese iterative Berechnung wird abgebrochen, wenn die Änderungen der Schätzwerte (dx_k) hinreichend klein ausfallen.

2.1.2 Ausgleichung nach direkten Beobachtungen

Im Gegensatz zum oben beschriebenen Ausgleichungsansatz nach *vermittelnden* Beobachtungen, beschränkt sich die Ausgleichung nach *direkten* Beobachtungen auf die Ermittlung und Genauigkeit *einer* unbekanntes Größe. Dieser Ansatz kann z.B. bei Genauigkeitsuntersuchungen von Altkarten zur Ermittlung eines *mittleren Maßstabes aus Streckenvergleichen* zwischen einer Altkarte und einer modernen Karte verwendet werden (siehe Kap. 5.1).

Das lineare Gleichungssystem nach (2-1a) reduziert sich bei *einer* Unbekannten (x) auf:

$$l_i = a_i x$$

mit (2-9a)

$$i = 1 \dots n \quad ; \quad n = \text{Anzahl der Beobachtungen}$$

Zur Lösung können die gleichen Formeln verwendet werden, wie sie für die Ausgleichung nach *vermittelnden* Beobachtungen verwendet werden. Da es sich hier aber um einen Sonderfall handelt, vereinfachen sich die Formeln. Die Koeffizientenmatrix (\mathbf{A}) geht dabei in einen Vektor (\mathbf{a}) über, und der Lösungsvektor (\mathbf{x}) besteht nur aus *einer* Komponente, nämlich der gesuchten und auszugleichenden Unbekannten (x). In Matrizenschreibweise läßt sich (2-9a) folgendermaßen ausdrücken

$$\mathbf{l} = \mathbf{a} \mathbf{x}$$

mit (2-9b)

$$\mathbf{l} = \begin{Bmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{Bmatrix} \quad \mathbf{a} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix} \quad \mathbf{x} = \{x\}$$

Das Verbesserungsgleichungssystem dazu lautet:

$$\mathbf{v} = \mathbf{a} \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{l} \quad (2-9c)$$

(a) Ungleichgewichtigen Beobachtungen

Aus der allgemeinen Minimumsbedingung $\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = \min$, ergibt sich nach der MkQ:

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{a}^T \mathbf{P} \mathbf{a})^{-1} \mathbf{a}^T \mathbf{P} \mathbf{l} \quad (2-10a)$$

Da der Lösungsvektor $\hat{\mathbf{x}}$, als auch die Ausdrücke $\mathbf{a}^T \mathbf{P} \mathbf{a}$ und $\mathbf{a}^T \mathbf{P} \mathbf{l}$ aber hier sog. *Skalare* (*einzelne Zahlen*) darstellen, läßt sich (2-10a) auch folgendermaßen ausdrücken:

$$\hat{x} = \frac{\mathbf{a}^T \mathbf{P} \mathbf{l}}{\mathbf{a}^T \mathbf{P} \mathbf{a}} \quad (2-10b)$$

Der *Gewichtseinheitsfehler* wird nach Formel (2-5a) berechnet, wobei die Anzahl der Unbekannten in diesem Fall $u = 1$ ist:

$$s_0 = \sqrt{\frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{n-1}} \quad (2-10c)$$

Für die Schätzung der *Standardabweichung der Unbekannten* gilt wegen $\mathbf{Q} = (\mathbf{a}^T \mathbf{P} \mathbf{a})^{-1}$:

$$s_x = \frac{s_0}{\sqrt{\mathbf{a}^T \mathbf{P} \mathbf{a}}} \quad (2-10d)$$

Aus den o.a. Formeln läßt sich auf einfache Weise das **gewichtete arithmetische Mittel** (auch: allgemeines Mittel) ableiten. In diesem Fall geht der Koeffizientenvektor \mathbf{a} in den *Einsvektor* \mathbf{e} (auch: Summationsvektor) über:

$$\mathbf{a}^T \rightarrow \mathbf{e}^T = \{1, \dots, 1\}$$

Die Schätzung der Unbekannten und die Standardabweichung berechnen sich danach wie folgt:

Gewichtetes arithmetisches Mittel: $\hat{x} = \frac{\mathbf{p}^T \mathbf{l}}{\mathbf{e}^T \mathbf{p}} \quad (2-11a)$

Gewichtseinheitsfehler: $s_0 = \sqrt{\frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{n-1}} \quad (2-11b)$

Standardabweichung von \hat{x} : $s_x = \frac{s_0}{\sqrt{\mathbf{e}^T \mathbf{p}}} \quad (2-11c)$

Der Gewichtsvektor \mathbf{p} entspricht dabei den Diagonalelementen der \mathbf{P} -Matrix ($p_i = p_{ii}$).

(b) Gleichgewichtige Beobachtungen

Werden gleichgenaue Beobachtungen unterstellt, geht in (2-11) die Gewichtsmatrix \mathbf{P} in die Einheitsmatrix \mathbf{E} bzw. der Gewichtsvektor \mathbf{p} in den Einsvektor \mathbf{e} über:

$$\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{E} \quad ; \quad \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{e}$$

In diesem Fall erhält man die folgenden Ausdrücke für das **einfache arithmetische Mittel** und die Standardabweichung:

Einfaches arithmetisches Mittel: $\hat{x} = \frac{\mathbf{e}^T \mathbf{l}}{n} = (\mathbf{e}^T \mathbf{e})^{-1} \mathbf{e}^T \mathbf{l} \quad (2-12a)$

Standardabweichung: $s = \sqrt{\frac{\mathbf{v}^T \mathbf{v}}{n-1}} \quad (2-12b)$

Standardabweichung von \hat{x} : $s_x = \frac{s}{\sqrt{n}} \quad (2-12c)$

2.2 Ebene Koordinatentransformationen

Die allgemeine Aufgabenstellung bei Koordinatentransformationen besteht darin, das Punktfeld eines Ausgangs-Koordinatensystems mit Hilfe einer *mathematischen Abbildungsvorschrift* in ein Ziel-Koordinatensystem umzuformen. Zur Lösung gibt es verschiedene Möglichkeiten, deren Ergebnisse je nach *Zweck der Aufgabenstellung* unterschiedlich ausfallen. Im folgenden sollen die für Genauigkeitsuntersuchungen von Altkarten relevanten Koordinatentransformationen beschrieben werden.

2.2.1 Einfache Drehung eines Koordinatensystems

Manche Altkarten sind nicht wie bei modernen Karten üblich nach Norden, sondern häufig nach Süden, vereinzelt nach Osten, selten nach Westen orientiert. Um einen Vergleich mit modernen Karten zu ermöglichen, ist es bei bestimmten Aufgabenstellungen notwendig, die aufgrund einer Punktdigitalisierung erfaßten Altkarten-Koordinaten (Ausgangs-Koordinatensystem) in ein *nordorientiertes* Ziel-Koordinatensystem zu überführen. Die Drehung eines ebenen rechtwinkligen Koordinatensystems um einen *beliebigen* Winkel α läßt sich folgendermaßen darstellen:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \end{Bmatrix}}_{\text{Zielkoordinaten}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{Bmatrix}}_{\text{Drehmatrix}} \cdot \underbrace{\begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix}}_{\text{Ausgangs-koordinaten}} \quad (2-13)$$

Der einzusetzende Drehwinkel α ergibt sich aus der Orientierung der Altkarte, so daß daraus für die *Koordinatentransformation in den Hauptrichtungen (Süden, Westen, Osten)* die in der Tabelle 2.1 angeführten einfachen Formeln abgeleitet werden können.

Orientierung der Altkarte	Drehwinkel α	Drehmatrix	Transformationsformeln
Süden	180°	$\begin{Bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Bmatrix}$	$X_i = -x_i$ $Y_i = -y_i$
Westen	+90°	$\begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Bmatrix}$	$X_i = y_i$ $Y_i = -x_i$
Osten	-90°	$\begin{Bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{Bmatrix}$	$X_i = -y_i$ $Y_i = x_i$

Tab. 2.1: Koordinatentransformation bei verschiedenen Altkarten-Orientierungen

Der Drehwinkel α gilt hier bei einer *mathematischen Orientierung* des Koordinatensystems und verläuft daher *positiv gegen den Uhrzeigersinn*. Der *Drehpunkt* ist der Ursprung des Ausgangssystems (x, y) . Bei der Digitalisierung der Ausgangskordinaten sollte darauf geachtet werden, daß die Altkarte *einigermaßen parallel* zum Tablett des Digitizers ausgerichtet wird, damit bei nachfolgender Genauigkeitsuntersuchung der Altkarte keine Verfälschung des *Azimutfehlers* (Abweichung von der Nordrichtung) entsteht.

2.2.2 Ähnlichkeitstransformation

Bei einer Ähnlichkeitstransformation - auch *Helmert-Transformation* (engl.: *Euclidean transformation*) genannt - wird das Punktfeld eines Ausgangssystems (x, y) durch

- *Parallelverschiebung* (Translation) in den beiden Koordinatenrichtungen (X_0, Y_0)
- *Drehung des Koordinatensystems* um einen Winkel (α)
- *Multiplikation* mit einem Maßstabsfaktor (\bar{m})

in ein Ziel-Koordinatensystem (X, Y) überführt. Dies entspricht einer winkeltreuen (konformen) Abbildung. Mit den vier Transformationsparametern $(X_0, Y_0, \alpha, \bar{m})$, lassen sich die Grundgleichungen der Ähnlichkeitstransformation wie folgt ausführlich angeben:

$$\begin{aligned} X &= X_0 + \bar{m} \cdot \cos(\alpha) \cdot x - \bar{m} \cdot \sin(\alpha) \cdot y \\ Y &= Y_0 + \bar{m} \cdot \cos(\alpha) \cdot y + \bar{m} \cdot \sin(\alpha) \cdot x \end{aligned} \quad (2-14a)$$

Mit den Substitutionen (*Hilfs-Transformationsparameter*)

$$\begin{aligned} a_1 &= X_0 \\ a_2 &= Y_0 \\ a_3 &= \bar{m} \cdot \cos(\alpha) \\ a_4 &= \bar{m} \cdot \sin(\alpha) \end{aligned} \quad (2-14b)$$

ergibt sich für die *praktische Berechnung* das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} X_i &= a_1 + a_3 x_i - a_4 y_i \\ Y_i &= a_2 + a_3 y_i + a_4 x_i \end{aligned} \quad (2-14c)$$

das sich in Matrixschreibweise wie folgt definieren läßt:

$$\mathbf{l} = \mathbf{H} \mathbf{a}$$

mit

$$\mathbf{l} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \\ Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{Bmatrix} \quad \mathbf{H} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & x_1 & -y_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & x_n & -y_n \\ 0 & 1 & y_1 & x_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & y_n & x_n \end{Bmatrix} \quad \mathbf{a} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} \quad (2-14d)$$

Zur Bestimmung der vier unbekanntenen Hilfs-Transformationsparameter (\mathbf{a}) sind mindestens zwei homologe Paßpunkte im Ausgangs- und Zielsystem notwendig. Bei mehr als zwei Punkten ergeben sich überschüssige Beobachtungen, so daß der Ausgleichungsfall eintritt. Die ausgeglichenen Unbekannten (auch *Konstanten der Helmert-Transformation* genannt) können dann mit Hilfe der MkQ über das Verbesserungsgleichungssystem

$$\mathbf{v} = \mathbf{H} \hat{\mathbf{a}} - \mathbf{l} \quad (2-14e)$$

nach der Minimumsbedingung $\mathbf{v}^T \mathbf{v} = \min$ geschätzt werden. Der *ausgeglichene Lösungsvektor* $\hat{\mathbf{a}}$ läßt sich danach folgendermaßen berechnen

$$\hat{\mathbf{a}} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{l} \quad (2-15a)$$

woraus dann die *Grund-Transformationsparameter* in Verbindung mit (2-14b) abgeleitet werden können (der Einfachheit halber wird *hier* auf das Dacheichen (^) zur Kennzeichnung der *geschätzten* Parameter verzichtet):

$$\begin{aligned} X_0 &= a_1 \\ Y_0 &= a_2 \\ \alpha &= \arctan\left(\frac{a_4}{a_3}\right) \\ \bar{m} &= +\sqrt{a_3^2 + a_4^2} \end{aligned} \quad (2-15b)$$

Bei Genauigkeitsuntersuchungen von Altkarten sind allerdings aus Gründen der *Anschaulichkeit* nur der *Drehwinkel* α für die Bestimmung der *Abweichung von der Nordrichtung* und der *Maßstabsfaktor* \bar{m} für die Bestimmung der *Maßstabszahl* der Altkarte von Interesse.

Mit den nach (2-15a) bzw. (2-15b) gefundenen Transformationsparameter können nun weitere beliebige Punkte des Ausgangssystems nach (2-14a) bzw. (2-14c) optimal in daß Zielsystem überführt werden. Bei Altkartenuntersuchungen ist das jedoch von *geringer Bedeutung*, da es hier in erster Linie auf die Berechnung der Transformationsparameter und deren Standardabweichungen ankommt.

Die Verbesserungen nach (2-14e) werden auch als *Restklaffungen in den Koordinatenrichtungen* bezeichnet, da sie die nach der Ausgleichung noch verbleibenden Abweichungen (Restfehler, Residuen) zwischen dem Ziel-Koordinatensystem (\mathbf{l}) und dem transformierten Ausgangssystem ($\mathbf{H}\hat{\mathbf{a}}$) ausdrücken. Die Visualisierung dieser Restklaffungsvektoren (siehe dazu Kap. 8) stellt ein ausgezeichnetes Hilfsmittel zur Beurteilung der Genauigkeit des Ausgangssystems dar, wobei nebenbei auch grobe Fehler entdeckt werden können.

Führt man in dem Gleichungssystem nach (2-14a) sog. *Schwerpunktskoordinaten* für die beiden Systeme ein, also auf die jeweiligen Schwerpunkte der Punktmengen *reduzierte Koordinaten*, ergeben sich vereinfachte Formeln zur Berechnung der Transformationsparameter (siehe z.B.: GROSSMANN [1969], Kap. 45.1). Diese sind vor allem für Handrechnungen mit relativ wenigen Punkten geeignet, da einerseits mit kleinen Zahlen gerechnet werden kann und andererseits die Rechenschärfe nicht zu weit getrieben werden muß. Von Nachteil ist allerdings der erhöhte Rechenaufwand zur Ermittlung der Schwerpunktskoordinaten.

Heutzutage besteht aber *keine Notwendigkeit* mehr, mit Schwerpunktskoordinaten zu arbeiten, da die Berechnungen unter Verwendung schneller und leistungsfähiger Rechner sowie professioneller mathematischer Software (z.B.: Matlab oder MathCad) durchgeführt werden, die mit ausreichender Rechenschärfe arbeiten. Letztendlich werden die gleichen Ergebnisse erzielt, wenn auch auf unterschiedlicher Weise. Auf die Darstellung des Formelsystems mit Schwerpunktskoordinaten wird deshalb hier verzichtet, besonders da sich auch formal die Berechnung der Unbekannten und auch deren Standardabweichungen nicht so prägnant und elegant wiedergeben lassen, wie hier beschrieben.

Genauigkeitsbetrachtung:

Zur Berechnung eines *mittleren Koordinatenfehlers* kann in Analogie zur *Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen* das Fehlermaß nach (2-7b) herangezogen werden. Danach ergibt sich für die Helmert-Transformation das in der üblichen Weise angegebene Genauigkeitsmaß:

$$s_0 = \sqrt{\frac{\mathbf{v}^T \mathbf{v}}{2n_p - 4}} \quad \text{mit: } n_p = \text{Anzahl der Paßpunkte} \quad (2-16a)$$

Für diesen Ausdruck hat sich in der geodätischen Fachliteratur bis heute leider *keine einheitliche* Bezeichnung gefunden. So definiert GROSSMANN [1969] ihn als *mittleren Betrag der Restklaffungen in Richtung der Koordinatenachsen*. MITTERMEIER [1975] definiert ihn als *mittleren Radialfehler* und GOTTHARDT [1978] bezeichnet ihn als *fiktiven mittleren Fehler der Koordinaten*, wobei er darauf hinweist, "daß dieser nur vorhanden wäre, wenn es sich bei den Punktkoordinaten um direkt gemessene, von einander unabhängige Größen handelte, somit keine unmittelbare fehlertheoretische Bedeutung haben und nur als *konventionelles Maß* gilt, das die mehr oder weniger vollkommene Ähnlichkeit der Punktlagen zum Ausdruck bringt". Abgesehen davon, kann der Ausdruck nach (2-16a) aber auf jeden Fall als ein *relevantes Beurteilungsmaß* hergenommen werden, wenn die Genauigkeit verschiedener Altkarten *untereinander* verglichen werden sollen.

Der *mittlere Punktfehler* bezeichnet die *mittlere Lageunsicherheit eines Paßpunktes* und wird in der Ausgleichsrechnung häufig an Stelle der sog. *Fehlerellipse* angegeben. Er ist wie folgt definiert (GROSSMANN [1969], GOTTHARDT [1978]):

$$s_p = \sqrt{s_x^2 + s_y^2} \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} s_x \dots \text{mittl. Koordinatenfehler in x-Richtung} \\ s_y \dots \text{mittl. Koordinatenfehler in y-Richtung} \end{array} \quad (2-16b)$$

Da bei der Ähnlichkeitstransformation für den mittleren Betrag der Restklaffungen in Richtung der Koordinatenachsen ungefähr $s_x = s_y = s_0$ angesetzt werden kann, ergibt sich für die Schätzung des mittleren Punktfehlers:

$$s_p = s_0 \sqrt{2} \quad (2-16c)$$

Nach HÖPCKE [1980] wird er auch als *mittlere restliche Klaffung* bezeichnet.

Die **Standardabweichung der Hilfs-Transformationsparameter (a)** lassen sich analog nach (2-5b) berechnen

$$s_{a_i} = s_0 \sqrt{q_{ii}} \quad ; \quad i = 1 \dots 4 \quad (2-17a)$$

wobei sich die Diagonalelemente (q_{ii}) der **Q**-Matrix aus der Invertierung der Normalgleichungsmatrix ableiten:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{N}^{-1} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \quad (2-17b)$$

Für die Beurteilung der Genauigkeit von Altkarten stellen die Hilfs-Transformationsparameter und deren Standardabweichungen *keine anschaulichen* Werte dar. Primär interessiert hier nur die Genauigkeit der Grund-Transformationsparameter, insbesondere die Standardabweichung des *Drehwinkels* α und die Standardabweichung des *Maßstabsfaktors* \bar{m} .

Die *Standardabweichung der Translationsparameter* können nach (2-5b) berechnet werden

$$\begin{aligned} s_{x_0} &= s_{a_1} = s_0 \sqrt{q_{11}} \\ s_{y_0} &= s_{a_2} = s_0 \sqrt{q_{22}} \end{aligned} \quad (2-18a)$$

sind aber für Genauigkeitsuntersuchungen von Altkarten *nicht von Bedeutung* und werden hier und nachfolgend nur der Vollständigkeit halber angegeben.

Die Bestimmung der Genauigkeit des *Drehwinkels* und des *Maßstabsfaktors* gestaltet sich etwas schwieriger, da α und \bar{m} Funktionen der Hilfs-Transformationsparameter (a_3, a_4) sind, die ihrerseits schon mit einer mittleren Unsicherheit nach (2-17a) behaftet sind. Zur Berechnung der Standardabweichung von α und \bar{m} müssen daher sog. *Funktionsgewichte* (auch: *Gewichtsreziproke*) Q_f für den Drehwinkel und den Maßstabsfaktor bestimmt werden, aus denen sich die Standardabweichungen berechnen lassen.

Die Standardabweichung einer Funktion der Unbekannten wird allg. nach folgender Formel berechnet

$$s_f = s_0 \sqrt{Q_f} \quad (2-18b)$$

wobei der Index f symbolisch für eine spezielle Funktion steht. Im Falle der Helmert-Transformation also: $\alpha = f(a_3, a_4)$ bzw. $\bar{m} = g(a_3, a_4)$.

Da diese Funktionen nach (2-15b) *nichtlinear* sind, müssen sie zur Bestimmung der Funktionsgewichte mit Hilfe der Taylorreihe nach (2-8b) *linearisiert* werden. Die dazu benötigten *partiellen Ableitungen 1. Ordnung* nach den Unbekannten (a_i) lassen sich durch zwei Vektoren *symbolisch* und *konkret* für die Helmert-Transformation folgendermaßen darstellen:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^T &= \left\{ \frac{\partial \alpha}{\partial a_1}, \frac{\partial \alpha}{\partial a_2}, \frac{\partial \alpha}{\partial a_3}, \frac{\partial \alpha}{\partial a_4} \right\} = \left\{ 0, 0, -\frac{\sin \alpha}{\bar{m}}, \frac{\cos \alpha}{\bar{m}} \right\} \\ \mathbf{g}^T &= \left\{ \frac{\partial \bar{m}}{\partial a_1}, \frac{\partial \bar{m}}{\partial a_2}, \frac{\partial \bar{m}}{\partial a_3}, \frac{\partial \bar{m}}{\partial a_4} \right\} = \{ 0, 0, \cos \alpha, \sin \alpha \} \end{aligned} \quad (2-18c)$$

Die gesuchten Funktionsgewichte können dann wie folgt berechnet werden

$$\begin{aligned} Q_\alpha &= \mathbf{f}^T \mathbf{Q} \mathbf{f} \\ Q_{\bar{m}} &= \mathbf{g}^T \mathbf{Q} \mathbf{g} \end{aligned} \quad (2-18d)$$

woraus sich schließlich die **Standardabweichung des Drehwinkels und des Maßstabsfaktors** ableiten lassen:

$$\begin{aligned} s_\alpha &= s_0 \sqrt{Q_\alpha} \\ s_{\bar{m}} &= s_0 \sqrt{Q_{\bar{m}}} \end{aligned} \quad (2-18e)$$

Da sich wegen der besonderen Form der Koeffizientenmatrix \mathbf{H} bei der Berechnung der \mathbf{Q} -Matrix aber Vereinfachungen ergeben ($q_{33} = q_{44}$ und $q_{34} = 0$), kann nachgewiesen werden, daß die Formeln nach (2-18e) in Verbindung mit den konkreten Komponenten der Vektoren \mathbf{f} und \mathbf{g} nach (2-18c) letztendlich auf sehr *einfache Ausdrücke* übergehen:

$$s_{\bar{m}} = s_{a_3} = s_{a_4} \quad s_\alpha = \frac{s_{a_3}}{\bar{m}} = \frac{s_{a_4}}{\bar{m}} = \frac{s_{\bar{m}}}{\bar{m}} \quad (2-18f)$$

Die Standardabweichungen des Drehwinkels und des Maßstabsfaktors lassen sich also ohne den relativ großen Rechenaufwand nach (2-18d) und (2-18e), unmittelbar aus den Standardabweichungen der Hilfs-Transformationsparameter nach (2-17a) und des Maßstabsfaktors nach (2-15b) berechnen.

2.2.3 Affintransformation

Für eine Koordinatenumformung mit Hilfe der Affintransformation lassen sich zwei Varianten anführen, die unter den Bezeichnungen

6-Parameter-Transformation

5-Parameter-Transformation

bekannt sind. Wie die Namen schon andeuten, besteht der Unterschied in der Anzahl der angesetzten Transformationsparameter. Der Normalfall ist die *6-Parameter-Transformation*, aus der sich durch eine Spezialisierung die *5-Parameter-Transformation* ableitet. Beide stellen zusammen mit der *Helmert-Transformation*, die wichtigsten Verfahren zur Koordinatenumformungen für Altkartenuntersuchungen dar.

(a) 6-Parameter Transformation

Bei einer *6-Parameter-Transformation* wird das Punktfeld eines Ausgangssystems (x, y) durch folgende geometrische Operationen in ein Ziel-Koordinatensystem (X, Y) überführt:

- *Parallelverschiebung* (Translation) in den beiden Koordinatenrichtungen (X_0, Y_0)
- *Unterschiedliche Verdrehungen* der Haupt-Koordinatenachsen (α_x, α_y)
- *Unterschiedliche Skalierung* (Maßstabsfaktoren) auf den Hauptachsen (\bar{m}_x, \bar{m}_y)

Dies entspricht einer Parallelprojektion zweier schief zueinander stehender Ebenen aufeinander, so daß z.B. ein Kreis in eine Ellipse oder ein Quadrat in ein Parallelogramm überführt wird. Wegen des Ansatzes getrennter Maßstabsfaktoren in X- und Y-Richtung, ist sie gerade für Altkartenuntersuchungen von besonderer Bedeutung, da aufgrund der damaligen unzureichenden Meß- und Kartiermethoden, sowie Verformungseinflüsse auf die Zeichnungs- und Druckträger, mit unterschiedlichen Maßstabsfaktoren in Richtung der Hauptachsen gerechnet werden kann. Der Helmert-Transformation ist sie deshalb im allgemeinen vorzuziehen.

Mit den oben beschriebenen *sechs* Transformationsparametern $(X_0, Y_0, \alpha_x, \alpha_y, \bar{m}_x, \bar{m}_y)$, werden die Grundgleichungen der 6-Parameter-Transformation ausführlich wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} X &= X_0 + \bar{m}_x \cdot \cos(\alpha_x) \cdot x - \bar{m}_y \cdot \sin(\alpha_y) \cdot y \\ Y &= Y_0 + \bar{m}_x \cdot \sin(\alpha_x) \cdot x + \bar{m}_y \cdot \cos(\alpha_y) \cdot y \end{aligned} \quad (2-19a)$$

Mit den Substitutionen

$$\begin{aligned} a_1 &= X_0 & b_1 &= Y_0 \\ a_2 &= \bar{m}_x \cdot \cos(\alpha_x) & b_2 &= \bar{m}_x \cdot \sin(\alpha_x) \\ a_3 &= -\bar{m}_y \cdot \sin(\alpha_y) & b_3 &= \bar{m}_y \cdot \cos(\alpha_y) \end{aligned} \quad (2-19b)$$

ergibt sich das vereinfachte Gleichungssystem

$$\begin{aligned} X_i &= a_1 + a_2 x_i + a_3 y_i \\ Y_i &= b_1 + b_2 x_i + b_3 y_i \end{aligned} \quad (2-19c)$$

das einer sog. *allgemeinen linearen Transformation* entspricht.

In Matrixschreibweise kann man (2-19c) getrennt nach X- und Y-Koordinaten darstellen. Für nachfolgende Berechnungen ergeben sich dadurch rechentechnische Vereinfachungen, da mit kleineren Vektoren und Matrizen gearbeitet werden kann:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{Aa} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{Ab} \end{aligned}$$

mit

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{Bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{Bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & y_n \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} \quad (2-19d)$$

Zur Bestimmung der *sechs* unbekanntenen Hilfs-Transformationsparameter (\mathbf{a} , \mathbf{b}) sind mindestens *drei* homologe Paßpunkte im Ausgangs- und Zielsystem notwendig. Bei überschüssigen Beobachtungen lauten die Verbesserungsgleichungen

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{x} \\ \mathbf{w} &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{b}} - \mathbf{y} \end{aligned} \quad (2-19e)$$

aus denen sich nach der Methode der kleinsten Quadrate mit den Minimumsbedingungen $\mathbf{u}^T \mathbf{u} = \min$ und $\mathbf{w}^T \mathbf{w} = \min$ die ausgeglichenen Hilfs- und Grund-Transformationsparameter berechnen lassen:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{a}} &= (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{x} \\ \hat{\mathbf{b}} &= (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{y} \end{aligned} \quad (2-19f)$$

$$\begin{aligned} X_0 &= a_1 & Y_0 &= b_1 \\ \alpha_x &= \arctan\left(\frac{b_2}{a_2}\right) & \alpha_y &= \arctan\left(\frac{-a_3}{b_3}\right) \\ \bar{m}_x &= +\sqrt{a_2^2 + b_2^2} & \bar{m}_y &= +\sqrt{a_3^2 + b_3^2} \end{aligned}$$

Die Hauptachsen des Ausgangssystems stehen *nach* der 6-Parameter-Transformation im allgemeinen *nicht mehr senkrecht* aufeinander. Die *Abweichung vom rechten Winkel* läßt sich durch

$$\Delta\alpha = \alpha_y - \alpha_x \quad (2-19g)$$

ausdrücken und stellt für Altkartenuntersuchungen ein wichtiges Kriterium dar, da sie nicht zu groß sein sollte. Abweichungen von mehr als ca. $|\Delta\alpha| = 10^\circ$ lassen erfahrungsgemäß darauf schließen, daß die *6-Parameter-Transformation* in diesem Fall *kein* geeignetes Abbil-

Modell darstellt, um eine vom damaligen Kartenmacher beabsichtigte *Kartenabbildung* optimal anzupassen, da es kaum vorstellbar ist, daß er bewußt ein schiefwinkliges Koordinatensystem zur Konstruktion seiner Karte verwendete (siehe dazu auch Kap. 4: *Bestimmung adäquater Karten-Netzentwürfe für Altkarten*). Abhilfe kann hier möglicherweise die weiter unten beschriebene *5-Parameter-Transformation* oder andere Verfahren liefern.

Genauigkeitsschätzung:

Mittlerer Betrag der Restklaffungen in Richtung der Koordinatenachsen:

$$s_0 = \sqrt{\frac{\mathbf{u}^T \mathbf{u} + \mathbf{w}^T \mathbf{w}}{2n_p - 6}} \quad \text{mit: } n_p = \text{Anzahl der Punkte} \quad (2-20a)$$

Mittlerer Betrag der Restklaffungen in x-Richtung: $s_x = \sqrt{\frac{\mathbf{u}^T \mathbf{u}}{n_p - 3}}$ (2-20b)

Mittlerer Betrag der Restklaffungen in y-Richtung: $s_y = \sqrt{\frac{\mathbf{w}^T \mathbf{w}}{n_p - 3}}$ (2-20c)

Mittlerer Punktfehler: $s_p = \sqrt{s_x^2 + s_y^2} = s_0 \sqrt{2}$ (2-20d)

Standardabweichung der Hilfs-Transformationsparameter (allgemein):

$$s_{a_i} = s_{b_i} = s_0 \sqrt{q_{ii}} \quad ; \quad i = 1 \dots 3$$

mit (2-20e)

$$q_{ii} \text{ aus } \mathbf{Q} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1}$$

Standardabweichung der Translationsparameter:

$$s_{x_0} = s_{y_0} = s_{a_i} = s_{b_i} \quad (2-20f)$$

Standardabweichung der Drehwinkel und der Maßstabsfaktoren

$$\begin{aligned} s_{\alpha_x} &= s_0 \sqrt{Q_{\alpha_x}} & s_{\alpha_y} &= s_0 \sqrt{Q_{\alpha_y}} \\ s_{\bar{m}_x} &= s_0 \sqrt{Q_{\bar{m}_x}} & s_{\bar{m}_y} &= s_0 \sqrt{Q_{\bar{m}_y}} \end{aligned} \quad (2-20g)$$

mit den Gewichtsreziproken

$$\begin{aligned} Q_{\alpha_x} &= \mathbf{f}_a^T \mathbf{Q} \mathbf{f}_a + \mathbf{f}_b^T \mathbf{Q} \mathbf{f}_b & Q_{\alpha_y} &= \mathbf{f}_c^T \mathbf{Q} \mathbf{f}_c + \mathbf{f}_d^T \mathbf{Q} \mathbf{f}_d \\ Q_{\bar{m}_x} &= \mathbf{g}_a^T \mathbf{Q} \mathbf{g}_a + \mathbf{g}_b^T \mathbf{Q} \mathbf{g}_b & Q_{\bar{m}_y} &= \mathbf{g}_c^T \mathbf{Q} \mathbf{g}_c + \mathbf{g}_d^T \mathbf{Q} \mathbf{g}_d \end{aligned} \quad (2-20h)$$

wobei

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_a^T &= \left\{ \frac{\partial \alpha_x}{\partial a_1}, \frac{\partial \alpha_x}{\partial a_2}, \frac{\partial \alpha_x}{\partial a_3} \right\} = \left\{ 0, \frac{-\sin(\alpha_x)}{\bar{m}_x}, 0 \right\} \\ \mathbf{f}_b^T &= \left\{ \frac{\partial \alpha_x}{\partial b_1}, \frac{\partial \alpha_x}{\partial b_2}, \frac{\partial \alpha_x}{\partial b_3} \right\} = \left\{ 0, \frac{\cos(\alpha_x)}{\bar{m}_x}, 0 \right\} \end{aligned} \quad (2-20i)$$

$$\mathbf{f}_c^T = \left\{ \frac{\partial \alpha_y}{\partial a_1}, \frac{\partial \alpha_y}{\partial a_2}, \frac{\partial \alpha_y}{\partial a_3} \right\} = \{0, 0, \cos(\alpha_y)\}$$

$$\mathbf{f}_d^T = \left\{ \frac{\partial \alpha_y}{\partial b_1}, \frac{\partial \alpha_y}{\partial b_2}, \frac{\partial \alpha_y}{\partial b_3} \right\} = \{0, 0, -\sin(\alpha_y)\}$$
(2-20i)

und

$$\mathbf{g}_a^T = \left\{ \frac{\partial \bar{m}_x}{\partial a_1}, \frac{\partial \bar{m}_x}{\partial a_2}, \frac{\partial \bar{m}_x}{\partial a_3} \right\} = \{0, \cos(\alpha_x), 0\}$$

$$\mathbf{g}_b^T = \left\{ \frac{\partial \bar{m}_x}{\partial b_1}, \frac{\partial \bar{m}_x}{\partial b_2}, \frac{\partial \bar{m}_x}{\partial b_3} \right\} = \{0, \sin(\alpha_x), 0\}$$

$$\mathbf{g}_c^T = \left\{ \frac{\partial \bar{m}_y}{\partial a_1}, \frac{\partial \bar{m}_y}{\partial a_2}, \frac{\partial \bar{m}_y}{\partial a_3} \right\} = \{0, 0, -\sin(\alpha_y)\}$$

$$\mathbf{g}_d^T = \left\{ \frac{\partial \bar{m}_y}{\partial b_1}, \frac{\partial \bar{m}_y}{\partial b_2}, \frac{\partial \bar{m}_y}{\partial b_3} \right\} = \{0, 0, \cos(\alpha_y)\}$$
(2-20j)

Wie schon bei der Ähnlichkeitstransformation kann auch hier nachgewiesen werden, daß die Formeln nach (2-20g,h) in Verbindung mit den konkreten Komponenten der Vektoren nach (2-20i,j) und den Hilfs-Transformationsparameter nach (2-20e), letztlich auf die folgenden *einfachen Ausdrücke* übergehen:

$$s_{\bar{m}_x} = s_{a_2} = s_{b_2} \quad s_{\bar{m}_y} = s_{a_3} = s_{b_3}$$

$$s_{\alpha_x} = \frac{s_{a_2}}{\bar{m}_x} = \frac{s_{b_2}}{\bar{m}_x} = \frac{s_{\bar{m}_x}}{\bar{m}_x} \quad s_{\alpha_y} = \frac{s_{a_3}}{\bar{m}_y} = \frac{s_{b_3}}{\bar{m}_y} = \frac{s_{\bar{m}_y}}{\bar{m}_x}$$
(2-20k)

(b) 5-Parameter-Transformation

Bei dieser Transformation kann das Punktfeld eines Ausgangssystems (x, y) durch folgende geometrische Operationen in ein Ziel-Koordinatensystem (X, Y) überführt werden:

- *Parallelverschiebung* (Translation) in den beiden Koordinatenrichtungen (X_0, Y_0)
- *Drehung des Koordinatensystems* um einen Winkel (α)
- *Unterschiedliche Skalierung* (Maßstabsfaktoren) auf den Hauptachsen (\bar{m}_x, \bar{m}_y)

Anstatt *eines* Drehwinkels und *zweier* Maßstabsfaktoren, könnte die Transformation auch mit *zwei* Drehwinkeln (α_x, α_y) und nur *einem* Maßstabsfaktor (\bar{m}) definiert werden. Für Alt-kartenuntersuchungen ist das allerdings von untergeordneter Bedeutung, da mehr die unterschiedliche Skalierung in Richtung der Hauptachsen interessiert. Bei der hier beschriebenen 5-Parameter-Transformation bleibt daher das rechtwinklige Ausgangssystem *nach* der Transformation erhalten. Analog zu (2-19a) lassen sich folgende **Grundgleichungen** mit *fünf* Transformationsparametern $(X_0, Y_0, \alpha, \bar{m}_x, \bar{m}_y)$ ableiten:

$$X = X_0 + \bar{m}_x \cdot \cos(\alpha) \cdot x - \bar{m}_y \cdot \sin(\alpha) \cdot y$$

$$Y = Y_0 + \bar{m}_x \cdot \sin(\alpha) \cdot x + \bar{m}_y \cdot \cos(\alpha) \cdot y$$
(2-21a)

Zur Berechnung der Transformationsparameter wird (2-21a) zunächst mit Hilfe der Taylorreihe nach (2-8b) linearisiert:

$$\begin{aligned} dX &= \left(\frac{\partial X}{\partial X_0}\right)^0 dX_0 + \left(\frac{\partial X}{\partial Y_0}\right)^0 dY_0 + \left(\frac{\partial X}{\partial \alpha}\right)^0 d\alpha + \left(\frac{\partial X}{\partial \bar{m}_x}\right)^0 d\bar{m}_x + \left(\frac{\partial X}{\partial \bar{m}_y}\right)^0 d\bar{m}_y \\ dY &= \left(\frac{\partial Y}{\partial X_0}\right)^0 dX_0 + \left(\frac{\partial Y}{\partial Y_0}\right)^0 dY_0 + \left(\frac{\partial Y}{\partial \alpha}\right)^0 d\alpha + \left(\frac{\partial Y}{\partial \bar{m}_x}\right)^0 d\bar{m}_x + \left(\frac{\partial Y}{\partial \bar{m}_y}\right)^0 d\bar{m}_y \end{aligned} \quad (2-21b)$$

Mit den Näherungswerten $X_0^0, Y_0^0, \alpha^0, \bar{m}_x^0, \bar{m}_y^0$, die z.B. aus einer zuvor berechneten Helmert-Transformation (hier: $\bar{m}_x^0 = \bar{m}_y^0 = \bar{m}$) abgeleitet werden können, bedeuten:

$$\left. \begin{aligned} dX &= X - X^0 \\ dY &= Y - Y^0 \end{aligned} \right\} \text{ reduzierte Zielkoordinaten, wobei}$$

$$\left. \begin{aligned} X^0 &= X_0^0 + \bar{m}_x^0 \cdot \cos(\alpha^0) \cdot x - \bar{m}_y^0 \cdot \sin(\alpha^0) \cdot y \\ Y^0 &= Y_0^0 + \bar{m}_x^0 \cdot \sin(\alpha^0) \cdot x + \bar{m}_y^0 \cdot \cos(\alpha^0) \cdot y \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Näherungzielkoordinaten} \\ \text{mit den Näherungswerten} \end{array}$$

Die *Unbekannten* des linearisierten Gleichungssystems sind $dX_0, dY_0, d\alpha, d\bar{m}_x, d\bar{m}_y$ und stellen *kleine* Korrekturwerte (Verbesserungen) zu den Näherungswerten dar. Die *partiellen Ableitungen* der Funktionen für X und Y nach den Unbekannten in (2-21b), die konkret mit den Näherungswerten berechnet werden, definieren die Koeffizientenmatrix (**A**). Danach erhält man folgendes Gleichungssystem

$$\mathbf{l} = \mathbf{Aa}$$

mit

$$\mathbf{l} = \begin{Bmatrix} dX_1 \\ \vdots \\ dX_n \\ dY_1 \\ \vdots \\ dY_n \end{Bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & Y_0^0 - Y_1^0 & \cos(\alpha^0)x_1 & -\sin(\alpha^0)y_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & Y_0^0 - Y_n^0 & \cos(\alpha^0)x_n & -\sin(\alpha^0)y_n \\ 0 & 1 & -X_0^0 + X_1^0 & \sin(\alpha^0)x_1 & \cos(\alpha^0)y_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & -X_0^0 + X_n^0 & \sin(\alpha^0)x_n & \cos(\alpha^0)y_n \end{Bmatrix} \quad \mathbf{a} = \begin{Bmatrix} dX_0 \\ dY_0 \\ d\alpha \\ d\bar{m}_x \\ d\bar{m}_y \end{Bmatrix} \quad (2-21c)$$

aus welcher der *Lösungsvektor* ($\hat{\mathbf{a}}$) über das Verbesserungsgleichungssystem $\mathbf{v} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{l}$ mit der Minimumsbedingung $\mathbf{v}^T \mathbf{v} = \min$ nach der MkQ berechnet wird:

$$\hat{\mathbf{a}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{l} \quad (2-21d)$$

Die gesuchten *Transformationsparameter* ergeben sich dann wie folgt:

$$\begin{aligned} X_0 &= X_0^0 + dX_0 \\ Y_0 &= Y_0^0 + dY_0 \\ \alpha &= \alpha^0 + d\alpha \\ \bar{m}_x &= \bar{m}_x^0 + d\bar{m}_x \\ \bar{m}_y &= \bar{m}_y^0 + d\bar{m}_y \end{aligned} \quad (2-21e)$$

Es empfiehlt sich hier grundsätzlich eine *iterative Ausgleichsrechnung*, wobei die nach (2-21e) berechneten Transformationsparameter erneut als Näherungsparameter in (2-21d) eingehen. Dieser iterative Prozeß kann abgebrochen werden, wenn die *Verbesserungen* ($\hat{\mathbf{a}}$) *hinreichend klein* ausfallen. Erfahrungsgemäß ist das bei Altkartenuntersuchungen je nach Genauigkeit der eingeführten Näherungswerte nach 4-6 Iterationen gegeben.

Genauigkeitsschätzung:

Mittlerer Betrag der Restklaffungen in Richtung der Koordinatenachsen:

$$s_0 = \sqrt{\frac{\mathbf{v}^T \mathbf{v}}{2n_p - 5}} \quad \text{mit: } n_p = \text{Anzahl der Punkte} \quad (2-22a)$$

Mittlerer Punktfehler: $s_p = s_0 \sqrt{2}$ (2-22b)

Standardabweichung der (Grund-)Transformationsparameter (mit $\mathbf{Q} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1}$):

$$\begin{aligned} s_{x_0} &= s_{y_0} = s_0 \sqrt{q_{11}} = s_0 \sqrt{q_{22}} \\ s_\alpha &= s_0 \sqrt{q_{33}} \\ s_{\bar{m}_x} &= s_0 \sqrt{q_{44}} \\ s_{\bar{m}_y} &= s_0 \sqrt{q_{55}} \end{aligned} \quad (2-22c)$$

2.2.4 Bilineare Transformation

Bei einer bilinearen Transformation (auch: bilineare Interpolation) wird das Punktfeld eines Ausgangssystems (x, y) durch folgenden Ansatz in ein Ziel-Koordinatensystem (X, Y) überführt:

$$\begin{aligned} X_i &= a_1 + a_2 x_i + a_3 y_i + a_4 x_i y_i \\ Y_i &= b_1 + b_2 x_i + b_3 y_i + b_4 x_i y_i \end{aligned} \quad (2-23a)$$

Getrennt nach X- und Y-Koordinaten ergibt sich in Matrixschreibweise:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{B}\mathbf{a} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{B}\mathbf{b} \end{aligned}$$

mit

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{Bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{Bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1 y_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & y_n & x_n y_n \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{Bmatrix} \quad (2-23b)$$

Die wichtigsten Abbildungseigenschaften dieser Transformation (siehe dazu auch Abb. 2.1) lassen sich folgendermaßen beschreiben:

1. *Quadrate bzw. Rechtecke* werden als *schiefwinklige Vierecke* abgebildet
2. *Linien, die parallel zu den Hauptachsen* liegen, werden *geradlinig* und *teilungsverhältnistreu* abgebildet

3. Ein *orthogonales Liniennetz*, das zu den Hauptachsen parallel liegt, wird *nicht orthogonal* abgebildet
4. Linien, die *nicht parallel* zu den Hauptachsen liegen, werden *nicht geradlinig* abgebildet (sie entsprechen Kurven 2. Grades; vergleiche die Abbildung der Diagonalen)

Im Gegensatz zu den bisher behandelten Koordinatentransformationen fehlen hier u.a. die Eigenschaften der Winkeltreue (Helmert-Transformation), Paralleltreue und die allgemeine Geradentreue (Helmert- bzw. Affin-Transformation). Für Altkartenuntersuchungen ist das aber *keinesfalls von Nachteil*. Für einige Aufgabenstellungen stellt die bilineare Transformation die sinnvollste und praktikabelste Lösung dar.

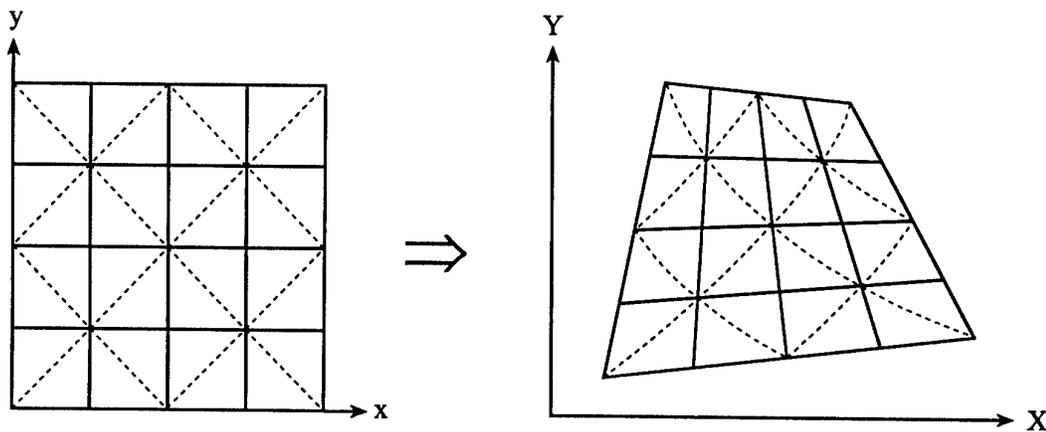


Abb. 2.1: Abbildung eines orthogonalen Liniensystems mit bilinearer Transformation

Zur Bestimmung der *acht* unbekanntem Transformationsparameter (\mathbf{a} , \mathbf{b}) sind mindestens *vier* homologe Paßpunkte im Ausgangs- und Zielsystem notwendig. Für Altkartenuntersuchungen wird sowohl die Lösung mit *überschüssigen* Beobachtungen ($n > u$), als auch die eindeutige Lösung mit $n = u$ Beobachtungen benötigt. Die Verfahren dazu, werden im folgenden vorgestellt.

(a) Ausgleichsrechnung

Da hier überschüssige Beobachtungen vorliegen ($n > u$), erhält man mit den Verbesserungsgleichungen

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{B}\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{x} \\ \mathbf{w} &= \mathbf{B}\hat{\mathbf{b}} - \mathbf{y} \end{aligned} \quad (2-24a)$$

und den Minimumbedingungen

$$\mathbf{u}^T \mathbf{u} = \min, \quad \mathbf{w}^T \mathbf{w} = \min \quad (2-24b)$$

nach der MkQ die ausgleichenen Transformationsparameter:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{a}} &= (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{x} \\ \hat{\mathbf{b}} &= (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{y} \end{aligned} \quad (2-24c)$$

Maßstabsfaktor und Drehwinkel:

Anders als bei der Helmert- oder Affin-Transformation kann bei der bilinearen Transformation (abgesehen von den Translationsparametern) für die Abbildung des gesamten Punkt-

feldes *kein eindeutiger* Drehwinkel und Maßstabsfaktor aus den Transformationsparameter nach (2-24c) ableitet werden. In jedem Punkt der Abbildung liegen einerseits *unterschiedliche* Maßstabsverhältnisse vor und andererseits *unterschiedliche* Verdrehungen des ursprünglich orthogonalen Liniennetzes (Parallelen zu den Hauptachsen des Ausgangssystems, auch als *x-Linien* und *y-Linien* bezeichnet) vor. Maßstabsfaktor und Drehwinkel stellen somit *Ortsfunktionen* dar, sind also abhängig von der Lage eines Punktes (x, y) im Ausgangssystem. Zur Bestimmung dieser Ortsfunktionen berechnet man zunächst aus (2-23a) die *totalen Differentiale*, wobei nach den Variablen (x, y) differenziert wird:

$$\begin{aligned} dX(x, y) &= (a_2 + a_4 y) \cdot dx + (a_3 + a_4 x) \cdot dy \\ dY(x, y) &= (b_2 + b_4 y) \cdot dx + (b_3 + b_4 x) \cdot dy \end{aligned} \quad (2-25a)$$

Allgemein ergibt sich die Ortsfunktion des Maßstabsfaktors als Quotient differentieller homologer Strecken zwischen dem Zielsystem (dS) und dem Ausgangssystem (ds):

$$\bar{m}(x, y) = \frac{dS}{ds} = \frac{+\sqrt{dX(x, y)^2 + dY(x, y)^2}}{+\sqrt{dx^2 + dy^2}} \quad (2-25b)$$

Setzt man in (2-25a) $dy = 0$ (ds liegt im Ausgangssystem parallel zur x-Achse) erhält man aus (2-25b) den **Maßstabsfaktor in x-Richtung**, der nur von der y-Koordinate der Ortsposition abhängig ist:

$$\bar{m}_x(y) = +\sqrt{(a_2 + a_4 y)^2 + (b_2 + b_4 y)^2} \quad (2-25c)$$

Entsprechend erhält man den **Maßstabsfaktor in y-Richtung** als Funktion der x-Koordinate, wenn in (2-25a) $dx = 0$ gesetzt wird (ds liegt in diesem Fall parallel zur y-Achse des Ausgangssystems):

$$\bar{m}_y(x) = +\sqrt{(a_3 + a_4 x)^2 + (b_3 + b_4 x)^2} \quad (2-25d)$$

Um die *Verdrehungen bzw. Drehwinkel der x- und y-Linien als Ortsfunktion* zu bestimmen, geht man von dem *Steigungswinkel* (α) der Differentialstrecke dS im Zielsystem aus, der *allgemein* wie folgt definiert werden kann:

$$\alpha(x, y) = \arctan\left(\frac{dY(x, y)}{dX(x, y)}\right) \quad (2-26a)$$

Setzt man in (2-25a) $dy = 0$ erhält man mit (2-26a) den **Drehwinkel der x-Linien** als Funktion der y-Koordinate:

$$\alpha_x(y) = \arctan\left(\frac{b_2 + b_4 y}{a_2 + a_4 y}\right) \quad (2-26b)$$

Den **Drehwinkel der y-Linien** als Funktion der x-Koordinate erhält man, wenn in (2-25a) $dx = 0$ gesetzt wird und außerdem eine einfache Drehung des Koordinatensystems um $+90^\circ$ nach (2-13) bzw. Tab. 2.1 vorgenommen wird, so daß in (2-26a) $dY = -dX$ und $dX = dY$ gesetzt werden muß (der Drehwinkel wird dabei von der positiven y-Achse aus gezählt):

$$\alpha_y(x) = \arctan\left(\frac{-(a_3 + a_4 x)}{b_3 + b_4 x}\right) \quad (2-26c)$$

Für den Koordinatenursprung ($x = 0, y = 0$) gehen die Formeln (2-25c,d) und (2-26b,c) exakt in die entsprechenden Formeln der 6-Parameter-Transformation nach (2-19f) über.

Bestimmung eines mittleren repräsentativen Maßstabsfaktors und Drehwinkels:

Dazu bezieht man die Berechnungen zweckmäßiger Weise auf den **Schwerpunkt des Punktfeldes**, indem in den Formeln (2-25) und (2-26) für die Variablen x und y die *Koordinaten des Schwerpunktes* (x_s, y_s) eingesetzt werden:

$$x_s = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad y_s = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad (2-27a)$$

Durch anschließende Mittelung

$$\bar{m} = \frac{\bar{m}_x(y_s) + \bar{m}_y(x_s)}{2} \quad \alpha = \frac{\alpha_x(y_s) + \alpha_y(x_s)}{2} \quad (2-27b)$$

erhält man eine *einigermaßen* repräsentative Aussage über die mittlere Verdrehung und den mittleren Maßstabsfaktor des transformierten Punktfeldes.

Genauigkeitsschätzung:

Mittlerer Betrag der Restklaffungen in Richtung der Koordinatenachsen:

$$s_0 = \sqrt{\frac{\mathbf{u}^T \mathbf{u} + \mathbf{w}^T \mathbf{w}}{2n_p - 8}} \quad \text{mit: } n_p = \text{Anzahl der Punkte} \quad (2-28a)$$

Mittlerer Koordinatenfehler in x-Richtung: $s_x = \sqrt{\frac{\mathbf{u}^T \mathbf{u}}{n_p - 4}}$ (2-28b)

Mittlerer Koordinatenfehler in y-Richtung: $s_y = \sqrt{\frac{\mathbf{w}^T \mathbf{w}}{n_p - 4}}$ (2-28c)

Mittlerer Punktfehler: $s_p = s_0 \sqrt{2} = \sqrt{s_x^2 + s_y^2}$ (2-28d)

Standardabweichung der Transformationsparameter (mit $\mathbf{Q} = (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1}$):

$$s_{a_i} = s_{b_i} = s_0 \sqrt{q_{ii}} \quad ; \quad i = 1 \dots 4 \quad (2-28e)$$

Standardabweichung der Translationsparameter:

$$s_{a_1} = s_{b_1} = s_0 \sqrt{q_{11}} \quad (2-29a)$$

Standardabweichung der Drehwinkel und der Maßstabsfaktoren als Ortsfunktion

(zwecks besserer Lesbarkeit wird im folgenden auf die symbolische Angabe der Koordinaten (x, y) bei den Funktionsformeln und Vektoren verzichtet):

$$\begin{aligned} s_{\alpha_x} &= s_0 \sqrt{Q_{\alpha_x}} & s_{\alpha_y} &= s_0 \sqrt{Q_{\alpha_y}} \\ s_{\bar{m}_x} &= s_0 \sqrt{Q_{\bar{m}_x}} & s_{\bar{m}_y} &= s_0 \sqrt{Q_{\bar{m}_y}} \end{aligned} \quad (2-29b)$$

mit den Gewichtsreziproken

$$\begin{aligned} Q_{\alpha_x} &= \mathbf{f}_a^T \mathbf{Q} \mathbf{f}_a + \mathbf{f}_b^T \mathbf{Q} \mathbf{f}_b & Q_{\alpha_y} &= \mathbf{f}_c^T \mathbf{Q} \mathbf{f}_c + \mathbf{f}_d^T \mathbf{Q} \mathbf{f}_d \\ Q_{\bar{m}_x} &= \mathbf{g}_a^T \mathbf{Q} \mathbf{g}_a + \mathbf{g}_b^T \mathbf{Q} \mathbf{g}_b & Q_{\bar{m}_y} &= \mathbf{g}_c^T \mathbf{Q} \mathbf{g}_c + \mathbf{g}_d^T \mathbf{Q} \mathbf{g}_d \end{aligned} \quad (2-29c)$$

wobei

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_a^T &= \left\{ \frac{\partial \alpha_x}{\partial a_1}, \frac{\partial \alpha_x}{\partial a_2}, \frac{\partial \alpha_x}{\partial a_3}, \frac{\partial \alpha_x}{\partial a_4} \right\} = \left\{ 0, \frac{-(b_2 + b_4 y)}{\bar{m}_x^2}, 0, \frac{-(b_2 y + b_4 y^2)}{\bar{m}_x^2} \right\} \\ \mathbf{f}_b^T &= \left\{ \frac{\partial \alpha_x}{\partial b_1}, \frac{\partial \alpha_x}{\partial b_2}, \frac{\partial \alpha_x}{\partial b_3}, \frac{\partial \alpha_x}{\partial b_4} \right\} = \left\{ 0, \frac{a_2 + a_4 y}{\bar{m}_x^2}, 0, \frac{a_2 y + a_4 y^2}{\bar{m}_x^2} \right\} \end{aligned} \quad (2-29d)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_c^T &= \left\{ \frac{\partial \alpha_y}{\partial a_1}, \frac{\partial \alpha_y}{\partial a_2}, \frac{\partial \alpha_y}{\partial a_3}, \frac{\partial \alpha_y}{\partial a_4} \right\} = \left\{ 0, 0, \frac{-(b_3 + b_4 x)}{\bar{m}_y^2}, \frac{-(b_3 x + b_4 x^2)}{\bar{m}_y^2} \right\} \\ \mathbf{f}_d^T &= \left\{ \frac{\partial \alpha_y}{\partial b_1}, \frac{\partial \alpha_y}{\partial b_2}, \frac{\partial \alpha_y}{\partial b_3}, \frac{\partial \alpha_y}{\partial b_4} \right\} = \left\{ 0, 0, \frac{a_3 + a_4 x}{\bar{m}_y^2}, \frac{a_3 x + a_4 x^2}{\bar{m}_y^2} \right\} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_a^T &= \left\{ \frac{\partial \bar{m}_x}{\partial a_1}, \frac{\partial \bar{m}_x}{\partial a_2}, \frac{\partial \bar{m}_x}{\partial a_3}, \frac{\partial \bar{m}_x}{\partial a_4} \right\} = \left\{ 0, \frac{a_2 + a_4 y}{\bar{m}_x}, 0, \frac{a_2 y + a_4 y^2}{\bar{m}_x} \right\} \\ \mathbf{g}_b^T &= \left\{ \frac{\partial \bar{m}_x}{\partial b_1}, \frac{\partial \bar{m}_x}{\partial b_2}, \frac{\partial \bar{m}_x}{\partial b_3}, \frac{\partial \bar{m}_x}{\partial b_4} \right\} = \left\{ 0, \frac{b_2 + b_4 y}{\bar{m}_x}, 0, \frac{b_2 y + b_4 y^2}{\bar{m}_x} \right\} \end{aligned} \quad (2-29e)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_c^T &= \left\{ \frac{\partial \bar{m}_y}{\partial a_1}, \frac{\partial \bar{m}_y}{\partial a_2}, \frac{\partial \bar{m}_y}{\partial a_3}, \frac{\partial \bar{m}_y}{\partial a_4} \right\} = \left\{ 0, 0, \frac{a_3 + a_4 x}{\bar{m}_y}, \frac{a_3 x + a_4 x^2}{\bar{m}_y} \right\} \\ \mathbf{g}_d^T &= \left\{ \frac{\partial \bar{m}_y}{\partial b_1}, \frac{\partial \bar{m}_y}{\partial b_2}, \frac{\partial \bar{m}_y}{\partial b_3}, \frac{\partial \bar{m}_y}{\partial b_4} \right\} = \left\{ 0, 0, \frac{b_3 + b_4 x}{\bar{m}_y}, \frac{b_3 x + b_4 x^2}{\bar{m}_y} \right\} \end{aligned}$$

Werden die Berechnungen der Drehwinkel und der Maßstabsfaktoren auf den Schwerpunkt bezogen, setzt man für die Variablen (x, y) in (2-29d,e) die Schwerpunkts-Koordinaten nach (2-27a) ein.

Hinweise zur Genauigkeitsschätzung: Im Vergleich zur Helmert- und Affintransformation liefert die (ausgleichende) bilineare Transformation den **kleinsten mittleren Betrag der Restklaffungen in Richtung der Koordinatenachsen** (s_0), da sie gegenüber diesen Transformationsarten (siehe auch Anmerkungen zu Beginn des Kapitels 2.2.4) wegen der *fehlenden* bzw. *restriktiven* Eigenschaften den *größeren geometrischen* (Transformations-) Freiheitsgrad hat. Das sollte aber *nicht* dazu verleiten, bei Altkartenuntersuchungen die bilineare Transformation *generell* als *bestmögliche Abbildung* zur Anpassung des Punktfeldes einer Altkarte an eine moderne Karte zu interpretieren, da hier andere Kriterien eine wichtigere Rolle spielen (siehe dazu Kap. 4: *Bestimmung adäquater Netzentwürfe für Altkarten*).

(b) Die inverse bilineare Transformation

Zur Abbildung von Punkten eines Ausgangssystems in ein Zielsystem ist bei manchen Aufgabenstellungen *keine* Ausgleichung erforderlich. Eine Genauigkeitsschätzung entfällt in diesem Fall. Es werden dann nur so viele Paßpunkte (n_p) verwendet, wie sie zur *eindeutigen Lösung* des Gleichungssystems gerade notwendig sind. Im Fall der bilinearen Transformation werden dazu aus den gesamten zur Verfügung stehenden Punkten *vier homologe* Paßpunkte *ausgewählt* ($n_p = 4$), die sowohl im Ausgangs- als auch im Zielsystem eindeutig und unabhängig definiert sind ($x_i, y_i, X_i, Y_i; i = 1..4$). Die Anzahl der Beobachtungen ($n = 2 \cdot n_p$) ist damit gleich der Anzahl der Unbekannten ($u = n = 8$), und für die Transformationsparameter ergeben sich in Verbindung mit (2-13b) die Lösungsvektoren:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{B}^{-1}\mathbf{x} \\ \mathbf{b} &= \mathbf{B}^{-1}\mathbf{y} \end{aligned} \quad (2-30a)$$

Der bilineare Transformationsansatz nach (2-23a) kann auch als *Abbildungsvorschrift* verstanden werden, die in *allgemeiner Form* durch die *symbolischen* Funktionsgleichungen mit zwei Variablen

$$\begin{aligned} X &= f(x, y) \\ Y &= g(x, y) \end{aligned}$$

ausgedrückt werden kann.

Für Altkartenuntersuchungen ist die *Umkehrung* dieses Ansatzes, die sog. *inverse bilineare Transformation*, von besonderem Interesse und kann symbolisch in folgender Form angegeben werden:

$$\begin{aligned} x &= f^{-1}(X, Y) = F(X, Y) \\ y &= g^{-1}(X, Y) = G(X, Y) \end{aligned} \quad (2-30b)$$

Zur Bestimmung von (2-30b) löst man (2-23a) nach den Variablen x, y auf. Es ergeben sich dann *zwei quadratische Gleichungen* in der Normalform:

$$\begin{aligned} Ax^2 + Bx + C &= 0 \\ Dy^2 + Ey + F &= 0 \end{aligned} \quad (2-30c)$$

Die Koeffizienten (A, B, C, D, E, F) sind dabei Funktionen der Komponenten der Lösungsvektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} , die entweder nach (2-30a) oder *im Ausgleichungsfall* nach (2-24c) berechnet werden, *sowie* der Variablen X, Y :

$$\begin{aligned} A &= b_2a_4 - a_2b_4 \\ B &= b_2a_3 - a_2b_3 + b_1a_4 - a_1b_4 + b_4X - a_4Y \\ C &= b_1a_3 - a_1b_3 + b_3X - a_3Y \\ D &= b_3a_4 - a_3b_4 \\ E &= b_3a_2 - a_3b_2 + b_1a_4 - a_1b_4 + b_4X - a_4Y \\ F &= b_1a_2 - a_1b_2 + b_2X - a_2Y \end{aligned} \quad (2-30d)$$

Die *Lösungen der quadratischen Gleichungen* von (2-30c) lauten damit

$$x_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4C}}{2A} \quad y_{1,2} = \frac{-E \pm \sqrt{E^2 - 4F}}{2D} \quad (2-30e)$$

und stellen gleichzeitig die *Abbildungsvorschrift* der *inversen bilinearen Transformation* nach (2-30b) für beliebige Punkte (X_i, Y_i) dar. Sie ist in der Form (2-30e) allerdings *nicht eindeutig*, da bei *quadratischen* Gleichungen immer *zwei* Lösungen existieren. Die Lösungspaare in x -Richtung (x_1, x_2) und in y -Richtung (y_1, y_2) erfüllen zwar alle die entsprechenden Gleichungen 2. Grades nach (2-30c), aber von den *vier möglichen x - y -Kombinationen* (x_1, y_1) oder x_1, y_2 oder x_2, y_1 oder x_2, y_2) kommt für die gesuchten Punktkoordinaten (x, y) nur *eine* in Frage, so daß geprüft werden muß, welche die richtige ist. Das kann hier auf einfache Weise durch einen *Plausibilitätstest auf Gebietsabgrenzung* verifiziert werden. Danach lassen sich die gesuchten Punktkoordinaten folgendermaßen *eindeutig* bestimmen (das Zeichen \wedge bedeutet logisch **und**):

$$x, y = \begin{cases} x_1, y_1 & \text{wenn: } (x_{\min} \leq x_1 \leq x_{\max}) \wedge (y_{\min} \leq y_1 \leq y_{\max}) \\ x_1, y_2 & \text{wenn: } (x_{\min} \leq x_1 \leq x_{\max}) \wedge (y_{\min} \leq y_2 \leq y_{\max}) \\ x_2, y_1 & \text{wenn: } (x_{\min} \leq x_2 \leq x_{\max}) \wedge (y_{\min} \leq y_1 \leq y_{\max}) \\ x_2, y_2 & \text{wenn: } (x_{\min} \leq x_2 \leq x_{\max}) \wedge (y_{\min} \leq y_2 \leq y_{\max}) \end{cases} \quad (2-30f)$$

wobei

$$\begin{aligned} x_{\min} &= \min(x_1 \dots x_n) & x_{\max} &= \max(x_1 \dots x_n) \\ y_{\min} &= \min(y_1 \dots y_n) & y_{\max} &= \max(y_1 \dots y_n) \end{aligned}$$

2.2.5 Projektive Transformation

Die Grundgleichungen der projektiven Transformation lassen sich folgendermaßen definieren [WOLF, 1975]:

$$\begin{aligned} X_i &= \frac{a_1 x_i + a_2 y_i + a_3}{a_7 x_i + a_8 y_i + 1} \\ Y_i &= \frac{a_4 x_i + a_5 y_i + a_6}{a_7 x_i + a_8 y_i + 1} \end{aligned} \quad (2-31a)$$

Dies entspricht einer *Zentralprojektion* (auch: *perspektivische Abbildung*) zweier beliebig zueinander stehender Ebenen aufeinander. Die projektive Transformation ist wie bei der Helmert- und Affintransformation *geradentreu*, d.h. beliebige Geraden des Ausgangssystems werden auch immer als Geraden im Zielsystem abgebildet (siehe Abb. 2.2).

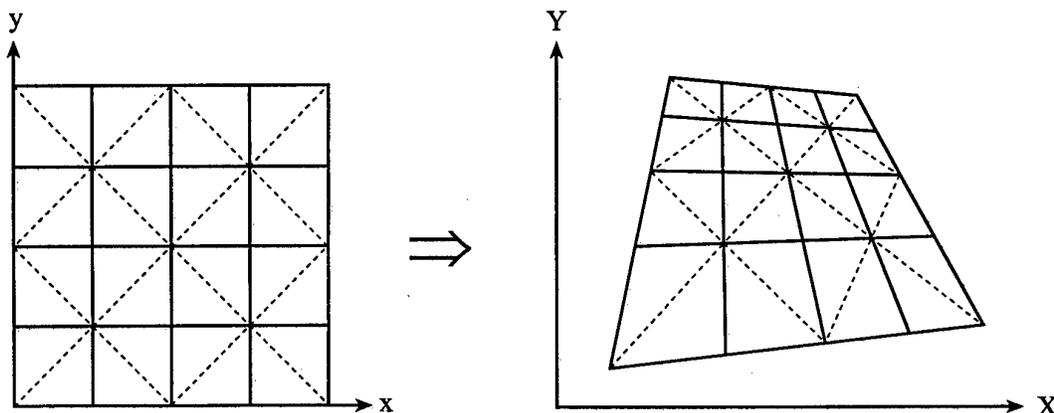


Abb. 2.2: Abbildung eines orthogonalen Liniensystems mit projektiver Transformation

Sie ist aber *nicht teilungsverhältnistreu*, d.h. ein gleichabständiges und orthogonales Liniennetz wird wegen der perspektivischen Abbildungseigenschaft *nicht* wie bei der bilinearen Transformation in Richtung der Ordinaten und Abzissen *gleichabständig* übertragen, sondern in Richtung der Fluchtpunkte immer enger abgebildet (vergleiche dazu Abb. 2.1 mit Abb. 2.2).

In der Photogrammetrie stellt (2-31a) die Grundgleichungen zur *Entzerrung* von Luftbildern für *ebenes* Gelände dar. Für Altkartenuntersuchungen kann diese Koordinatentransformation analog für folgende *Aufgabenstellungen* verwendet werden:

- *Entzerrung digitaler Bilder* von Altkarten (Rasterdaten), die z.B. mit einer modernen CCD-Digitalkamera erfaßt wurden und im photogrammetrischen Sinne als *Schrägbildaufnahmen* vorliegen, da die Altkarten mangels entsprechender reproduktionstechnischer Einrichtung in den Archiven *frei aus der Hand* fotografiert werden mußten.
- *Entzerrung eines digital erfaßten Punktfeldes* einer Altkarte (Vektordaten), dessen äußerer (ursprünglich rechteckiger) Kartenrahmen in *schiefwinkliger* Form vorliegt.

Im letzteren Fall stellt die projektive Transformation einen ausgezeichneten *Ersatz* für die *inverse bilineare Transformation* nach (2-30) dar. Allerdings nur, wenn der Kartenrahmen in Bezug auf die rechteckige Form *keine großen* Verzerrungen aufweist, damit wie oben beschrieben, der abbildungsspezifische Nachteil der projektiven Transformation nicht zu stark ins Gewicht fällt. Bei Altkartenuntersuchungen ist das in der Regel gegeben.

Der Vorteil gegenüber der *inversen* bilinearen Transformation liegt darin, daß die Transformationsparameter wesentlich einfacher aus dem Ansatz nach (2-31a) berechnet werden können und nicht so umständlich, wie nach den Formeln von (2-30). Die *inverse projektive Transformation* führt nämlich auf die gleiche Form wie (2-31a), nur das hier die Ausgangs- und Zielkoordinaten vertauscht sind und sich andere Transformationsparameter (A_i) ergeben:

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{A_1 X_i + A_2 Y_i + A_3}{A_7 X_i + A_8 Y_i + 1} \\ y_i &= \frac{A_4 X_i + A_5 Y_i + A_6}{A_7 X_i + A_8 Y_i + 1} \end{aligned} \quad (2-31b)$$

Bei der projektiven Transformation ist es daher unerheblich, ob der Ansatz nach (2-31a) oder die Umkehrung nach (2-31b) verwendet wird. Egal in welcher Richtung (Ausgangssystem \Rightarrow Zielsystem oder umgekehrt), es kann immer der Transformationsansatz nach (2-31a) angewendet werden, auf den sich auch die nachfolgenden Formeln beziehen.

Wegen den o.a. Aufgabenstellungen ist es bei Altkartenuntersuchungen nicht notwendig, die projektive Transformation als *Ausgleichungsfall* zu behandeln. Zur Bestimmung der *acht* unbekannt Transformationsparameter (\mathbf{a}) werden *vier* homologe Paßpunkte im Ausgangs- und Zielsystem benötigt. Durch Umstellung von (2-31a) erhält man das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} X_i &= a_1 x_i + a_2 y_i + a_3 & - a_7 x_i X_i - a_8 y_i X_i \\ Y_i &= a_4 x_i + a_5 y_i + a_6 & - a_7 x_i Y_i - a_8 y_i Y_i \end{aligned} \quad (2-31c)$$

das in Matrizenschreibweise mit der *quadratischen* Koeffizientenmatrix (\mathbf{Z}) wie folgt definiert werden kann

$$\mathbf{l} = \mathbf{Z} \mathbf{a} \quad (2-31d)$$

mit

$$\mathbf{l} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{Z} = \begin{Bmatrix} x_1 & y_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_1 X_1 & -y_1 X_1 \\ x_2 & y_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_2 X_2 & -y_2 X_2 \\ x_3 & y_3 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_3 X_3 & -y_3 X_3 \\ x_4 & y_4 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_4 X_4 & -y_4 X_4 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & y_1 & 1 & -x_1 Y_1 & -y_1 Y_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_2 & y_2 & 1 & -x_2 Y_2 & -y_2 Y_2 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 & y_3 & 1 & -x_3 Y_3 & -y_3 Y_3 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 & y_4 & 1 & -x_4 Y_4 & -y_4 Y_4 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{Bmatrix}$$

Der Lösungsvektor mit den gesuchten Transformationsparameter lautet danach:

$$\mathbf{a} = \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{l} \quad (2-31e)$$

Zur *praktischen Berechnung der Unbekannten* ist es allerdings nicht unbedingt nötig eine Invertierung der \mathbf{Z} -Matrix vornehmen, da es hier nur auf die Bestimmung der Unbekannten ankommt, die sich wesentlich einfacher mit dem *Gaußschen Algorithmus* berechnen lassen. Mit den so gefundenen Transformationsparameter (\mathbf{a}) können nun beliebige Punkte (x_i, y_i) nach den Formeln (2-31a) in das Zielsystem (X_i, Y_i) übertragen werden.

2.3 Multiquadratische Interpolation

Die multiquadratische Interpolation ist für ein- und mehrdimensionale Interpolationszwecke von *unregelmäßig* verteilten Stützpunkten vielseitig einsetzbar. Unter anderem für die *Interpolation von Höhenkoten* auf einem regulären Gitter zur Ableitung von Höhenlinien [GÖPFERT, 1977] oder der *digital geometrischen Entzerrung* (Geokodierung) von lokal variierenden Störungen der Bildgeometrie in digitalen Bilddaten [EHLERS, 1987]. Entwickelt wurde diese Methode von HARDY [1971, 1972].

Speziell für Altkartenuntersuchungen stellt die multiquadratische Interpolation ein optimales Verfahren zur *Generierung von Verzerrungsnetzen* dar (siehe dazu Kap. 8: *Visualisierung von Genauigkeitsanalysen und Anwendungsbeispiele*). Für diese Aufgabenstellung lassen sich folgende Gleichungssysteme mit derselben Anzahl von Unbekannten wie Gleichungen ($n = u$) aufstellen

$$\mathbf{u} = \mathbf{D}\mathbf{a}, \quad \mathbf{w} = \mathbf{D}\mathbf{b} \quad (2-32a)$$

oder ausführlich:

$$\begin{cases} u_1 = d_{11}a_1 + d_{12}a_2 + d_{13}a_3 + \dots + d_{1n}a_n \\ u_2 = d_{21}a_1 + d_{22}a_2 + d_{23}a_3 + \dots + d_{2n}a_n \\ \dots \\ u_n = d_{n1}a_1 + d_{n2}a_2 + d_{n3}a_3 + \dots + d_{nn}a_n \end{cases} \quad (2-32b)$$

$$\begin{cases} w_1 = d_{11}b_1 + d_{12}b_2 + d_{13}b_3 + \dots + d_{1n}b_n \\ w_2 = d_{21}b_1 + d_{22}b_2 + d_{23}b_3 + \dots + d_{2n}b_n \\ \dots \\ w_n = d_{n1}b_1 + d_{n2}b_2 + d_{n3}b_3 + \dots + d_{nn}b_n \end{cases} \quad (2-32c)$$

Darin bedeuten:

$$u_i = X_i - X_i' \quad (\text{Restklaffungen der Paßpunkte in } x \text{- Richtung ; } i=1 \dots n)$$

$$w_i = Y_i - Y_i' \quad (\text{Restklaffungen der Paßpunkte in } y \text{- Richtung ; } i=1 \dots n)$$

wobei (X_i, Y_i) die Paßpunkte im Zielsystem (Altkarte) sind und (X_i', Y_i') die z.B. aus einer *zuvor* berechneten ausgleichenden Ähnlichkeits-Transformation ins Zielsystem übertragenen (homologen) Paßpunkte des Ausgangssystems (moderne Karte) darstellen. Die Restklaffungen (u_i, w_i) entsprechen hier somit *negativen Verbesserungen* (\equiv Fehlervektoren) und können aus den Formeln (2-14e) auf einfache Weise (Multiplikation mit -1) abgeleitet werden

a_i = unbekannte Interpolationsparameter in x - Richtung

b_i = unbekannte Interpolationsparameter in y - Richtung

d_{ij} = Elemente der *quadratischen* Koeffizientenmatrix (auch: Kernfunktionsmatrix) **D**.

Diese stellen die *Distanzen* zwischen *allen möglichen* Paßpunkten im Zielsystem dar und werden wie folgt berechnet:

$$d_{ij} = +\sqrt{(X_i - X_j)^2 + (Y_i - Y_j)^2}$$

Die Koeffizientenmatrix **D** ist wegen $d_{ij} = d_{ji}$ symmetrisch und entlang der Hauptdiagonalen treten nur Nullen auf ($d_{ij} = 0$ für $i=j$). Die Berechnung der Interpolationsparameter (**a**, **b**) kann in Matrixschreibweise allgemein mit

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{D}^{-1}\mathbf{u} \\ \mathbf{b} &= \mathbf{D}^{-1}\mathbf{w} \end{aligned} \quad (2-32d)$$

beschrieben werden. Eine Invertierung der $n \times n$ großen Matrix **D** ist hier aber nur bei relativ wenigen Paßpunkten sinnvoll, denn bei Altkartenuntersuchungen kann die Anzahl der Paßpunkte ungefähr zw. 100 und 900 betragen, was selbst auf schnellen Workstations zu spürbar langen Rechenzeiten führen würde. Da es nur auf die Bestimmung der Unbekannten ankommt, kann für die Auflösung der linearen Gleichungssysteme nach (2-32) z.B. das Eliminationsverfahren von Gauß (*Gaußscher Algorithmus*) mit *Zeilen- und Spaltenpivotisierung* angewendet werden.

Mit den gefundenen Lösungsvektoren (**a**, **b**) können nun für *einen beliebigen Punkt* des Ausgangssystems (x, y) , der z.B. mit Hilfe einer Ähnlichkeits-Transformation in das Zielsystem übertragen wurde ($\rightarrow X', Y'$), der *interpolierte Restklaffungsvektor* in diesem Punkt mit den Komponenten (u, w) bestimmt werden:

$$\begin{aligned} u &= \mathbf{a}^T \mathbf{s} \\ w &= \mathbf{b}^T \mathbf{s} \end{aligned} \quad (2-33a)$$

Die Komponenten des Vektors $\mathbf{s}^T = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ werden dabei - ausgehend von dem (transformierten) Punkt (X', Y') - aus den *Strecken zu allen Paßpunkten* des Zielsystems berechnet:

$$s_k = +\sqrt{(X' - X_k)^2 + (Y' - Y_k)^2} \quad ; \quad k = 1 \dots n \quad (2-33b)$$

Die Formeln (2-33) lassen bei genauer Betrachtung die besonderen Eigenschaften der multi-quadratischen Interpolation deutlich werden. Fällt ein (vortransformierter) Punkt (X', Y') *genau* auf einen Paßpunkt im Zielsystem, wird die Strecke s_k nach (2-33b) zu Null. In diesem Fall entspricht (2-33a) den k -ten Zeilen von (2-32) und die Restklaffungen gehen in (u_k, w_k) über, also *exakt* in die Restklaffungen des Paßpunktes P_k . Für *beliebige* (vortransformierte) Punkte, die in der Regel *zwischen* den Paßpunkten liegen, also z.B. die Schnittpunkte eines über das gesamte Punktfeld des Ausgangssystems gelegten regulären Liniennetzes, werden *interpolierte Restklaffungen* erhalten. Dabei geht die *gesamte* Paßpunktinformation (mit abstandsmäßiger Gewichtung) in den Interpolationsprozeß ein.

Kapitel 3

Datenerfassung und Plausibilitätsprüfung

Voraussetzung für die rechnerischen Verfahren der Genauigkeitsanalyse für Altkarten sind Koordinaten, die durch Messungen, Berechnungen oder aus Koordinatenlisten abgeleitet werden und in Form von Datenfiles (Dateien) zur Verfügung stehen müssen. Da die Erstellung dieser Koordinatendateien größtenteils *manuell* erfolgt, besteht der aufwendigste Teil der gesamten Genauigkeitsuntersuchung in der Datenerfassung. Da hierbei erfahrungsgemäß immer Bearbeitungsfehler auftreten, empfiehlt es sich grundsätzlich den Rohdaten nach Abschluß der Erfassung einigen Plausibilitätsprüfungen zu unterziehen, bevor sie für die anschließenden rechnerischen Genauigkeitsanalysen herangezogen werden. Die Verfahren zur Datenerfassung und Plausibilitätsprüfung sollen hier vorgestellt werden.

3.1 Ablaufverfahren zur Rohdatenerfassung

Im folgenden soll ein Ablaufverfahren zur Erfassung sämtlicher relevanten Daten beschrieben werden, das auf den praktischen Erfahrungen bei allen im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Altkartenuntersuchungen beruht und sich allgemein bewährt hat.

1. Bereitstellung von Kartenmaterial

Dazu zählt *modernes* Kartenmaterial, wie z.B. (amtliche topographische) Übersichtskarten oder Atlaskarten, die den gesamten Altkarten-Ausschnitt abdecken, wobei in der Regel mehrere Karten notwendig sind. Der Maßstab dieser Karten sollte dabei möglichst dem Maßstab der zu untersuchenden Altkarte entsprechen, der aufgrund einfacher Voruntersuchungen (siehe dazu Kap. 5) oder anderweitig (Veröffentlichungen) ungefähr bekannt ist.

2. Gebietsaufteilung

Um bei Genauigkeitsanalysen bestimmte Punkte (Ortschaften) zu Überprüfungszwecken leichter aufzufinden, ist es zweckmäßig, auf einer schützenden *Deckfolie*, die über die Altkarte gelegt und befestigt wird, ein reguläres **Suchgitter** mit einer Koordinierung (z.B. alphanumerisch: A1, A2, A3, ... , B1, B2, ...) einzutragen. Dabei sollte eine angemessene *Maschenweite* gewählt werden (ungefähr 10-20 Punkte pro Gittermasche). Des weiteren empfiehlt sich, auch die moderne Karte mit einer schützenden Folie abzudecken, auf der allerdings nur die Markierung der ausgewählten Punkte und deren Punktnummer einzutragen werden braucht (siehe folgenden Abschnitt).

3. Punktauswahl

Dies ist der aufwendigste und damit zeitintensivste Teil der gesamten Rohdatenerfassung, da er nur *rein manuell* für alle Punkte durchgeführt werden kann. Die Auswahl identischer (homologer) Punkte erfolgt in erster Linie über einen *Vergleich der Ortsnamen* in der Altkarte und der modernen Karte, wobei man zuerst einen Ort in der Altkarte festlegt und dann den entsprechenden Ort in der modernen Karte sucht. Dabei empfiehlt es sich bei der Auswahl der Punkte *innerhalb* eines Suchgitters wie auch *außerhalb* (maschenweise) systematisch vorzugehen, d.h. von links nach rechts und von oben nach unten.

Die Identifizierung homologer Punkte in der modernen Karte anhand des Altkartennamens kann beträchtliche Probleme hervorrufen. Häufig sind die Ortsnamen in Altkarten schwer lesbar, was einerseits an schlechten Reproduktionsvorlagen, andererseits am ungewohnten Schriftbild (z.B. Fraktur) liegen kann. Als sehr schwierig erweist sich die Punktidentifizierung, wenn die Altkartennamen in lateinischer Sprache vorliegen. Des weiteren unterliegen Städtenamen im Laufe der Geschichte mehr oder weniger große Veränderungen, so daß es bei der Identifizierung des modernen Ortsnamens leicht zu Fehlinterpretationen kommen kann.

Diese Schwierigkeiten können größtenteils gelöst werden, wenn man die *geographische Lage* eines zu bestimmenden Punktes relativ zu den benachbarten Ortspositionen mit berücksichtigt sowie u.U. geographisch historische Literatur einbezieht.

Außerdem sollte bei der Punktauswahl darauf geachtet werden, daß - wenn möglich - eine einigermaßen *homogene Punktdichte* erzielt wird. Zu vermeiden sind auf jeden Fall, im Vergleich zu den übrigen Punktabständen, *eng beieinander liegende Punkte*. Diese erzeugen nämlich z.B. u.a. bei graphischen Darstellungen von Verzerrungs-Netzlinien (siehe Kap. 8) ein stark schwankendes Linienbild um einen oder mehrerer dieser (redundanten) Punkte herum, daß nicht wünschenswert ist. Außerdem wirken sich die kurzen Strecken zwischen benachbarten Punkten sehr ungünstig auf die Maßstabsbestimmung aus (siehe Kap. 5). Grundsätzlich gilt bei der Punktauswahl die Regel, *nicht so sehr ins Detail zu gehen*. Liegen in der Altkarte also z.B. in einem Teilgebiet einige Ortschaften relativ eng beieinander, so wählt man nur *einen* dieser Orte aus, der repräsentativ für die anderen steht, so daß die Forderung nach homogener Punktdichte besser erfüllt werden kann.

Sind die homologen Punktpaare unter Berücksichtigung der oben angegebenen Auswahlkriterien bestimmt, werden sie auf den Deckfolien der Altkarte und modernen Karte markiert und mit einer *Punktnummer* versehen. Diese wird anschließend in ein **Erfassungsformular** übertragen, wobei zusätzlich die *Suchgitter-Koordinaten* sowie die *Ortsnamen* nach der Altkarte und nach der modernen Karte eintragen werden. Ferner sollte in dem Erfassungsformular noch Platz für den evtl. Eintrag der geographischer Koordinaten nach einer modernen Karte gelassen werden, falls diese mit manuellen Methoden ermittelt wurden (siehe folgenden Abschnitt).

4. Koordinatenerfassung

Die Methoden zur Erfassung der für die rechnerischen Genauigkeitsanalysen benötigten Ortspositionen (Koordinaten) sind unterschiedlich. Der Grund liegt darin, daß einerseits für die Altkartenpunkte *kartesische Koordinaten* und andererseits für die homologen Punkte in der modernen Karte *geographische Koordinaten* bestimmt werden müssen, aus denen mit Hilfe *adäquater Netzentwürfe für Altkarten* vergleichbare kartesische Koordinaten abgeleitet werden (siehe dazu Kap. 4 und Kap. 5).

Die **Punktkoordinaten in der Altkarte** werden generell durch *punktweise Digitalisierung* der ausgewählten Orte gewonnen und stehen nach Abschluß der Erfassung in einem Datenfile als kartesische Koordinaten (x, y) zur Verfügung. Damit in den Datenfiles die Punktnummern der erfaßten Koordinaten nicht nachträglich noch zeitraubend durch manuelles editieren eingetragen werden müssen, empfiehlt es sich eine *Digitalisier-Software* zu verwenden, die - nach Vorgabe einer beliebigen Start-Punktnummer - nach jedem digitalisierten Punkt automatisch die letzte Punktnummer um eins erhöht, so daß man während des manuellen Digitalisiervorganges von der umständlichen Punkteingabe befreit ist.

Da die Firmen von Koordinatenerfassungsgeräten (Digitizer) verständlicherweise keine Digitalisier-Software mitliefern, die auf die spezifischen Bedürfnisse des Benutzers abge-

stimmt sind, ist man gezwungen diese Software selbst zu entwickeln. Im Rahmen dieser Arbeit wurde deshalb ein einfaches BASIC-Programm geschrieben, das auf den verwendeten großformatigen (A0) und hochauflösenden (40 Linien/mm) Digitizer HR48 der engl. Firma *Terminal Display Systems Limited (TDS)* abgestimmt ist. Die Rohdatenerfassung mit Hilfe dieses Digitizers und der verwendeten Digitalisier-Software liefert z.B. folgenden Datenfile (Auszug), wobei die erläuternden Kopfzeilen für die rechnerische Weiterverarbeitung später natürlich noch entfernt werden müssen:

Digitizer-Koordinaten der Preußenkarte bearbeitet am 20.08.98 von: D. Beineke		
PKTNR.	X	Y
1001	52.175	376.625
1002	126.450	373.475
1003	571.075	366.225
1004	1017.325	372.675
1005	1165.700	378.250

Die *direkte* Erfassung der homologen **geographischen Punktkoordinaten** (λ, φ) **nach einer modernen Karte** ist mit Hilfe eines Digitizers *nicht* möglich, da dieser nur kartesische Koordinaten liefert. Die Ermittlung kann aber indirekt, d.h. *manuell* oder *rechnerisch* erfolgen.

(a) Manuelle Methoden zur Erfassung geographischer Punktkoordinaten:

1. Interpolation:

Diese Methode setzt voraus, daß die zu Vergleichszwecken herangezogene moderne Karte im Kartenrahmen geographische Koordinaten enthält, wobei auch im Kartenfeld die Schnittpunkte der *runden* geographischen Koordinaten angerissen sein sollten. Innerhalb einer geographischen Gittermasche lassen sich dann die geographischen Ortspositionen durch einfache lineare Interpolation bestimmen. Bei einer Meßgenauigkeit von ca. 0,15 mm und Kartenmaßstäben größer als 1 : 1 Mio. lassen sich die geographischen Koordinaten genauer als 5" ($\approx 150\text{m}$ in der Natur) ermitteln.

2. Ortsregister:

Bei dieser Methode werden geographische Ortskoordinaten aus Atlanten entnommen, die im Anhang ein Ortsregister enthalten (z.B. "Times Atlas" oder "Meyers Neuer Handatlas"). Die Koordinaten sind in der Regel auf Minutengenauigkeit gerundet und für Altkarten-Genauigkeitsanalysen in den meisten Fällen ausreichend. Bei dieser Vorgehensweise ist aber Vorsicht geboten, da redaktionelle Fehler bei der Erstellung dieser Koordinatenlisten nicht ausgeschlossen werden können.

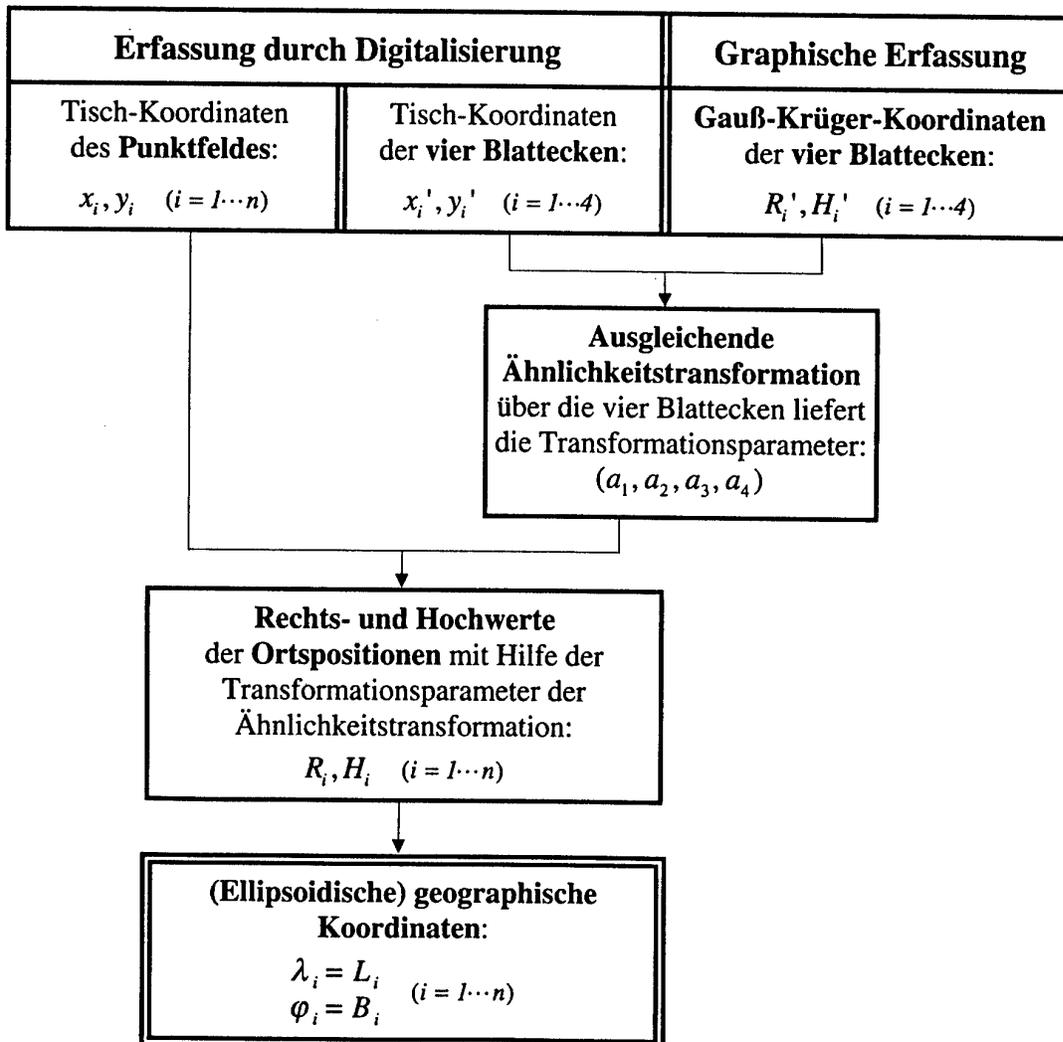
Die so ermittelten geographischen Koordinaten (λ, φ) werden zunächst in das Erfassungsformular (siehe 3. Punktauswahl) übernommen. Ist der letzte Punkt schließlich ermittelt, werden mit Hilfe eines einfachen ASCII-Texteditors (z.B. Edit, NotePad oder TextPad) alle Punktnummern mit den geographischen Ortspositionen in einen Datenfile übertragen.

Für Überprüfungs-zwecke (z.B. grob fehlerhafte Punkte) als auch in rechentechnischer Hinsicht (geringerer Programmieraufwand) hat es sich als zweckmäßig erwiesen, wenn sowohl im Datenfile der kartesischen Koordinaten als auch im Datenfile der geographischen Koordinaten die Punktreihenfolge identisch ist, d.h. gleiche Zeilen entsprechen gleiche (homologe) Punkte.

(b) Rechnerische Methode zur Bestimmung geographischer Punktkoordinaten:

Bei dieser Methode werden - wie bei der digitalen Koordinatenerfassung der Altkartenpunkte - zunächst auf der Grundlage einer modernen Karte die homologen Punkte durch Digitalisierung gewonnen. Über Referenzpunkte, deren geographische Koordinaten bekannt sind, werden dann mit Hilfe von Koordinatentransformationen die geographischen Punktkoordinaten ermittelt. Diese Methode setzt allerdings voraus, daß die *Kartenabbildung* (Kartennetzentwurf) der herangezogenen modernen Karte bekannt ist. Nur in diesem Fall lassen sich die Abbildungsgleichungen umkehren, so daß aus den kartesischen Koordinaten die gesuchten geographische Koordinaten abgeleitet werden können.

Im folgenden wird exemplarisch der Verfahrensablauf beschrieben, wie aus deutschen amtlichen topographischen Karten (z.B. die TK 100), die in Gauß-Krüger-Abbildung vorliegen, die gesuchten geographischen Koordinaten abgeleitet werden können. Die dazu notwendigen Koordinatentransformationen können dem *Kapitel 2.2* (Ähnlichkeitstransformation) und die im *Anhang* aufgeführten Formeln zur Transformation zwischen Gauß-Krüger-Koordinaten und ellipsoidischen geographischen Koordinaten entnommen werden. Das Verfahren läßt sich analog mit Gaußschen Koordinaten oder anderen Kartenabbildungen (z.B. UTM-Abbildung, Kegelabbildung) durchführen, wobei die Transformationsformeln entsprechend verändert werden müssen:



3.2 Plausibilitätsprüfungen

Nachdem die Rohdatenerfassung abgeschlossen ist, kann im Prinzip mit der rechnerischen Genauigkeitsanalyse der Altkarte begonnen werden. Grundsätzlich empfiehlt es sich aber, den Rohdaten vor den rechnerischen Genauigkeitsanalysen zunächst einigen Plausibilitätsprüfungen zu unterziehen, da sich erfahrungsgemäß wegen der überwiegend manuellen Bearbeitung zur Erfassung der Rohdaten immer irgendwelche *Eingabefehler* (Schreib-, Übertragungs- und Digitalisierungsfehler) einschleichen, die von leichten bis zu schwerwiegenden Auswertefehlern und damit falschen Ergebnissen führen können.

Die dazu notwendigen Plausibilitätsprüfungen lassen sich einteilen in einen

- **Punkt-Test**
- **Minimalstrecken-Test**

und können sowohl auf die Datenfiles der durch Digitalisierung gewonnenen kartesischen Punktkoordinaten der Altkarte als auch auf die nach einer modernen Vergleichskarte abgeleiteten geographischen Koordinaten angewendet werden.

3.2.1 Punkt-Test

Bei diesem einfachen Plausibilitätstest werden den beiden Rohdatenfiles (kartesische Koordinaten nach der Altkarte bzw. geographische Koordinaten nach der modernen Karte) folgende rechnerischen Tests unterzogen:

- Test auf *unterschiedliche* Punktzahl
- Test auf *widersprüchliche* Punktnummerierung
- Test auf *identische* Punktkoordinaten

Der Test auf *unterschiedliche Punktzahl* prüft lediglich, ob in beiden Datenfiles die gleiche Anzahl von Punkten enthalten ist. Wenn das nicht der Fall ist, dann sind entweder beim digitalisieren Punkte vergessen worden oder bei der Erstellung des geographische Rohdatenfiles durch Editierfehler zu viele Einträge entstanden. Als Folge können fehlerhafte Punktzuweisungen bei den rechnerischen Genauigkeitsanalysen auftreten

Beim Test auf *widersprüchliche Punktnummerierung* kann man unterscheiden zwischen:

- *gleiche* Punktnummern innerhalb eines Datenfiles
- *unterschiedliche* Punktnummern *identischer* Punkte im kartesischen und geographischen Datenfile

Dies sind keine Fehler mit gravierenden rechnerischen Auswirkungen, aber die Zuordnung der Punktnummer sollte eindeutig sein, damit später bei der Punktüberprüfung wegen aufgetretener Plausibilitätsfehler keine Irrtümer entstehen.

Der Test auf *identische Punktkoordinaten* ist der **wichtigste Punkt-Test**, da gleiche Punktkoordinaten innerhalb eines Datenfiles fatale Auswirkungen auf nachfolgende Programme haben können. So erzeugt nur *eine* doppelt vorkommende Ortsposition in der Koeffizientenmatrix zur Lösung eines linearen Gleichungssystems mit gleicher Anzahl von Beobachtungen und Unbekannten ($n = u$) einen Rangabfall (d.h. es sind weniger Beobachtungen als Unbekannte vorhanden), so daß das Gleichungssystem nicht mehr lösbar ist. Dieser Fall kann insbesondere bei der Anwendung der *Multiquadratischen Interpolation* (siehe Kap. 2.3) zur *Generierung von Verzerrungsnetzen* (siehe Kap. 8.3) auftreten.

Ursachen identischer Punktkoordinaten:

Identische Punktkoordinaten innerhalb des *Datenfiles mit kartesischen Koordinaten* (Altkarte) sind eindeutig Fehler, die bei der digitalen Erfassung der Ortspositionen entstanden sind, aber in der Regel sehr selten vorkommen. Ursache kann hier z.B. ein aus Versehen doppelt digitalisierter Ort sein, was bei zeitlich unterschiedlichen Digitalisiersitzungen vorkommen kann.

Bei dem *Datenfile mit geographischen Koordinaten* (moderne Karte) kann die Ursache in einer für den Maßstab der Altkarte zu groben manuellen Erfassung der geographischen Ortskoordinaten liegen. Hier ist die Forderung nach *Vermeidung eng beieinander liegender Punkte* nicht berücksichtigt worden (siehe 3. Punktauswahl). Wenn beispielsweise die Entfernung zwischen zwei erfaßten benachbarten Ortschaften kleiner als ca. 2 km beträgt (entspricht im Gradmaß ungefähr 1 Minute), dann erhält man bei der Berechnung auf Minutengenauigkeit für beide Orte exakt die gleichen geographischen Koordinaten. Dieser Fehler taucht insbesondere dann auf, wenn die geographischen Koordinaten nicht durch eine manuelle Ermittlung (Interpolation) aus modernen Karten, sondern aus Ortsregister von Atlanten ermittelt wurden, da diese Koordinaten in der Regel nur auf Minuten angegeben sind.

3.2.2 Minimalstrecken-Test

Wie weiter oben schon erwähnt, sollte bei der Auswahl der Punkte der Abstand zwischen den ausgewählten Ortspositionen einigermaßen gleichabständig sein. Da dies nicht immer eingehalten werden kann, empfiehlt sich eine Überprüfung auf kleinste Streckenverbindungen, im folgenden Minimalstrecken genannt.

Für die rechentechnische Lösung müssen optimale Streckenverbindungen zwischen benachbarten Punkten im gesamten Punktnetzverband gefunden werden. Diese Aufgabenstellung kann mit Hilfe einer bestmöglichen Dreiecksvermaschung des Punktfeldes gefunden werden, der sog. *Delaunay-Triangulation* (nähere Beschreibung siehe Kap. 8.2.1). Jede Dreiecksseite kann dann auf eine beliebig vorgegebene Minimalstrecke getestet werden. Als *kleinste* Minimalstrecke kann z.B. die Genauigkeit der erfaßten geographischen Koordinaten herangezogen werden. Diese liegt in der Regel bei ca. 1', was einem Naturmaß von 1,8 km entspricht. Bei einem Maßstab der Altkarte von ungefähr 1 : 200 000 sollten dann keine kleineren Punkt-abstände als ca. 10 mm auftreten.

3.2.3 Nachbearbeitung der Rohdaten

Nachdem die Plausibilitätsprüfung abgeschlossen ist müssen die Widersprüche beseitigt werden, wobei alle Erfassungsunterlagen herangezogen und die daraus abgeleiteten Daten in den Koordinaten-Files geprüft und *manuell* korrigiert werden. Diese Prozedur ist in der Regel sehr zeitaufwendig. Die Erfahrung hat aber gezeigt, daß es in der überwiegenden Anzahl der Fälle einfacher und schneller ist, fragwürdige Punkte - wenn sie nicht gerade von besonderer Bedeutung sind - kurzerhand zu eliminieren, denn bei mehr als 100 erfaßten Punkten (bei Altkarten normal) kommt es auf den einen oder anderen Punkt für die Genauigkeitsanalysen nicht an.

3.2.4 Exemplarisches Berechnungsbeispiel zur Plausibilitätsprüfung

Um den oben beschriebenen Punkt- und Minimalstrecken-Test rechnerisch zu realisieren, wurde im Rahmen dieser Arbeit eine speziell für Altkartenuntersuchungen abgestimmte Applikation entwickelt. Ein Berechnungsprotokoll dieses Programms - am Beispiel der originär erfaßten Rohdaten der *Tirol-Karte von BURCKLECHNER (1611)* - demonstriert die Notwendigkeit von Plausibilitätsprüfungen:

```

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
!
!      Plausibilitätsprüfungen      !
!              für                  !
!      Altkarten-Untersuchungen     !
!
!      (Punkt- und Minimalstreckentest) !
!
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
    
```

Projekt: Tirol-Karte von Burgklehner (1611)

1. Test auf Minimalstrecken und "identische Punktkoordinaten" der kartesischen Ortspositionen (Altkarte) mit Hilfe einer "Delaunay-Triangulation"

Eingabe-Dateiname: "tirol.dig "

Anzahl der eingelesenen Punkte: 306

Anzahl der Delaunay-Dreiecke: 593

Anzahl der Dreiecks-Strecken: 897

Folgende Dreiecksstrecken sind kleiner als die benutzerdefinierte Vorgabe von 12.0 mm

i	P1	<->	P2	Strecke [mm]	
1	1049		1050	11.5	
2	2029		2031	11.5	
3	2033		2026	11.2	
4	2044		2041	11.0	
5	3024		3025	11.3	
6	4003		4004	.1	<= Identische Punkte !
7	4038		4035	11.4	
8	4063		4064	8.8	

-
2. Test auf "identische Punktkoordinaten" der geographischen Ortspositionen(moderne Karte)

Eingabe-Dateiname: "tirol.geo"

Anzahl der eingelesenen Punkte: 307 <= Unterschiedliche Punktanzahl !!!!

Folgende Punkte mit identischen Koordinaten wurden festgestellt:

i	P1	=	P2
1	2021		2022
2	3014		3015

Ende der Berechnungen!

=====

Kapitel 4

Bestimmung adäquater Netzentwürfe für Altkarten

Bei allen Berechnungsverfahren zur Maßstabsfindung und zur Genauigkeit von Altkarten sowie deren Visualisierung, ist die Kenntnis des Netzentwurfes der Altkarte (im folgenden auch kurz als *Altkartenabbildung* bezeichnet) von *wesentlicher* Bedeutung, da sich nur dann ein optimaler Vergleich der vorliegenden Altkarte mit einer modernen Karte erzielen läßt (nähere Erläuterungen dazu siehe Kap. 5). Da dieser Aspekt in der einschlägigen Literatur bislang vernachlässigt wurde, soll hier detailliert darauf eingegangen werden. Unter **adäquaten Netzentwürfen** sollen im folgenden Kartenabbildungen verstanden werden, die eine bestmögliche Anpassung an eine vorliegende Altkarte gewährleisten.

Der Begriff *Altkartenabbildung* ist hier aus moderner Sicht zu verstehen. Die Kartenmacher der damaligen Zeit haben keineswegs die Kartierung der Ortspositionen und des sonstigen Inhalts mit Hilfe von Abbildungsgleichungen nach geographischen Koordinaten vorgenommen. Die Kartierung erfolgte vermutlich rein manuell-geometrisch mit Maßstabslineal und Zirkel. Für rechnerische Genauigkeitsuntersuchungen von Altkarten ist es aber *zwingend* erforderlich, analytische Abbildungsgleichungen zu finden, die weitgehend dem inneren und äußerem Erscheinungsbild (Kartenfeld, Kartenrahmen) dieser alten Karten entsprechen und hier als *Altkartenabbildungen* zu verstehen sind.

Moderne Karten mit adäquater Altkartenabbildung (z.B. die häufig vorkommende "Plattkarte") gibt es aber nicht, so daß eine Genauigkeitsanalyse über meßtechnische Vergleichswerte zwischen der Altkarte und der modernen Karte wegen der unterschiedlichen Kartenabbildungen und Verzerrungseigenschaften zwangsläufig zu starken Fehlinterpretationen bezüglich Maßstab, Punktfehler etc. führen würde. Rechentechnisch wird dieser Vergleich daher generell über *kartesische* Paßpunktkoordinaten der Altkarte und identischen (homologen) Paßpunkten nach einer modernen Karte *unter Berücksichtigung der Altkartenabbildung* realisiert, um einen optimalen Vergleich der beiden Punktfelder in einem *einheitlichen* Koordinatensystem zu ermöglichen.

Die Kartennetzlehre beschreibt eine Vielzahl verschiedenster Kartenabbildungen mit unterschiedlichen Erscheinungsbildern der geographischen Netzlinien (Netzbild) und spezifischen Verzerrungseigenschaften. Für die hier zu untersuchenden Regionalkarten im mitteleuropäischen Bereich kommen aber bezüglich Maßstab und der geographischen Gebietsausdehnungen dieser Altkarten nur wenige Abbildungen in Frage. Im Rahmen dieser Arbeit wird daher nur auf zwei sehr häufig vorkommende Typen von Altkartenabbildungen, nämlich die *Plattkarte* und die *Trapezabbildung*, näher eingegangen. Andere Altkartenabbildungen (z.B. die Kegelabbildung) für Regionalkarten lassen sich mit den hier vorgestellten Methoden i.d.R. ausreichend approximieren, kommen aber selten vor.

Alle folgenden Abbildungsgleichungen für die einzelnen Netzentwürfe werden der Einfachheit halber für die *Einheitskugel* (*Erdradius*: $R = 1$) und den *Abbildungsmaßstab* 1:1 definiert und werden symbolisch wie folgt ausgedrückt:

$$x = f(\lambda, \varphi)$$

$$y = g(\lambda, \varphi)$$

Für die *praktische Anwendung* sind diese Abbildungsgleichungen noch mit einem Maßstabsfaktor (\bar{m}) zu multiplizieren, so daß die für die Kartierung notwendigen *Auftragskoordinaten* wie nachstehend berechnet werden:

$$\begin{aligned}x &= f(\lambda, \varphi) \cdot \bar{m} \\y &= g(\lambda, \varphi) \cdot \bar{m}\end{aligned}$$

mit

(4-1)

$$\bar{m} = \frac{R}{m} \quad (\text{Maßstabsfaktor})$$

R = Erdradius (z. B. 6370 km)

m = Maßstabszahl der Karte (nach der Maßstabsangabe: $M = 1 : m$)

Die geographischen Koordinaten (λ, φ) von beliebigen *Oberflächenpunkten* werden in den nachfolgenden Betrachtungen immer in der auf den geogr. Nullpunkt reduzierten Form

$$\begin{aligned}\Delta\lambda_i &= \lambda_i - \lambda_0 \\ \Delta\varphi_i &= \varphi_i - \varphi_0\end{aligned}$$

angegeben, wobei λ_0 und φ_0 die geographische Länge und Breite des Koordinatenursprungs darstellen. Im Prinzip sind diese frei wählbar, in der Praxis werden sie aber zweckmäßig in die Mitte des darzustellenden Gebietes gelegt, damit die kartesischen Koordinaten von der Mitte des Kartenblattes aufgetragen werden können. Darüber hinaus sind alle Winkelangaben in den Abbildungsgleichungen im *Bogenmaß* ($\alpha := \text{arc}(\alpha)$) zu verstehen.

4.1 Die Plattkarte als adäquate Kartenabbildung

Diese *einfachste* aller Kartenabbildungen war schon im Altertum bekannt und soll um 100 n. Chr. von *Marinus von Tyros* angegeben worden sein, wurde aber wahrscheinlich nicht vor 1500 angewendet [VITAL, 1903]. In der modernen Kartennetzlehre ist sie unter dem Namen *Mittabstandstreue Zylinderabbildung* definiert. Interessant in diesem Zusammenhang ist, daß schon *Ptolemäus*, der etwa zur gleichen Zeit wie *Marinus* lebte, sich kritisch mit dieser Kartenabbildung auseinandergesetzt hat und richtig erkannte, daß man diese Abbildung wegen der Verzerrungen nur bei kleinen Ausschnitten der Erdoberfläche anwenden sollte [BABICZ, 1986; BONACKER, 1932]. Bei der Plattkarte kann man *zwei Abbildungsarten* unterscheiden, die beide die Eigenschaft haben, daß die Bogenlängen der Meridiane längentreu auf einer fiktiven erdachsigen (parallel zur Erdachse) stehenden Zylinderfläche abgebildet werden.

4.1.1 Abbildung mit längentreuem Äquator

$$\begin{aligned}x_i &= \Delta\lambda_i \\ y_i &= \Delta\varphi_i\end{aligned} \quad (4-2)$$

Bei dieser Abbildung geht man anschaulich von einer Berührung der Zylinderfläche mit dem Äquator aus. Wegen der quadratischen Netzmaschen (bei gleicher Maschenweite) wird diese Abbildung auch **quadratische Plattkarte** genannt. Der Nachteil dieser Abbildung ist, daß die Streckenverzerrung in West-Ost-Richtung mit der geographischen

Breite um den Faktor $1/\cos(\varphi)$ zunimmt und im Pol schließlich gegen unendlich geht. Der Pol wird bei dieser Abbildung in der Länge des Äquators abgebildet.

4.1.2 Abbildung mit zwei längentreuen Parallelkreisen

Bei dieser Abbildung schneidet die erdachsige Zylinderfläche die Erdkugel bei $\pm\varphi_0$, wobei für Altkarten nur der nördliche längentreue Parallelkreis ($+\varphi_0$) relevant ist:

$$\begin{aligned} x_i &= \Delta\lambda_i \cdot \cos(\varphi_0) \\ y_i &= \Delta\varphi_i \end{aligned} \quad (4-3)$$

Weil sich hier wegen des Faktors $\cos(\varphi_0)$ ein rechteckiges Netzbild ergibt, wird diese Abbildung auch **rechteckige Plattkarte** genannt. Der Vorteil dieser Abbildung ist, daß die Breitenkreise, bezogen auf den längentreuen Parallelkreis (φ_0) des darzustellenden Gebietes, wesentlich genauer wiedergegeben werden und somit die Streckenmessungen in beliebigen Richtungen und Längen bei dieser Abbildungsart geringere Verzerrungen aufweisen, als bei der quadratischen Plattkarte.

Die Abbildungsformeln für die rechteckigen Plattkarte (4-3) können auch als *allgemeine Abbildungsgleichung für die Plattkarte* aufgefaßt werden, da sie für $\varphi_0 = 0^\circ$ (Äquator) in die quadratische Plattkarte übergeht.

4.1.3 Die Plattkarte als affine Abbildung

Bei Altkartenuntersuchungen können in den meisten Fällen die Originalformeln der Plattkarte in der normalen Form (4-2) und (4-3) nicht direkt verwendet werden, da infolge der damaligen unzureichenden Meß- und Kartiermethoden, sowie der im Laufe der Zeit eingetretenen Verformungen der Zeichnungsträger und Originale bis hin zur untersuchenden Vorlage (z.B. Druck), generell unterschiedliche Maßstabsfaktoren in x- und y-Richtung zu erwarten sind.

Um eine adäquate Altkartenabbildung zu finden, ist es daher sinnvoll, bei Plattkarten die Abbildungsvorschrift in affiner Form zu definieren, also mit zwei Maßstabsfaktoren in x- und y-Richtung, die mit Hilfe einer *ausgleichende Affintransformation* (siehe Kap. 2.2.2) ermittelt werden:

$$\begin{aligned} x_i &= \Delta\lambda_i \cdot \bar{m}_x \\ y_i &= \Delta\varphi_i \cdot \bar{m}_y \end{aligned} \quad \text{wobei:} \quad \begin{aligned} \bar{m}_x &= \frac{R}{m_x} \\ \bar{m}_y &= \frac{R}{m_y} \end{aligned} \quad (4-4a)$$

Zwischen den beiden Maßstabsfaktoren besteht wegen (4-3) folgende Relation zum längentreuen Parallelkreis φ_0 :

$$\bar{m}_x = \cos\varphi_0 \cdot \bar{m}_y \quad (4-4b)$$

Diese **affine Plattkarte** entspricht damit der **rechteckigen Plattkarte** mit dem *längentreu abgebildeten Parallelkreis* φ_0 . Die Berechnung des Maßstabes (Maßstabszahl) in x-Richtung auf einem *beliebigen* Parallelkreis (φ_i) kann wie folgt ermittelt werden:

$$m_x(\varphi_i) = m_y \cdot \frac{\cos(\varphi_i)}{\cos(\varphi_0)} \quad (4-5)$$

4.1.4 Verifizierung der Plattkarte als adäquate Kartenabbildung

Die *Vermutung*, daß eine Plattkarte in *quadratischer* oder *rechteckiger* Abbildung vorliegt, läßt sich bei Altkarten nicht so ohne weiteres auf den ersten Blick erkennen und begründen. In erster Linie ist natürlich die *äußere* Gestalt der Altkarte maßgebend, die im Rahmen dieser Überprüfung zunächst die Form eines Rechtecks haben muß, also insbesondere durch die Darstellung eines einigermaßen rechtwinkligen Kartenrahmens gegeben ist. Zur Verifizierung der Plattkarte als adäquate Kartenabbildung, wird hier neben einem einfachen Verfahren mit Hilfe der Graduierung, ein wesentlich genaueres Verfahren mit Maßstabsfaktoren vorgestellt, die über ein Ausgleichungsverfahren mit Hilfe homologer Punkte der Altkarte und einer modernen Karte bestimmt wurden.

(a) Verifizierung der Plattkarte mit Hilfe der Graduierung

Dieses Methode kann nur durchgeführt werden, wenn sowohl geographische Längen- als auch Breitenangaben (Graduierung) im Kartenrahmen der Altkarte explizit vorliegen. Sie stellt ein einfaches und schnelles Verfahren dar, das ohne aufwendige Berechnungen auskommt. Zur Entscheidung, ob die Plattkarte in *quadratischer* oder *rechteckiger* Form vorliegt, mißt man im Kartenrahmen der Altkarte die Strecken eines *gleichen* Gradbogenabschnittes (z.B. 1°) in Meridian- und Breitenkreisrichtung aus. Der sich daraus ergebene Quotient (t)

$$t = \frac{\text{Kartenstrecke eines Breitengradabschnittes } (\Delta\lambda = 1^\circ)}{\text{Kartenstrecke eines Meridiangradabschnittes } (\Delta\varphi = 1^\circ)} \quad (4-6)$$

stellt den *Testwert* zur Entscheidung auf *quadratischer* oder *rechteckiger* Plattkarte dar:

$$t \approx \left\{ \begin{array}{l} 1 \Rightarrow \text{Quadratische Plattkarte } (\varphi_0 \approx 0^\circ = \text{Äquator}) \\ \cos\varphi_0 \Rightarrow \text{Rechteckige Plattkarte } (\varphi_0 \approx \text{mittl. geogr. Breite des Gebiets}) \end{array} \right\} \quad (4-7)$$

Die Entscheidung aufgrund dieser Testgröße ist allerdings mit *großer Vorsicht* zu behandeln, da bei verschiedenen Untersuchungen festgestellt wurde, daß der Kartenrahmen möglicherweise erst nachträglich konstruiert wurde (wie z.B. die Tirolkarte von BURGKLECHNER oder die "Carta marina" von OLAUS MAGNUS), also keinen direkten Bezug auf die Kartiermethode der Ortspositionen im Kartenfeld hat [FINSTERWALDER, 1988; BRUNNER, 1991].

(b) Interpretation des Testwertes

Weicht der Testwert (t) zu stark von 1 ab, liegt *keine* eindeutige quadratische Plattkarte vor. Insbesondere sollte für die rechteckige Plattkarte gelten, daß sich für die geographische Breite $\varphi_i = \arccos(t)$ ein Wert ergibt, der innerhalb der nördlichen (φ_N) und der südlichen (φ_S) Blattbegrenzung liegt (am besten genau in der Mitte):

$$\varphi_S \leq \varphi_i = \arccos(t) \leq \varphi_N \quad (4-8)$$

Ist das nicht der Fall, liegt hier offensichtlich *keine* rechteckige Plattkarte vor. In Grenzfällen, wenn beispielsweise φ_i etwas außerhalb der nördlichen oder südlichen Blattbegrenzung liegt, muß abgewogen werden, ob die ursprüngliche Intention des Kartenmachers die Konstruktion einer rechteckigen Plattkarte war (ohne geometrischen Bezug auf den üblicherweise längentreuen Parallelkreis in der Blattmitte) oder ob er schlichtweg aus Unkenntnis eine ungefähr der rechteckigen Plattkarte entsprechende Graduierung vornahm.

(c) Verifizierung der Plattkarte mit Hilfe ausgeglichener Maßstabsfaktoren

Diese Methode geht auf die Abbildungsgleichungen für die *affine* Plattkarte nach (4-4) zurück, wobei die Maßstabsfaktoren über Ausgleichsverfahren mit Hilfe homologer Punkte in der Altkarte und der modernen Karte bestimmt werden.

Der Testwert zur Verifizierung der Plattkarte ist hier im Gegensatz zu (4-6), der Quotient aus den beiden ausgeglichenen Maßstabsfaktoren bzw. Maßstabszahlen:

$$t = \frac{\bar{m}_x}{\bar{m}_y} = \frac{m_y}{m_x} = \cos(\varphi_0) \quad (4-9)$$

Die Entscheidung für quadratische oder rechteckige Plattkarte kann dann gemäß (4-7) in Verbindung mit (4-8) getroffen werden. Da der Testwert hier aber nicht nach (4-6) abgeleitet ist, sondern aus den Ergebnissen einer *Ausgleichung* zwischen den homologen Punktfeldern der Altkarte und einer moderner Karte stammt, ist dieser Testwert als bedeutend genauer einzuschätzen und die daraus abgeleitete Interpretation bezüglich der Plattkartenart (quadratisch oder rechteckig) wesentlich realistischer.

4.2 Die Trapezabbildung als adäquate Kartenabbildung

Neben der Plattkarte werden in alten Karten meist für relativ große Gebiete trapezförmige Kartenabbildungen (Trapezkarten) verwendet. Hier wird der bereits im Altertum bekannten *Meridiankonvergenz* Rechnung getragen, die ein wesentlich *realistischeres* und genaueres Abbild der kugelförmigen Erdoberfläche darstellt. Gegenüber der Plattkarte stellt sie somit einen enormen Fortschritt dar. Diese Abbildungsart findet sich schon bei den *Ptolemäus-Handschriften* des frühen 15. Jahrhunderts, ist aber von *Nikolaus Germanus* konsequent erst ab 1460 angewendet worden, der sie erstmals in seinen Abschriften der "Geographie" des Ptolemäus verwendete (1. Ptolemäus-Rezension) [BONACKER, 1932]. Der erste Codex (Handschrift) dieser 1. Rezension, der sog. *Codex Neapolitana latinus V.F.32*, von PAGANINI [1990] faksimiliert, zeigt dies eindrucksvoll.

Trapezkarten findet man in den folgenden, vornehmlich in den ab 1477 *gedruckten* PTOLEMÄUS-Ausgaben, wie z.B. von Martin WALDSEEMÜLLER (Straßburg, 1513). In wie weit Ptolemäus (ca. 100 n. Chr.) allerdings selbst Anteil an der Entwicklung dieser Trapezabbildung hatte, ist unbekannt, da die Originalvorlagen seiner "Geographie" nicht erhalten sind. Des weiteren wird die Trapezkarte in einigen Regionalkarten verwendet, wie z.B. in der *Bayernkarte* von JOHANNES AVENTINUS aus dem Jahre 1523 (siehe Abb. 4.1).

Die gleichen Vorbehalte, wie sie schon bei der Plattkarte dargelegt wurden, gelten auch bei der Trapezabbildung. Die äußere Form, in diesem Fall speziell durch das trapezförmige Kartenfeld gegeben, sollte - obwohl es den Anschein einer "genauen" Abbildung erweckt - nicht darüber hinweg täuschen, daß der Karteninhalt möglicherweise teilweise oder größtenteils unabhängig von der Graduierung im Kartenrahmen, also nach anderen Kartiermethoden eingetragen wurde. Des weiteren ist nicht auszuschließen, daß die äußere Trapezform der Altkarte nachträglich angehängt worden ist, nur um den Konvergenzeffekt der Meridiane in Nordrichtung anzudeuten, aber ohne jeglichen mathematischen und geometrischen Bezug zum Karteninhalt.

Für die Trapez-Abbildungsgleichungen lassen sich für Altkartenuntersuchungen drei verschiedene Versionen anführen:

1. Die normale Trapezabbildung
2. Die Näherungslösung zur normalen Trapezabbildung
3. Die freie Trapezabbildung

Die ersten beiden Abbildungsversionen können in der für Kartenabbildungen üblichen Form für die Einheitskugel angegeben werden, wobei die Variablen (λ, φ) und Abbildungskonstanten *ausschließlich* geographische Koordinaten sind.

Bei der freien Trapezabbildung lassen sich dagegen die spezifischen Abbildungsparameter *nicht* mehr nach rein geographischen Koordinaten definieren, sondern nur noch in *Kombination* mit den kartesischen Koordinaten der Blattecken des Altkartenrahmens, welche die tatsächliche Trapezform der vorliegenden Altkarte berücksichtigen.



Abb. 4.1: Die Bayernkarte von JOHANNES AVENTINUS aus dem Jahre 1523, 40% verkleinert

4.2.1 Die normale Trapezabbildung

Die folgenden Formeln für die normale Trapezabbildung sind in keinem Lehrbuch der Kartennetzlehre zu finden. Wahrscheinlich deshalb, weil diese archaische Abbildung einerseits eine Sonderform darstellt, die in keine der üblichen Kategorien der Kartennetzlehre bezüglich Abbildungsfläche (Azimutalebene, Zylinder, Kegel), Abbildungseigenschaften (winkeltreu, flächentreu, mittabstandstreu) oder sonst irgendwie (Mischformen, Umbezifferungsmethode etc.) paßt. Andererseits wird man aus moderner Sicht auch keine Karte mit einem derartigen abstrakten und unwirklich erscheinendem Netzbild entwerfen wollen. Die hier vorgestellten Abbildungsgleichungen zur Trapezabbildung sollen daher einen ergänzenden Beitrag zur mathematischen Beschreibung historischer Netzentwürfe darstellen.

Die normale Trapezabbildung ist durch folgende Eigenschaften gekennzeichnet:

- symmetrische Darstellung um den Mittelmeridian (λ_0)
- längentreue Abbildung des Mittelmeridians
- geradlinige konvergierende Meridiane
- geradlinige und parallele Abbildung der Breitenkreise
- längentreue Abbildung der nördlichen und südlichen Blattbegrenzungs-Breitenkreise
- nur der Mittelmeridian schneidet orthogonal die Breitenkreise

Bei Gebietsdarstellungen um den Äquator, müßte die Trapezabbildung in einen nördlichen und einen südlichen Teil aufgesplittet werden. Da dies im Sinne der Aufgabenstellung für Regionalkarten des mitteleuropäischen Bereichs irrelevant ist, wird auf die Behandlung dieser speziellen Problematik im folgenden nicht weiter eingegangen.

Für die Ableitung der Trapezabbildung gibt es verschiedene Möglichkeiten, die alle zum gleichen Endergebnis führen. Eine sehr elegante Lösung läßt sich mit Hilfe einer bilinearen Transformation (siehe Kap. 2.2.4) finden, die wegen der Symmetrie-Eigenschaft der Trapezabbildung auf folgende einfache Abbildungsgleichungen führen:

$$\begin{aligned} x_i &= a_1 \cdot \Delta\lambda_i + a_2 \cdot \Delta\lambda_i \cdot \Delta\varphi_i \\ y_i &= \Delta\varphi_i \end{aligned} \quad (4-10a)$$

Die y-Koordinaten berechnen sich hier genau wie bei der Plattkartenabbildung nach (4-2) bzw. (4-3), wobei allerdings nur der Mittelmeridian längentreu abgebildet wird, während für die x-Koordinaten zwei Parameter (a_1 und a_2) bestimmt werden müssen, die - wie nachfolgend noch gezeigt wird - von den geographischen Breiten der nördlichen und der südlichen Blattbegrenzung abhängen.

Der Lösungsansatz für die x-Koordinaten führt auf folgendes lineare Gleichungssystem für zwei beliebig auswählbare, aber unabhängige Punkte (P_1, P_2):

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 \cdot \Delta\lambda_1 + a_2 \cdot \Delta\lambda_1 \cdot \Delta\varphi_1 \\ x_2 &= a_1 \cdot \Delta\lambda_2 + a_2 \cdot \Delta\lambda_2 \cdot \Delta\varphi_2 \end{aligned} \quad (4-10b)$$

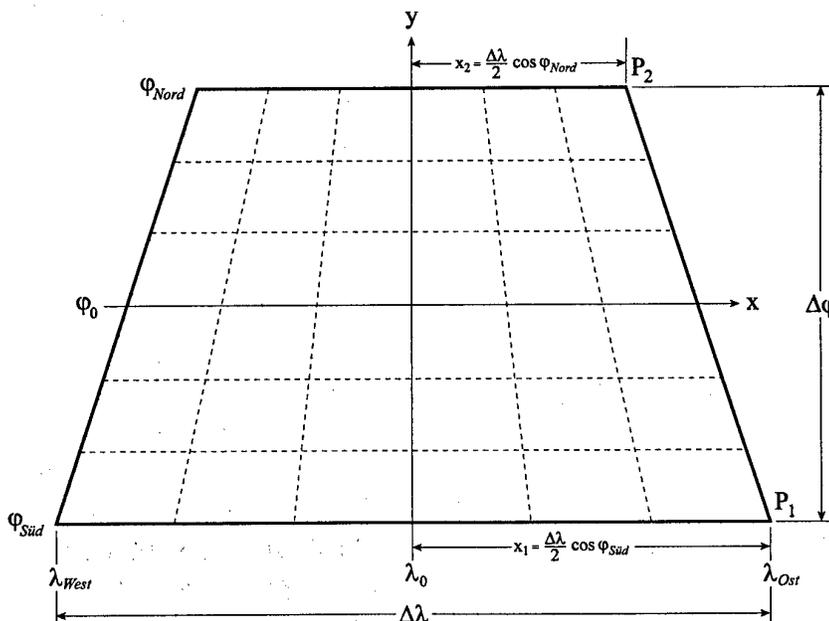


Abb. 4.2: Darstellung der Berechnungsparameter zur Trapezabbildung

Für diese beiden Punkte wählt man am zweckmäßigsten die nordöstliche und südöstliche Blattecke des Kartenfeldes aus (siehe Abb. 4.2). Danach ergeben sich für die Ableitung der unbekannt Parameter folgende mathematische Beziehungen:

$$\begin{aligned}\Delta\lambda &= \lambda_{Ost} - \lambda_{West} \\ \Delta\varphi &= \varphi_{Nord} - \varphi_{Süd}\end{aligned}\quad (4-10c)$$

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{\Delta\lambda}{2} \cos(\varphi_{Süd}) \\ x_2 &= \frac{\Delta\lambda}{2} \cos(\varphi_{Nord})\end{aligned}\quad (4-10d)$$

$$\begin{aligned}\Delta\lambda_1 &= \Delta\lambda_2 = \frac{\Delta\lambda}{2} \\ \Delta\varphi_1 &= -\frac{\Delta\varphi}{2} \\ \Delta\varphi_2 &= +\frac{\Delta\varphi}{2}\end{aligned}\quad (4-10e)$$

Nach Einsetzen dieser Ausdrücke in (4-10b) und Auflösung nach den unbekannt Parametern erhält man:

$$\begin{aligned}a_1 &= \frac{\cos(\varphi_{Nord}) + \cos(\varphi_{Süd})}{2} \\ a_2 &= \frac{\cos(\varphi_{Nord}) - \cos(\varphi_{Süd})}{\Delta\varphi}\end{aligned}\quad (4-10f)$$

Ausführlich ist die *normale Trapezabbildung* daher durch folgende Gleichungen für die Einheitskugel gegeben:

$$\begin{aligned}x_i &= \frac{\cos(\varphi_{Nord}) + \cos(\varphi_{Süd})}{2} \cdot \Delta\lambda_i + \frac{\cos(\varphi_{Nord}) - \cos(\varphi_{Süd})}{\Delta\varphi} \cdot \Delta\lambda_i \cdot \Delta\varphi_i \\ y_i &= \Delta\varphi_i\end{aligned}\quad (4-11)$$

4.2.2 Die Näherungslösung zur normalen Trapezabbildung

Bei *herkömmlichen* Maßstabsbestimmungen von Altkarten war man für genaue Aussagen auf moderne Karten mit ähnlicher Kartenabbildung angewiesen. So verwendete z.B. FINSTERWALDER [1967] die *Übersichtskarte von Bayern 1 : 500 000* als Behelf für die Trapezabbildung der Bayernkarte des JOHANNES AVENTINUS (Abb. 4.1), um daraus den Maßstab und die Genauigkeit abzuleiten [FINSTERWALDER, 1988].

Da die deutschen amtlichen Kartenwerke ab dem Maßstab 1 : 25 000 nach geographischen Netzlinsen geschnitten sind, ergeben sich trapezförmige Blattsnitte (*preußische Polyeder-Projektion*), die mit kleiner werdenden Maßstab immer deutlicher in Erscheinung treten. Ab dem Maßstab 1 : 200 000 liegt die Krümmung der Breitenkreise aber nicht mehr

in der Zeichengenauigkeit, so daß sie zwangsläufig gebogen dargestellt werden müssen. Eine echte Trapezabbildung nach (4-11) ist daher ab diesem Maßstab nicht mehr gegeben. Aufgrund der zu erwartenden großen Fehler bei Altkarten sind diese Abweichungen wegen der Parallelkreis-Krümmung aber auch bei kleineren Maßstäben, wie hier bei der Bayernkarte des JOHANNES AVENTINUS, immer noch vernachlässigbar.

Bei *digitalen* Methoden zur Maßstabsbestimmung und Genauigkeit von Altkarten ist man heute auf diese analogen Näherungsverfahren zur Bestimmung von Sollkoordinaten aus modernen Karten mit *ungefähr ähnlicher Altkartenabbildung* nicht mehr angewiesen, da man in den meisten Fällen adäquate Abbildungsgleichungen für die zu untersuchende Altkarte finden kann. Für schnell durchzuführende Handrechnungen (mit Hilfe eines Taschenrechners) zur groben Maßstabsfindung oder Verifizierung der Altkartenabbildung, ist es allerdings sehr hilfreich, einfache Abbildungsgleichungen zu verwenden, die auf der Grundlage einer guten Näherungslösung, ein akzeptables und einigermaßen genaues Ergebnis versprechen.

In diesem Sinne kann eine sehr gute Näherung zur Trapezabbildung mit Hilfe der **Mercator-Sanson-Abbildung** erzielt werden (Abb. 4.3). Sie zählt zu den *unechten zylindrischen Netzentwürfen* und wird normalerweise für eine Gesamtdarstellung der Erde (Erdkarte) verwendet. Sie hat folgende Eigenschaften:

- längentreue Abbildung des Mittelmeridians
- geradlinige längentreue Parallelkreise
- gekrümmte Meridiane
- flächentreue Abbildung
- nur der Mittelmeridian schneidet orthogonal die Parallelkreise

Die Abbildungsgleichungen lauten:

$$\begin{aligned} x_i &= \Delta\lambda_i \cdot \cos(\varphi_i) \\ y_i &= \Delta\varphi_i \end{aligned} \quad (4-12)$$

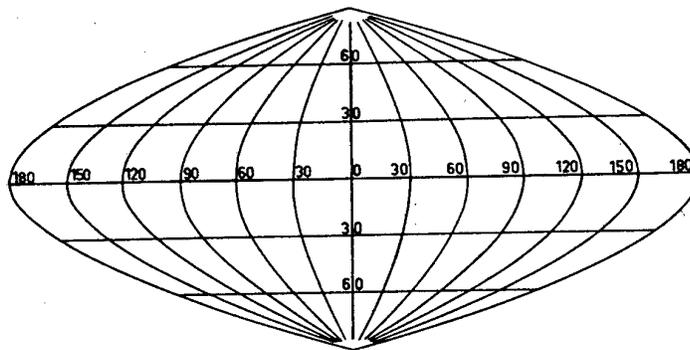


Abb. 4.3: Die Mercator-Sanson-Abbildung in der Darstellung für Erdkarten

Die Krümmung der Meridiane wird nur bei sehr kleinen Maßstäben mit großer Gebietsausdehnung in West-Ost-Richtung sichtbar oder wenn sich das darzustellende Gebiet in Äquatornähe befindet. Bei Regionalkarten im europäischen Bereich, die bei einer mittleren Breite von ca. 45° eine Ausdehnung von $\Delta\lambda \times \Delta\varphi \approx 4^\circ \times 3^\circ$ haben, bleibt die Krümmung selbst bei einem Maßstab von 1 : 100 000 noch weit unterhalb der Zeichengenauigkeit von 0.1 - 0.2 mm, so daß sie vernachlässigt werden kann.

4.2.3 Die freie Trapezabbildung

Diese Abbildungsvariante berücksichtigt weitestgehend die tatsächlich vorgegebene Trapezform der Altkarte in Kombination mit der Graduierung nach dem Kartenrahmen und kann dann angewendet werden, wenn nachweislich *keine* normale Trapezabbildung vorliegt (siehe dazu das nachfolgende Kapitel 4.2.4). Voraussetzung ist allerdings, daß die Trapezform der Altkarte *einigermaßen symmetrisch* und der nördliche und südliche Begrenzungsbreitenkreis *annähernd parallel* liegen, was in den meisten Fällen gegeben ist.

Die Abbildungsgleichungen zur freien Trapezabbildung ergeben sich analog aus der Ableitung der normalen Trapezabbildung. Diese haben die gleiche Grundform nach Formel (4-10a), unterscheiden sich aber in der Definition der Abbildungsparameter a_1 und a_2 . Zur Ableitung dieser Parameter werden in den Gleichungen nach (4-10d) anstatt der theoretischen Ausdrücke der rechten Seite, die tatsächlichen Werte für x_1 und x_2 eingesetzt, die man z.B. durch analoge Messungen direkt aus der Altkarte ermittelt. Die Koordinaten x_1 und x_2 stellen daher bei einer einigermaßen symmetrischen Trapezform der Altkarte die halben Strecken der linear dargestellten südlichen und nördlichen Begrenzungs-Parallelkreise des Abbildungsgebietes dar.

Danach ergeben sich für die *freie Trapezabbildung* folgende Abbildungsparameter,

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{x_1 + x_2}{\Delta\lambda} \\ a_2 &= -2 \cdot \frac{x_1 - x_2}{\Delta\lambda \cdot \Delta\varphi} \end{aligned} \quad (4-13a)$$

die nach Einsetzen in (4-10a) die Abbildungsgleichung für die *direkten Auftragskoordinaten* in X-Richtung ergeben. Um die freie Trapezabbildung in der für Kartennetzabbildungen üblichen Form für die *Einheitskugel* zu definieren, müssen die Abbildungsparameter allerdings noch durch den Maßstabsfaktor (\bar{m}) dividiert werden, der sich z.B. aus einem Ausgleichungsansatz für die Y-Koordinaten berechnen läßt (siehe Kap. 2.1.2). Für die freie Trapezabbildung ergeben sich somit folgende Abbildungsgleichungen für die Einheitskugel:

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{x_1 + x_2}{\Delta\lambda \cdot \bar{m}} \cdot \Delta\lambda_i - 2 \cdot \frac{x_1 - x_2}{\Delta\lambda \cdot \Delta\varphi \cdot \bar{m}} \cdot \Delta\lambda_i \cdot \Delta\varphi_i \\ y_i &= \Delta\varphi_i \end{aligned} \quad (4-13b)$$

mit $\bar{m} = \bar{m}_y$

4.2.4 Verifizierung der Trapezabbildung als adäquate Kartenabbildung

Die Verifizierung der Trapezabbildung wird man sinnvoller Weise nur auf solche Altkarten anwenden, die einerseits äußerlich (Darstellung des Kartenrahmens) die typische Trapezform aufweisen und andererseits nordorientiert sind, d.h. der nördlichste Parallelkreis wird deutlich kürzer als der südlichste Parallelkreis dargestellt. Neben der Verifizierung der Trapezabbildung mit Hilfe der *Graduierung* werden im folgenden auch die Möglichkeiten zur Verifizierung mit Hilfe des *Karteninhaltes* über das homologe Punktfeld zwischen Altkarte und moderne Karte beschrieben.

(a) Verifizierung der Trapezabbildung mit Hilfe der Graduierung

Dazu ermittelt man zunächst die Kartenstrecken der gradlinig dargestellten nördlichen und südlichen Blattbegrenzungs-Parallelkreise - wobei nördlich wie auch südlich ein gleich großer Längengradabschnitt ($\Delta\lambda_{Nord} = \Delta\lambda_{Süd}$) erfaßt werden muß - und berechnet folgenden (*empirischen*) Quotienten:

$$q_E = \frac{\text{Kartenstrecke des nördlichsten Parallelkreises } (\varphi_{Nord})}{\text{Kartenstrecke des südlichsten Parallelkreises } (\varphi_{Süd})}$$

Ersetzt man in diesem Ausdruck unter Berücksichtigung der in Abb. 4.2 dargestellten Parameter die empirisch ermittelten Kartenstrecken durch die Abbildungskordinaten für die x-Richtung nach Formel (4-11) mit

$$\Delta\lambda_{Nord} = \Delta\lambda_{Süd}$$

$$\Delta\varphi_{Nord} = \Delta\varphi/2$$

$$\Delta\varphi_{Süd} = -\Delta\varphi/2$$

oder noch einfacher nach (4-12), wird folgender (*theoretischer*) Quotient erhalten:

$$q_T = \frac{\cos(\varphi_{Nord})}{\cos(\varphi_{Süd})}$$

Als Testwert für die *Konvergenzbedingung* der Trapezabbildung wird daher folgender Ausdruck definiert:

$$t_K = \frac{q_E}{q_T} \tag{4-14}$$

Bei einer strengen Trapezabbildung nach (4-11) oder der Näherungslösung nach (4-12) müßten beide Quotienten (q_E, q_T) gleich groß sein, so daß sich ein Testwert von $t_K = 1$ ergibt. Bei Altkartenuntersuchungen kann i.d.R. aber nur $t_K \approx 1$ erwartet werden. Weicht dieser Testwert zu stark von 1 ab, liegt offensichtlich eine *freie Trapezabbildung* vor. Man kann in diesem Fall annehmen, daß der Kartenmacher willkürlich, also ohne Berücksichtigung des exakten Verjüngungsfaktors $\cos(\varphi)$ für die Parallelkreisabbildung seine Karte konstruierte.

Eine weitere notwendige Voraussetzung zur Anwendung der normalen Trapez-Abbildungsgleichungen ist die *symmetrische* Darstellung des trapezförmigen Kartenrahmens, die am einfachsten mit Hilfe der beiden Diagonalstrecken (d_1 und d_2) des Kartenblattes verifiziert werden kann. Als Testwert für die *Symmetrie* der Trapezabbildung wird hier der Quotient aus den beiden Diagonalstrecken definiert:

$$t_S = \frac{d_1}{d_2} \tag{4-15}$$

Bei einer symmetrischen Trapezabbildung müßten beide Diagonalstrecken gleich lang sein, so daß sich ein Testwert von $t_S = 1$ ergibt. Weicht der Testwert zu stark von diesem Erwartungswert ab, liegt keine symmetrische Trapezabbildung vor.

Zusammenfassend kann zur Verifizierung der Trapezabbildung mit Hilfe der *Graduierung* folgendes festgehalten werden:

Die *Anwendung der normalen Trapezabbildung* nach (4-11) auf die zur untersuchende Altkarte ist *nur sinnvoll*, wenn die Testwerte zur Konvergenz- als auch zur

Symmetriebedingung nach (4-14) und (4-15) keine größeren Abweichungen vom Erwartungswert $t = 1$ aufweisen. Andernfalls liegt bei der Altkarte eine *freie Trapezabbildung* nach (4-13b) vor, so daß die Anwendung einer *normalen Trapezabbildung* fragwürdig erscheint, da sie zwangsläufig zu große Modellfehler liefern würde.

(b) Verifizierung der Trapezabbildung mit homologen Punkten des Karteninhalts

Diese Methode geht der Frage nach, ob eine Altkarte, die *augenscheinlich* in Trapezabbildung vorliegt, allein aus dem Karteninhalt (homologe Paßpunkte zwischen Altkarte und moderner Karte) auch als Trapezabbildung nachgewiesen werden kann.

Der Verfahrensweg kann folgendermaßen skizziert werden:

1. Berechnung eines ausgeglichenen Maßstabsfaktors (\bar{m}) mit Hilfe einer Ausgleichung nach direkten Beobachtungen (siehe Kap. 2.1.2) für die y-Koordinaten:

$$y_i = \Delta\varphi_i \cdot \bar{m}$$

2. Bestimmung der Abbildungsparameter a_1 und a_2 für die Einheitskugel mit Hilfe einer Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen (siehe Kap. 2.1.1) über folgenden modifizierten Modellansatz nach (4-10a):

$$\frac{x_i}{\bar{m}} = a_1 \cdot \Delta\lambda_i + a_2 \cdot \Delta\lambda_i \cdot \Delta\varphi_i \quad (4-16)$$

3. Decken sich die daraus ermittelten Parameter einigermaßen mit denen, die mit Hilfe der Formel (4-10f) berechnet werden können, wobei hier die empirisch ermittelten Werte für den nördlichen und südlichen Begrenzungs-Parallelkreis eingesetzt werden, liegt vermutlich eine normale Trapezabbildung vor.
4. Weichen die gefunden Parameter zu stark von einander ab, liegt definitiv keine normale Trapezabbildung vor. Insbesondere sollten sich für die Parameter von a_1 und a_2 nach Formel (4-16) folgende Plausibilitätswerte ergeben: $a_1 > 0$, $a_2 < 0$

Um die Effizienz des Verfahrens nachzuprüfen, wurden *zufallsgenerierte* Paßpunkte (geographische Sollkoordinaten) berechnet. Mit Hilfe der normalen Trapezabbildung wurden anschließend daraus *simulierte* Altkarten-Koordinaten berechnet, wobei auf jeden Punkt noch ein zufallsgenerierter Koordinatenzuschlag in der maximalen Größenordnung eines mittleren Punktfehler addiert wurde. Auf diese Weise wurden für mehrere verschiedenen große Gebietsausschnitte Altkarten-Koordinaten erhalten, die jeweils mit unterschiedlichen mittleren Koordinatenfehlern (groß, mittel, klein) behaftet waren. Daraus und aus empirischen Untersuchungen mit realen Trapezabbildungen konnte folgendes festgestellt werden:

- Bei *stark ausgeprägter* Trapezform wirkt sich i.d.R. der Einfluß der Trapezabbildung stärker aus, als die Datenqualität der Altkarte. Hier können bei einer guten Datenqualität (mittlerer Punktfehler) akzeptable Verifizierungsergebnisse erwartet werden.
- Bei *schwach ausgeprägter* Trapezform (bei Altkarten die Regel; siehe Abb. 5.1: Die Bayernkarte von JOHANNES AVENTINUS aus dem Jahre 1523) wirkt sich die Datenqualität der Altkarte stärker aus, als der Einfluß der Trapezabbildung. Bei mittlerer bis schlechter Datenqualität tritt dadurch häufig der Effekt auf, daß sich

aufgrund der ausgeglichenen Abbildungsparametern eine umgekehrte Trapezform (nördlicher Parallelkreis größer als der südliche) ergibt, was in diesem Fall auch am Parameter a_2 zu erkennen ist, der größer Null wird. Die Verifizierung der Trapezabbildung ist in diesem Fall sehr *fragwürdig*.

- Wenn der *mittlere Punktfehler* der Altkarte größer als die halbe Differenz zwischen der Strecke des südlichen und nördlichen Begrenzungs-Parallelkreises ist, läßt sich mit Hilfe einer Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen *keine* gesicherte Trapezabbildung verifizieren, auch wenn augenscheinlich eine solche vorliegt.

Daraus folgt zusammenfassend, daß sich Verifizierungsuntersuchungen für Trapezabbildungen mit Hilfe homologer Punkte des Kartenfeldes als äußerst problematisch erweisen. Sie scheinen nur bei solchen Altkarten sinnvoll, die eine *stark ausgeprägte Trapezform* haben oder deren mittlere Punktfehler relativ klein ist. In allen anderen Fällen kann definitiv *keine* Trapezabbildung nachgewiesen werden. Eine nähere Untersuchung der für die Ausgleichung herangezogenen Punkte erscheint daher sinnvoll.

Kapitel 5

Methoden zur Maßstabs- und Genauigkeitsbestimmung

Für den Begriff *Karte* gibt es eine Vielzahl von Definitionen [siehe HAKE, 1994], wobei der *numerische* und *geometrische* Aspekt sich dabei auf den *Maßstab* und den *Kartennetzentwurf* (im folgenden auch *Kartenabbildung* genannt) bezieht. Der *Maßstab* (M) drückt das Verkleinerungsverhältnis der Karte gegenüber der Natur aus und wird in der heute üblichen Form

$$M = 1 : m \quad (5-1)$$

angegeben, wobei m als *Maßstabszahl* bezeichnet wird. Umgangssprachlich wird die Maßstabszahl aber häufig auch als Kurzbezeichnung für die exakte Maßstabsangabe nach (5-1) benutzt.

Die *Kartenabbildung* beschreibt in Form einer analytischen Abbildungsvorschrift (Funktion) die Übertragung der darzustellenden Objekte der Erdoberfläche in eine Kartenebene und wird in symbolischer Form durch

$$\begin{aligned} x &= f(\lambda, \varphi) \\ y &= g(\lambda, \varphi) \end{aligned} \quad (5-2)$$

ausgedrückt (siehe auch Kap. 4), wobei x, y die *kartesischen Auftragskoordinaten* und λ, φ die zu übertragenden *geographischen Koordinaten* von beliebigen Oberflächenpunkten sind.

Eine moderne Maßstabsangabe in der Form nach (5-1) ist in den hier zu untersuchenden Altkarten des 15. - 18. Jahrhunderts nicht zu finden. Sie taucht erst Anfang des 19. Jahrhunderts auf, wie z.B. in der *Karte des österreichischen Kaisertums 1 : 864 000* von AUGUST FALLOU [NEUNTEUFL, 1984]. Der im Vergleich zu modernen Karten unrunde Maßstab ist typisch für Altkarten und erklärt sich aus dem Unterschied der Maßeinheiten der damaligen Zeit zu modernen Maßeinheiten. Altkarten haben daher generell keine runden Maßstäbe. Statt eines Verkleinerungsverhältnisses nach Formel (5-1) findet man in den Altkarten häufig eine *graphische Maßstabsangabe* (Maßstabsleiste), die gelegentlich mit einem erläuternden Zusatz über die dargestellte Längenmaßeinheit versehen ist und sich in der Regel auf die damals übliche Meile (z.B. *gemeine deutsche Meile*) bezieht.

Um den Maßstab einer Altkarte in der modernen Form nach (5-1) zu finden, gibt es verschiedene Methoden, die im Prinzip alle auf einen Vergleich zwischen der zu untersuchenden Altkarte mit einer als fehlerfrei unterstellten modernen Karte beruhen. Aufgrund der verschiedenen Verfahren ergeben sich allerdings unterschiedliche Ergebnisse, deren Qualität je nach Methode abzuwägen ist, um schließlich zu einer Endbeurteilung zu kommen. Außerdem hängen Maßstab und Genauigkeit der Altkarte unmittelbar zusammen, denn zur Bestimmung der Genauigkeit einer Altkarte ist die Berechnung eines mittleren Maßstabs von fundamentaler Bedeutung, da er in der Statistik ein notwendiger Parameter zur Schätzung der Streuung (Standardabweichung) des mittleren Maßstabs ist.

5.1 Vergleichsstrecken-Verfahren

Bei diesem Verfahren wird die Berechnung des Maßstabes über einen Vergleich zwischen Naturstrecken und entsprechenden Kartenstrecken in der Altkarte realisiert, wobei man zwischen zwei grundlegenden Methoden unterscheiden kann:

- *Direkte* Maßstabsbestimmung aus der Altkarte
- *Indirekte* Maßstabsbestimmung durch Vergleich mit modernen Karten

Beide Methoden werden im folgenden vorgestellt, wobei vorab auf die rechnerischen Grundformeln des Verfahrens eingegangen wird.

Grundformeln zum Vergleichsstrecken-Verfahren

Wie allgemein bekannt, ist der Maßstab einer Karte innerhalb eines Kartenfeldes streng genommen nicht konstant, da die Bezugsfläche des Erdkörpers (z.B. Ellipsoid oder Kugel) nicht verzerrungsfrei, insbesondere *nicht längentreu* abgebildet werden kann (mathematischer Beweis von EULER, 1777). Bei kleinmaßstäbigen Karten (z.B. Erdkarten) treten große Längenverzerrungen auf, so daß Maßstabsangaben sich nur auf bestimmte Richtungen (z.B. entlang eines längentreuen Parallelkreises oder des Mittelmeridans) beziehen. Sind bei diesen Karten keine besonderen Angaben gemacht, bezieht sich der Maßstab in der Regel auf den Äquator, so daß man den Maßstab auch als Verkleinerungsverhältnis des Erdradius (Kugelmaßstab) auffassen kann.

Bei großmaßstäbigen Karten sind die Verzerrungen aber vernachlässigbar klein, so daß die Bezugsfläche des Erdausschnittes als Ebene angesehen werden kann. Nur in diesem Fall drückt der Maßstab ein *lineares* Verkleinerungsverhältnis (Längenmaßstab) aus, der sich dann direkt aus einem Streckenvergleich zwischen Karte und Natur ableiten läßt:

$$M = \frac{S_K}{S_N} = 1 : m \quad \text{mit} \quad m = \frac{S_N}{S_K} \quad (5-3)$$

wobei S_N die Naturstrecke und S_K die entsprechende Kartenstrecke ist. Die Naturstrecke läßt sich daher bei großmaßstäbigen Karten im Rahmen der Zeichengenauigkeit verzerrungsfrei aus der Kartenstrecke und dem Maßstab berechnen:

$$S_N = S_K \cdot m \quad (5-4)$$

Bei Altkartenuntersuchungen hat man gewöhnlich mit Maßstäben im mittleren bis kleinmaßstäbigen Bereich (ca. 1 : 200 000 - 1 : 800 000 und kleiner) zu rechnen, so daß die Verzerrungen nicht mehr vernachlässigbar klein bleiben und daher kein konstanter Maßstab über das gesamte Kartenfeld möglich ist. Die Formeln (5-3) und (5-4) gelten daher *zunächst* nur für großmaßstäbige Karten *und* wenn der Maßstab aus *einer* Karte - hier also direkt aus der Altkarte - abgeleitet werden soll.

Insbesondere ist folgender Fall für die *praktische* Berechnung nach dem Vergleichsstrecken-Verfahren von besonderer Bedeutung:

Liegen zwei Karten mit *gleicher* Abbildung aber *verschiedenen* Maßstäben vor, haben Strecken zwischen homologen Punkten in beiden Karten die *gleiche* Längenverzerrung (bezogen auf die Einheitskugel). Die Strecken unterscheiden sich dann nur durch das Maßstabsverhältnis beider Karten und verhalten sich somit proportional zu den Maßstäben oder umgekehrt proportional zur jeweiligen Maßstabszahl. Das läßt sich auch leicht aus der Tatsache ableiten, daß die Naturstrecken (S_{N_1}, S_{N_2}) als Produkt von

(längenverzerrten) Strecken (s_1, s_2) und Maßstabszahlen (m_1, m_2) der jeweiligen Karten bei *gleichen Abbildungen* identisch sein müssen. Danach lassen sich folgende Beziehungen ableiten:

$$S_N = S_{N_1} = S_{N_2} = s_1 \cdot m_1 = s_2 \cdot m_2 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{s_2}{s_1} \quad (5-5)$$

Liegen also zwei Karten vor, wobei *nur* der Maßstab *einer* der Karten bekannt ist, läßt sich der unbekannte Maßstab der anderen Karte über die Streckenlängen zwischen zwei homologer Punkte beider Karten und dem bekannten Maßstab ableiten:

$$m_1 = \frac{s_2 \cdot m_2}{s_1} = \frac{S_{N_2}}{S_{K_1}} \quad (5-6)$$

Diese Formel ist im Prinzip mit (5-3) identisch. Der *Unterschied* besteht im wesentlichen darin, daß die Naturstrecke aus einer *anderen* Karte berechnet wird als die Kartenstrecke und der Forderung bzw. Hauptbedingung nach *gleicher Kartenabbildung* in den *zwei* zu vergleichenden Karten. Die Formel (5-6) gilt daher für *beliebige* Maßstäbe und Strecken, solange beide zu vergleichende Karten in *gleicher Kartenabbildung* vorliegen.

5.1.1 Direkte Maßstabsbestimmung

Bei dieser Methode kann unter Zuhilfenahme der Formel (5-3) eine Maßstabsberechnung unter gewissen Prämissen direkt aus der zu untersuchenden Altkarte abgeleitet werden. Dazu kann entweder die *graphische Maßstabsangabe* (Maßstabsleiste) herangezogen werden oder auch das im Kartenrahmen der Altkarte angerissene Gradnetz (Graduierung).

Dieses Verfahren muß *generell mit Vorsicht* behandelt werden, da man bei Altkarten im allgemeinen erwarten kann, daß die Graduierung *nicht* mit der Kartierung der Ortspositionen im Kartenfeld der Altkarte übereinstimmt.

Sind weder Maßstabsleiste noch Gradnetzangaben vorhanden, kann eine direkte Maßstabsbestimmung aus der Altkarte *nicht* vorgenommen werden, so daß andere Verfahren angewendet werden müssen. Eine notwendige Voraussetzungen für diese Methode ist die Kenntnis von Längenmaßeinheiten alter Karten, die elementar mit der Erdgestalt verknüpft sind und auf die vorab eingegangen werden soll.

(a) Mittlerer Erdradius und Längenmaßeinheiten

Vor Einführung des Meters (ca. Ende des 19. Jahrhunderts) existierten viele *uneinheitliche* Längenmaßeinheiten. Zu den wichtigsten Längenmaßen, die hier für die Methode der direkten Maßstabsbestimmung benötigt werden, zählen die *Meile*, die *Länge eines Äquatorgrades* und die *Länge eines Meridiangrades*. Diese Maße stehen in unmittelbarem Zusammenhang mit dem Erdmodell, das sich im Laufe der Zeitgeschichte - von der naiven Vorstellung einer Erdscheibe abgesehen - über die Kugel und das Rotationsellipsoid bis zum Geoid wandelte.

Bis zur 2. Hälfte des 17. Jahrhunderts hat man die Erdfigur noch als Kugel betrachtet. Die letzten Gradmessungen, die von der Kugelgestalt der Erde ausgingen, wurden in Frankreich von J. PICARD 1669/70 mit Hilfe verbesserter Meßmethoden (Triangulation) und Instrumenten (Fadenkreuz-Fernrohr) durchgeführt. Bis heute wurden weltweit verbesserte Erdellipsoide mit optimaler Anpassung an das Geoid berechnet.

Bei Genauigkeitsuntersuchungen für Altkarten ist es aber bei den meisten Aufgabenstellungen wegen der generell zu erwartenden großen Fehler und der zumeist mittleren bis kleinmaßstäbigen Karten *vollkommen ausreichend*, eine *mittlere Erdkugel* anzusetzen, die zum genaueren Ellipsoid z.B. oberflächengleich ist. Für den Erdradius dieser mittleren Kugel kann daher folgender Wert

$$\text{Mittlerer Erdradius: } R = 6370 \text{ km} \quad (5-7)$$

für Altkartenuntersuchungen genau genug verwendet werden.

Aus dem mittlerem Erdradius lassen sich zwei weitere Grund-Längenmaße für Altkartenuntersuchungen ableiten:

$$\text{Äquatorgrad} = \text{Meridiangrad} = \frac{R \cdot 2\pi}{360} = 111.2 \text{ km} \quad (5-8)$$

Die in vielen Altkarten dargestellte und u.U. auch benutzte *Meile* für die Konstruktion der Karte, hängt häufig von der Länge des Äquatorgrades ab. So wurde z.B. die *gemeine (oder geographische) deutsche Meile* bereits im 15./16. Jahrhundert als 1/15 der Bogenlänge eines Äquatorgrades definiert [FINSTERWALDER, 1988], während die *große deutsche Meile* als 1/12 der Bogenlänge eines Äquatorgrades festgelegt wurde. Danach ergeben sich für die

$$\text{gemeine deutsche Meile} = \frac{111.2 \text{ km}}{15} = 7.4 \text{ km} \quad (5-9)$$

und für die

$$\text{große deutsche Meile} = \frac{111.2 \text{ km}}{12} = 9.3 \text{ km} \quad (5-10)$$

Diese Meilenmaße stellen gesicherte Werte dar, die in vielen Altkarten nachgewiesen werden können. Daneben gibt es noch zahlreiche andere Meilenmaße, die aber regional und zeitlich Schwankungen aufweisen, so daß die Meile grundsätzlich mit einem starken Unsicherheitsfaktor behaftet ist und beim Arbeiten mit diesem Maß Vorsicht geboten ist. Literatur zu alten Maßeinheiten und deren Umrechnung findet man z.B. in: [ZEDLER, 1739], [von ALBERTI, 1957] und [KAHNT und KNORR, 1986].

(b) Maßstabsbestimmung aus der graphischen Maßstabsangabe

Viele Altkarten enthalten eine *graphische Maßstabsangabe* (Maßstabsleiste), die sich in den meisten Fällen auf die damals übliche Meile beziehen. Über Sinn und Zweck der Darstellung dieser Maßstabsleiste kann spekuliert werden. Die häufig vertretene Meinung in der einschlägigen Literatur, daß sie für den Kartengebrauch zwecks Entfernungsmessung in der Karte angegeben wurde, macht nur Sinn, wenn die Altkarte einen einigermaßen konstanten Maßstab für das gesamte Kartenfeld besitzt. Das aber ist nur annähernd gegeben, wenn die Altkarte z.B. als *rechteckige Plattkarte* (Berücksichtigung der Meridiankonvergenz für die West-Ost-Ausdehnung im mittleren Kartenfeld) mit *großem* Maßstab vorliegt.

Die **Tirolkarte** von BURGKLECHNER aus dem Jahre 1611 (mittlere Breite: $\varphi_0 \approx 48^\circ$) hat z.B. einen Maßstab von ca. 1 : 167 000 und ist in quadratischer Plattkartenabbildung dargestellt (aus Voruntersuchungen bekannt). Trotzdem besitzt sie eine graphische Maßstabsangabe (siehe Abb. 5.1), mit der aufgrund der Kartenabbildung nur Strecken in Nord-Süd-Richtung einigermaßen genau bestimmt werden können. Strecken in West-Ost-Richtung werden dagegen bei der mittleren Breite dieser Karte viel zu groß dargestellt (Faktor: $1/\cos \varphi_0 \approx 1.6$).

Für halbwegs genaue Entfernungsmessungen kann die Maßstabsleiste daher nicht gedient haben.

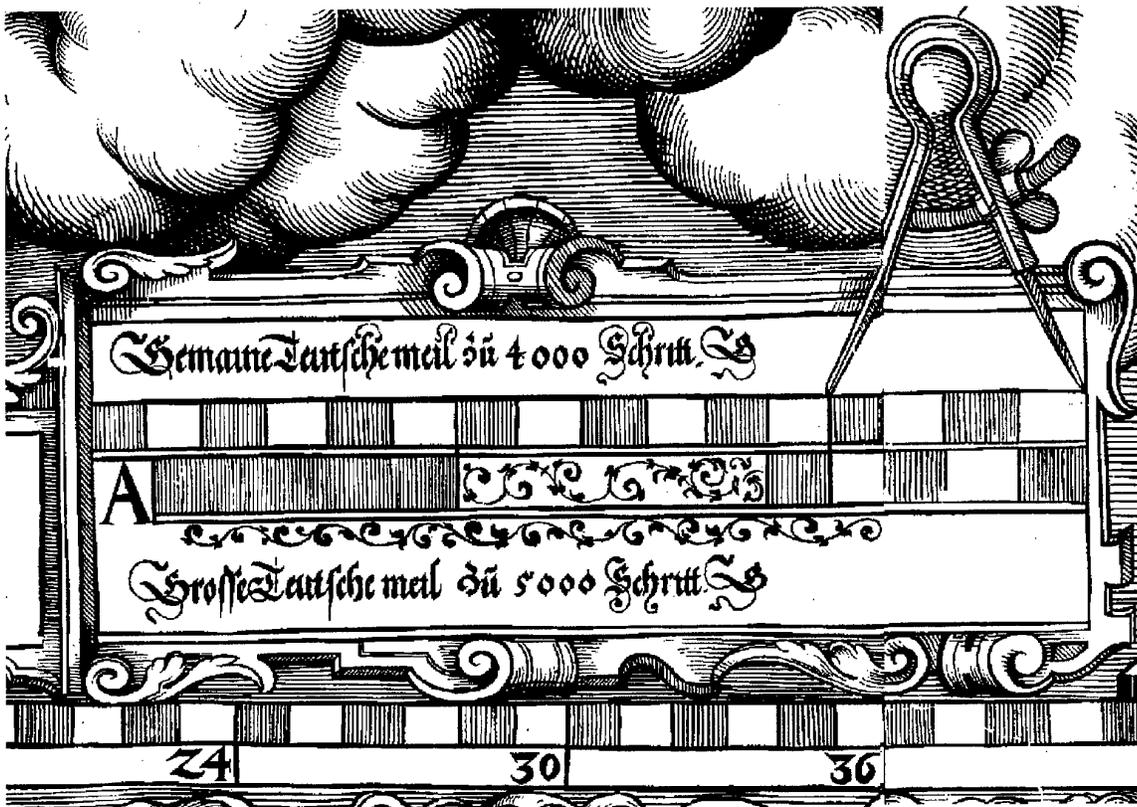


Abb. 5.1: Maßstabsleiste der Tirolkarte von BURGKLECHNER (1611); auf 31% verkleinert

Die südorientierte **Schlesienkarte** von MARTIN HELWIG aus dem Jahre 1561 [BEINEKE u. BRUNNER, 1996] liegt dagegen als rechteckige Plattkarte vor (mittlere Breite ca. 51°). Bei dieser Kartenabbildung war es sinnvoll, die Karte mit einer Maßstabsleiste zu versehen (siehe Abb. 5.2), mit deren Hilfe man einigermaßen genau beliebige Entfernungsmessungen durchführen kann.

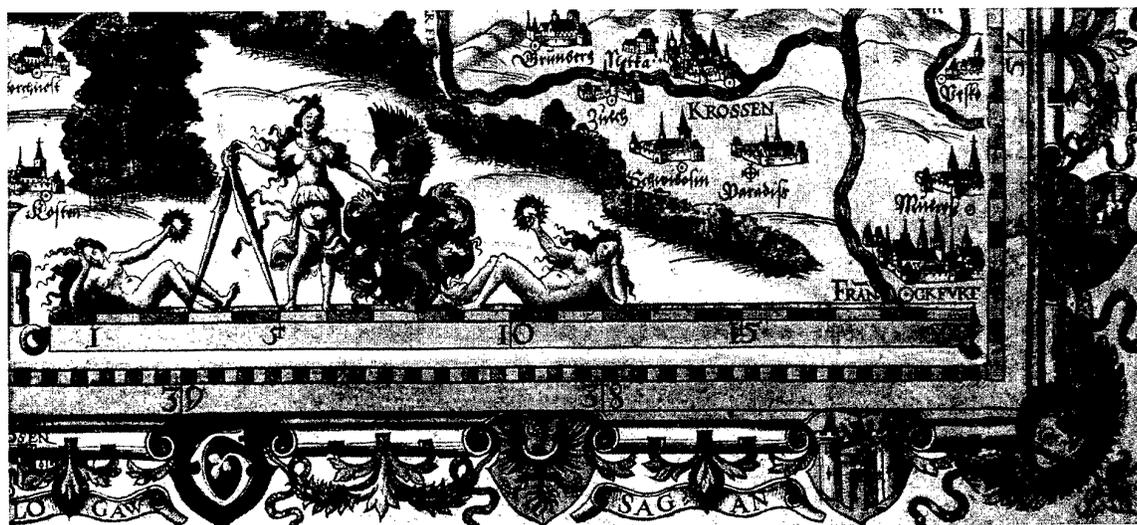


Abb. 5.2: Maßstabsleiste der Schlesienkarte von HELWIG (1561); auf 49% verkleinert

Der mittlere Maßstab dieser Karte von ca. 1 : 540 000 ist aber relativ klein, so daß Entfernungsmessungen in West-Ost-Richtung im nördlichen oder südlichen Bereich der Karte spürbar fehlerbehaftet sind. Der maximale relative Streckenfehler beträgt hier ca. $\pm 3\%$, was auf die gesamte Breite der Karte bezogen etwa ± 14 km entspricht. Der Kartenmacher hat offensichtlich diese Ungenauigkeiten gutheißend in Kauf genommen. Es erscheint nahelegend, daß die Kartenmacher in der damaligen Zeit die Maßstabsleiste eher als verzierendes Beiwerk zur graphischen Veranschaulichung der Meile dargestellt haben und weniger als Mittel für genaue Streckenbestimmungen, die nur von fachkundigen Benutzern bei Kenntnis der Abbildungseigenschaften vorgenommen werden konnten.

Neben der Verzerrungen besteht bei der Maßstabsbestimmung aus der Maßstabsleiste das weitere Problem in der Unkenntnis der Länge der Meile, weil vielfach nicht ersichtlich ist, um welche Meile es sich handelt. Die Maßstabsleiste der Schlesienkarte (Abb. 5.2) enthält z.B. keinerlei Angaben über die verwendete Meile, während die Maßstabsleiste der Tirolkarte (Abb. 5.1) gleich zwei Meilen beschreibt und darstellt: die *gemeine deutsche Meile zu 4000 Schritt* und die *große deutsche Meile zu 5000 Schritt*.

Plausibilitätsprüfung der Meilenangabe

In einigen Fällen läßt sich, wenn die Altkarte im Kartenrahmen eine Graduierung aufweist und eine mittabstandstreue Kartenabbildung (z.B. Plattkarte) vorliegt, auf einfachste Weise (allein aus Streckenmessungen im Kartenrahmen der zu untersuchenden Altkarte) die verwendete Meile verifizieren.

Dazu mißt man zunächst die im Kartenrahmen wiedergegebene Bogenlänge von einem Grad aus, wobei im Falle der *rechteckigen Plattkarte* nur *ein Meridiangrad* ausgemessen werden darf (bei der *quadratischen Plattkarte* auch *ein Breitengrad = ein Äquatorgrad*). Diese Strecke dividiert man durch die in der Maßstabsleiste dargestellte Kartenstrecke der Meile. Der Quotient (n) ergibt die Anzahl der Meilen pro (Äquator-)Grad:

$$n = \frac{S_K(1^\circ)}{S_K(1 \text{ Meile})} = \frac{\text{Kartenstrecke eines Meridiangrades}}{\text{Kartenstrecke einer Meile}} \quad (5-11)$$

Gemäß der oben angegebenen Meilendefinition (5-9) und (5-10) müßte für die *gemeine deutsche Meile* $n=15$ und für die *große deutsche Meile* $n=12$ erwartet werden. Das ist allerdings nicht immer der Fall, wie die folgenden zwei Beispiele belegen sollen:

Beispiel 1:

Die Maßstabsleiste der Schlesienkarte (Abb. 5.2) enthält, wie schon erwähnt, keinerlei Angaben über die verwendete Meile. Die Ausmessung der Meile und eines Meridiangrades in der Altkarte ergibt im Rahmen der Zeichengenauigkeit nach (5-11) den Quotienten $n=15$, so daß es sich bei der Meilendarstellung dieser Karte *eindeutig* um die *gemeine deutsche Meile* handelt. Gleichzeitig deutet dieses Ergebnis auch auf eine erstaunlich gute Kartierung der Graduierung und Meilendarstellung hin. In wieweit der Karteninhalt (Ortspositionen der Altkartenpunkte) mit dieser Graduierung übereinstimmt, muß gesondert untersucht werden.

Beispiel 2:

Die Maßstabsleiste der Tirolkarte enthält wie aus Abb. 5.1 ersichtlich *zwei* Meilenangaben. Die Auswertung ergibt aber im Rahmen der Zeichengenauigkeit sowohl in Meridian- als auch in Breitenkreis-Richtung den Quotienten $n = 13.2$, wenn man die dargestellte Kartenstrecke für die *gemeine deutsche Meile* einsetzt (die Ausmessung eines Breitengrades darf hier

angewendet werden, weil die Karte als quadratischer Plattkarte vorliegt). Entsprechend erhält man $n = 10.5$, wenn die *große deutsche Meile* eingesetzt wird. Diese Abweichungen von den zu erwartenden Sollwerten (15 bzw. 12) sind zu groß und lassen sich auch nicht durch irgendwelche Verformungseinflüsse auf die Karte im Laufe der Zeit erklären, weil die Meilenskala unmittelbar am unteren rechten Rand der Karte, also parallel zu den Längengradangaben dargestellt wurde. Eine Deformation in West-Ost-Richtung würde sich gleichermaßen auf die Meilenskala wie auch auf die Darstellung der Längengradabschnitte auswirken und somit keinen Einfluß auf die Berechnung des Quotienten nach (5-11) haben.

Obwohl die Tirolkarte eine eindeutige Beschreibung der (verwendeten) Meile angibt, paßt diese aber offensichtlich nicht zu der Graduierung. Entweder ist die Meilenskala zu groß oder die Graduierung zu klein dargestellt worden. Für eine Maßstabsberechnung mit Hilfe der Maßstabsleiste - trotz bekannter Meile - ist diese Methode daher mit einem zu großen Unsicherheitsfaktor behaftet. Eine Klärung kann nur mit Hilfe genauerer und unabhängigen Verfahren (siehe Kap. 5.1.2 bzw. Kap. 5.2) durchgeführt werden. Speziell bei dieser Karte erscheint es allerdings nicht sehr wichtig, detaillierte Genauigkeitsuntersuchungen anzustellen, da sie mehr den Charakter eines *Landschaftsgemäldes* aufweist und weniger den einer genauen Karte.

Maßstabsformel bei bekannter Meile

Wenn die verwendete Meile bekannt ist, läßt sich nach (5-3) der Maßstab (bzw. Maßstabszahl) nach folgender Formel berechnen, wobei aber zu berücksichtigen ist, daß wegen der unsicheren Meile diese Maßstabsberechnung nur ein grober Anhalt sein kann:

$$m_K = \frac{S_N(1 \text{ Meile})}{S_K(1 \text{ Meile})} = \frac{\text{Naturstrecke einer Meile}}{\text{Kartenstrecke einer Meile}} \quad (5-12)$$

Numerisches Beispiel:

Die Kartenstrecken einer Meile wurden in den beiden oben angeführten Altkartenbeispielen ausgemessen, so daß sich folgende Maßstabszahlen ergeben, wenn die *gemeine deutsche Meile* (7.4 km) für die Altkartenkonstruktion benutzt wurde:

$$\text{Schlesienkarte: } m_K = \frac{7\,400\,000 \text{ mm}}{13.2 \text{ mm}} \approx 561\,000$$

$$\text{Tirolkarte: } m_K = \frac{7\,400\,000 \text{ mm}}{52.1 \text{ mm}} \approx 142\,000$$

(c) Maßstabsbestimmung aus der Graduierung im Kartenrahmen

Diese Methode setzt zwingend voraus, daß die Altkarte im Kartenrahmen eine Graduierung aufweist. Sie hat den Vorteil, daß die Berechnung *ohne* die unsichere Meile durchgeführt werden kann und daher *genauer* als (5-12) ist. Zur Maßstabsbestimmung nach (5-3) braucht lediglich die Länge eines Meridiangrades (1°) im Kartenrahmen der Altkarte ausgemessen werden. Da die entsprechende Naturstrecke nach (5-8) bekannt ist (111.2 km), läßt sich die Maßstabszahl auf einfachste Weise bestimmen

$$m_K = \frac{S_N(1^\circ)}{S_K(1^\circ)} = \frac{\text{Naturstrecke eines Meridiangrades}}{\text{Kartenstrecke eines Meridiangrades}} \quad (5-13)$$

wobei die Naturstrecke und die Kartenstrecke in der gleichen Längeneinheit (z.B. mm) eingesetzt werden muß.

Numerisches Beispiel:

Dazu wurden die Kartenstrecken eines Meridiangrades wieder in den oben schon angeführten Altkartenbeispielen ausgemessen, so daß sich danach folgende Maßstabszahlen ergeben:

$$\text{Schlesienkarte: } m_K = \frac{111\,200\,000 \text{ mm}}{205.5 \text{ mm}} \approx 541\,000$$

$$\text{Tirolkarte: } m_K = \frac{111\,200\,000 \text{ mm}}{685 \text{ mm}} \approx 162\,000$$

Wie ersichtlich, betragen die Abweichungen gegenüber der Meilenmethode nach (5-12) für die Schlesienkarte nur -3.6%, bei der Tirolkarte +14.1%, was aber wegen des Widerspruchs in der Karte zwischen Meile und Graduierung nicht weiter verwunderlich ist. Davon abgesehen, paßt der ermittelte Maßstab der Tirolkarte aber relativ gut zu dem Maßstab 1 : 167 000, der mit genaueren Verfahren (siehe Kap. 5.1.2 bzw. Kap. 5.2) ermittelt wurde. Das läßt den Schluß zu, daß bei der Tirolkarte die Graduierung genauer kartiert wurde als die graphische Maßstabsangabe (Meilenskala).

5.1.2 Indirekte Maßstabsbestimmung

Für genauere Maßstabsberechnungen und da es in vielen Fällen auch gar nicht anders möglich ist (insbesondere bei Altkarten *ohne Graduierung und Meilenskala*), leitet man die Naturstrecken aus Karten übergeordneter Genauigkeit, also modernen Karten ab. Diese liegen gewöhnlich in einem anderen Maßstab und in einer anderen Kartenabbildung als die Altkarte vor. In vielen Fällen ist die zu untersuchende Altkarte als Plattkartenabbildung konstruiert worden. Eine moderne Karte in dieser Abbildung gibt es aber außer bei sehr kleinmaßstäbigen Erdkarten (bei Genauigkeitsuntersuchungen für Altkarten irrelevant) nicht, so daß von vorn herein eine manuelle Berechnung durch direktes Ausmessen von Kartenstrecken und Anwendung der Berechnungsformel nach (5-6) im allgemeinen ausscheidet.

Für die Berechnung der Naturstrecken werden deshalb geographische Koordinaten herangezogen, die anhand moderner Karten ermittelt wurden. Durch Multiplikation der Abbildungsgleichungen einer adäquaten Altkartenabbildung für die Einheitskugel mit dem Erdradius (R) werden kartesische Koordinaten (X, Y) im Naturmaßstab (1:1) erhalten, aus denen sich die Naturstrecken berechnen lassen. Die homologen Kartenstrecken der Altkarte werden aus den Punktkoordinaten (x, y) ermittelt, die aus einer Digitalisierung gewonnenen wurden. Damit ergeben sich folgende Formeln zur Ermittlung der Natur- und Kartenstrecken:

$$\begin{aligned} \text{Sollkoordinaten im Naturmaßstab (1:1):} \quad X &= f(\lambda, \varphi) \cdot R \\ Y &= g(\lambda, \varphi) \cdot R \end{aligned} \tag{5-14a}$$

$$\begin{aligned} \text{Naturstrecke zw. zwei Punkten (P}_i, \text{P}_j\text{): } S_N = D_{i,j} &= \sqrt{(X_i - X_j)^2 + (Y_i - Y_j)^2} \\ \text{Kartenstrecke zw. zwei Punkten (P}_i, \text{P}_j\text{): } S_K = d_{i,j} &= \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \end{aligned} \tag{5-14b}$$

Die Maßstabszahl wird dann unter Verwendung von (5-3) wie folgt ermittelt:

$$m = \frac{S_N}{S_K} = m_{i,j} = \frac{D_{i,j}}{d_{i,j}} \tag{5-14c}$$

Die Einführung der neuen Bezeichnungen für die *Naturstrecken* (D) und der *Altkartenstrecken* (d) erfolgt hier, um im folgenden Verwechslungen mit dem Buchstaben s zu vermeiden, der in der Statistik allgemein für die Bezeichnung der Schätzung der Standardabweichung benutzt wird.

Der Einfachheit halber wird des weiteren die Berechnung der Maßstabszahl mit

$$m_k = \frac{D_k}{d_k} \quad (5-15)$$

durchgeführt, wobei k der Index für eine *einzelne* Berechnungen der Maßstabszahl aus den Vergleichsstrecken zweier beliebiger homologer Punkte (P_i, P_j) darstellt.

Um einen mittleren Maßstab der Altkarte aus Einzelwerten nach dem Ansatz (5-15) zu bestimmen, gibt es verschiedene Methoden, die allerdings unterschiedliche Ergebnisse liefern und einer fachkundigen Abwägung unterzogen werden müssen, um zu einer *repräsentativen* Aussage für den Maßstab der Altkarte zu gelangen.

(a) Maßstabsbestimmung mit Hilfe des arithmetischen Mittels

In der einschlägigen Literatur über Genauigkeitsuntersuchungen für Altkarten wurde bisher ausschließlich das *arithmetische Mittel* für die Maßstabsbestimmung nach dem Vergleichsstrecken-Verfahren angeführt. Der Grund dafür liegt offensichtlich darin, daß es die einfachste Berechnung zur Schätzung eines Mittelwertes darstellt. Unverständlich ist allerdings, daß bis heute in der Fachliteratur kein Hinweis auf die *gravierende* Schwäche dieser Berechnungsart für Altkartenuntersuchungen gegeben wurde. Im wesentlichen besteht die Unzulänglichkeit darin, daß bei diesem Berechnungsverfahren (unabhängige) *gleichgenaue* Beobachtungen vorliegen müssen, die aber nachweislich, allein durch die Funktionsformel nach (5-15), schon von Grund auf nicht gegeben sind (siehe folgenden Abschnitt (b)).

Als *Beobachtungen* bezeichnet man Meßgrößen (auch: Zufallsgrößen), deren Werte durch *direkte* Messungen bestimmt werden. Bei Altkartenuntersuchungen können aber lediglich die durch manuelle Digitalisierung erfaßten Punktkoordinaten als echte Meßwerte aufgefaßt werden. Im folgenden sollen - wenn auch im statistischen Sinne nicht ganz korrekt - die aus den Koordinaten *indirekt* abgeleiteten Größen, wie z.B. Strecken, Richtungen oder wie hier die Maßstabszahlen als Beobachtungen aufgefaßt werden.

Zusätzlich hängt die Genauigkeit der Maßstabsbestimmung aber auch von der Genauigkeit der Ortspositionen in der Altkarte ab. Aufgrund der unzureichenden Meß- und Kartiermethoden der damaligen Zeit können gerade deswegen auch hier *keine* gleichgewichtigen Genauigkeiten bei den Streckenberechnungen aus Altkarten erwartet werden, da die Ortspositionen mit *unterschiedlichen* Genauigkeiten behaftet sind. Der Vollständigkeit halber wird im folgenden trotzdem auf das arithmetische Mittel eingegangen, da in diesem Zusammenhang auch standardmäßige Fehlerdefinitionen beschrieben werden können.

Die Berechnung einer *mittleren Maßstabszahl* für Altkarten mit Hilfe des arithmetischen Mittels (m_a) kann in traditioneller und Matrizenschreibweise (siehe dazu Kap. 2.1.2 (b)) folgendermaßen angegeben werden

$$m_a = \frac{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n m_k = \frac{\mathbf{e}^T \mathbf{m}}{n} = (\mathbf{e}^T \mathbf{e})^{-1} \mathbf{e}^T \mathbf{m} \quad (5-16)$$

mit

- n = Anzahl der Vergleichsstrecken
- m_k = einzelner Wert der Maßstabszahl nach (5-15)
- \mathbf{e}^T = Einsvektor: $\{1, \dots, 1\}$
- \mathbf{m}^T = Maßstabsvektor nach (5-15): $\{m_1, \dots, m_n\}$

Das arithmetische Mittel stellt den bestmöglichen Wert dar, wie er sich aufgrund des Ausgleichsverfahrens nach der Methode der kleinsten Quadrate (MkQ) für gleichgenaue normalverteilte Beobachtungen ergibt. Der Modellparameter (Maßstabszahl m_a) wird dabei so geschätzt, daß die Quadratsumme der Abweichungen (Residuen, Verbesserungen) des Mittelwertes von den Einzelbeobachtungen zum Minimum wird:

$$\mathbf{v}^T \mathbf{v} = \min \quad \text{mit} \quad \mathbf{v}^T = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \quad \text{wobei} \quad v_k = m_a - m_k \quad (5-16b)$$

Die Gesamtsumme der Residuen beläuft sich bei diesem Ansatz zu Null: $\mathbf{e}^T \mathbf{v} = 0$.

Aus den Verbesserungen (\mathbf{v}) lassen sich Genauigkeitsmaße ableiten, die zweckdienlich die Vielzahl der auftauchenden Fehler in *einer repräsentativen Maßzahl* zusammenfassen, um die Genauigkeit des Meßergebnisses in *einem* Gesamturteil abzuschätzen.

Dazu zählt in erste Linie die (empirische) **Standardabweichung**, die für eine *einmalige* Beobachtung (m_k) gilt

$$s = \sqrt{\frac{\mathbf{v}^T \mathbf{v}}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n v_k^2}{n-1}} \quad (5-16c)$$

und die **Standardabweichung des arithmetischen Mittels**:

$$s_m = \frac{s}{\sqrt{n}} \quad (5-16d)$$

Um die **Güte des Meßergebnisses** zu charakterisieren, wird gewöhnlich der *Mittelwert* mit der zugehörigen *Standardabweichung des arithmetischen Mittels* in der folgenden Form angegeben:

$$m_a \pm s_m \quad (5-16e)$$

Hier ist allerdings *Vorsicht* geboten, denn dieser Ausdruck ist nur dann leicht zu interpretieren, wenn die Beobachtungen (m_k) normalverteilt sind und die Standardabweichung relativ klein gegenüber dem Mittelwert ist (bei Altkartenuntersuchungen selten der Fall). Da die *Standardabweichung des arithmetischen Mittels* bei einer großen Anzahl (n) von Beobachtungen wesentlich kleiner als die *Standardabweichung für eine einmalige Beobachtung* ist, könnte er mißbräuchlich auch zur Vortäuschung einer *besseren* Genauigkeit benutzt werden. Um die *tatsächliche* Streuung zu charakterisieren, sollte daher neben dem Ausdruck nach (5-16e) auch die Standardabweichung nach (5-16c) zusätzlich angegeben werden.

Bei normalverteilten Beobachtungen und hinreichend großen Stichproben (n) liegen statistisch gesehen rund 2/3 der Meßwerte im Bereich:

$$m_a \pm s \quad (5-16f)$$

Anders ausgedrückt, die Standardabweichung repräsentiert mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 68%, daß bei einer *einmaligen* Beobachtung der Meßwert innerhalb des angegebenen Bereichs nach (5-16f) liegt, wobei *normalverteilte* Beobachtungen (m_k) vorausgesetzt werden.

(b) Maßstabsbestimmung mit Hilfe des gewichteten Mittels

Die Voraussetzung, daß *alle* Beobachtungen *gleich genau* sind, trifft für Maßstabsbestimmungen nach (5-13) im allgemeinen *nicht* zu, wie im folgenden gezeigt werden wird. Anstelle des arithmetischen Mittels ist es daher besser, das gewichtete Mittel heranzuziehen, das sich wie folgt berechnet (siehe auch Formel (2-11a), Kap. 2.1.2)

$$m = \frac{m_1 p_1 + m_2 p_2 + m_3 p_3 + \dots + m_n p_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n} = \frac{\sum_{k=1}^n m_k p_k}{\sum_{k=1}^n p_k} = \frac{\mathbf{p}^T \mathbf{m}}{\mathbf{e}^T \mathbf{p}} \quad (5-17a)$$

mit

- n = Anzahl der Vergleichsstrecken
- m_k = einzelner Wert der Maßstabszahl nach (5-15)
- \mathbf{e}^T = Einsvektor: $\{1, \dots, 1\}$
- \mathbf{m}^T = Maßstabsvektor nach (5-15): $\{m_1, \dots, m_n\}$
- \mathbf{p}^T = Gewichtsvektor: $\mathbf{p}^T = \{p_1, p_2 \dots p_n\}$

Der **Gewichtseinheitsfehler** (Standardabweichung *einer* Maßstabsberechnung vom Gewicht: $p = 1$) wird aus den Residuen ($v_k = m - m_k$) sowie der Gewichtsmatrix (\mathbf{P}) berechnet

$$s_0 = \sqrt{\frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{n-1}} \quad \text{mit} \quad \mathbf{P} = \begin{Bmatrix} p_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p_{nn} \end{Bmatrix} \quad (5-17b)$$

und die **Standardabweichung des gewichteten Mittels** lautet:

$$s_m = \frac{s_0}{\sqrt{\mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{e}}} = \frac{s_0}{\sqrt{\mathbf{e}^T \mathbf{p}}} \quad (5-17c)$$

Die **Standardabweichung einer beliebigen Maßstabsberechnung (m_i) vom Gewicht p_i** läßt sich wie folgt ermitteln:

$$s_{m_i} = \frac{s_0}{\sqrt{p_i}} \quad (5-17d)$$

Berechnung der Gewichte für einzelne Beobachtungen

Die Gewichte können über den in der Ausgleichsrechnung üblichen Ansatz

$$p_i = \frac{c}{s_i^2} = \frac{s_0^2}{s_i^2} \quad (5-17e)$$

definiert werden, wobei s_i die Standardabweichung einer einzelnen Beobachtung und c eine beliebige Konstante darstellt, für die gewöhnlich die *Varianz* (Quadrat des Gewichtseinheitsfehlers s_0) verwendet wird. Auf die rechnerisch theoretischen Hintergründe soll hier nicht näher eingegangen werden, da sie in jedem Lehrbuch zur Ausgleichsrechnung nachgelesen werden können [z.B.: GOTTHARDT, 1978].

Der Gewichtsansatzes nach (5-17e) besagt nichts anderes als:

*"Je kleiner der Fehler einer einzelnen Beobachtung ist,
desto größer ist das Gewicht dieser Beobachtung".*

Zur Abschätzung des Maßstabsfehlers wird von der Grundformel der Maßstabberechnung ausgegangen. Unterstellt man, daß die Naturstrecken (D) fehlerfrei sind, läßt sich durch Linearisierung und Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes auf (5-15) der zu *erwartende* Maßstabsfehler für einzelne Beobachtungen wie folgt abschätzen

$$s_{m_i} = \frac{D_i}{d_i^2} s_d = \frac{m_i}{d_i} s_d \quad (5-17f)$$

wobei s_d die Standardabweichung einer Streckenmessung in der Altkarte ist.

Danach läßt sich für die Genauigkeitsbestimmung von Maßstabberechnungen nach dem Vergleichsstreckenverfahren die *wichtige Aussage* ableiten:

"Je größer die Kartenstrecke, desto genauer die Maßstabsermittlung"

Um zu einem *praktikablen* Gewichtsansatz zu kommen, wird zunächst der Gewichtseinheitsfehler (s_0) aufgrund des Ansatzes nach (5-17f) festgelegt, in dem für m_i eine mittlere Maßstabszahl \tilde{m} und für d_i eine mittlere Kartenstrecke \tilde{d} eingesetzt wird:

$$s_0 = \frac{\tilde{m}}{\tilde{d}} s_d$$

Die Standardabweichung einer Maßstabberechnung (s_i) für eine bestimmte Kartenstrecke (d_i) kann ebenfalls nach (5-17f) abgeschätzt werden, in dem der Einfachheit halber m_i durch die mittlere Maßstabszahl \tilde{m} ersetzt wird:

$$s_i = \frac{\tilde{m}}{d_i} s_d$$

Durch Einsetzen der beiden Ausdrücke (s_0 und s_i) in (5-17e) erhält man schließlich den gesuchten Gewichtsansatz:

$$p_i = \frac{d_i^2}{\tilde{d}^2} \quad (5-17g)$$

Auf die Mittelbildung hat die Konstante \tilde{d} keinerlei Einfluß, da sie sich aus dem Formelansatz nach (5-17a) herauskürzt. Alternativ könnte deshalb auch der Gewichtsansatz $p_i = d_i^2$ verwendet werden. In diesem Fall würde sich der Gewichtseinheitsfehler s_0 auf eine Kartenstrecke von 1 mm beziehen (entspricht dem Gewicht $p_i = 1$, wenn die Dimension der Altkarten-Koordinaten in Millimetern gegeben sind). Das aber ist nicht sinnvoll, weil einerseits eine solch kleine Kartenstrecke nicht vorkommt und andererseits der Gewichtseinheitsfehler einen sehr großen Wert annimmt, der zu Irritationen führen kann. Um ihn ungefähr in der Größenordnung der Standardabweichung des arithmetischen Mittels zu halten, ist es daher besser den Ansatz (5-17g) herzunehmen.

Für die Kartenstrecke $d_i = \tilde{d}$ erhält man danach das Gewicht $p_i = 1$, so daß sich der *Gewichtseinheitsfehler* s_0 auf die *mittlere Kartenstrecke* \tilde{d} bezieht, für die man zweckmäßig *runde* Strecken (z.B.: 100 mm, 200 mm oder 500 mm) benutzt. Alternativ könnte für die mittlere Kartenstrecke auch die (gerundete) halbe Blattweite oder die halbe Diagonalstrecke des Kartenausschnittes verwendet werden, wodurch man eine gute Vorstellung von der Streuung des Maßstabs aus Kartenstrecken in dieser Größenordnung gewinnt.

(c) Optimale Streckenauswahl für die Maßstabsbestimmung

Die für eine mittlere Maßstabsbestimmung benötigte *Auswahl* von homologen Strecken beliebiger Verbindungen von jeweils zwei Punkten aus dem gesamten zur Verfügung stehenden Punktfeld, lassen sich nach verschiedenen Methoden berechnen. Ein rechen-technisch leicht zu realisierendes Verfahren wäre z.B. aus dem gesamten Punktfeld *alle möglichen Streckenkombinationen* (ohne Wiederholungen) heranzuziehen. Die daraus resultierende Anzahl der Strecken (k) läßt sich wie folgt berechnen:

$$k = \frac{n}{2}(n-1) \quad \text{mit } n = \text{Anzahl der Punkte}$$

Da für die Maßstabsbestimmung sowohl die Strecken nach der Altkarte, als auch nach der modernen Karte berechnet werden müssen, fallen $2k = n(n-1)$ Streckenberechnungen an. Für die Mittelbildung kommen nochmals n Berechnungen hinzu. Daraus folgt, daß sich bei diesem Verfahren rechen-technisch n^2 Operationen ergeben, wenn jeweils die Strecken- als auch die Maßstabsberechnung nach (5-14) als ein Rechenschritt (= eine Operation) aufgefaßt wird. Setzt man für die Anzahl der Punkte z.B. $n = 300$ an (bei Altkartenunter-suchungen durchaus normal), so ergeben sich für die Mittelbildung 90 000 Operationen. Das sind enorme Dimensionen, die sich mit weiter steigender Punktanzahl quadratisch und somit *spürbar* auf die *Rechengeschwindigkeit* auswirken.

Neben der rechenintensiven Bearbeitungszeit liegt der *gravierende Nachteil* dieser Be-rechnungsmethode aber darin, daß *keine unabhängigen Beobachtungen* vorliegen, da von jedem Punkt aus zu allen anderen Punkten (ohne Wiederholungen) die Maßstabsberechnungen erfolgen. Um unabhängige Beobachtungen zu erhalten, sollte daher bei der rechen-technischen Realisierung *ein und derselbe Punkt* nur *einmal* für eine beliebige Streckenberechnung herangezogen werden.

Diese *Einschränkung* schließt auch das sog. *Zentralpunktverfahren* aus, bei dem von einem ungefähr in der Mitte des Kartenblattes liegenden Punkt aus, strahlenförmig die Streckenverbindungen nach allen anderen Punkten bestimmt werden. Die Anzahl der Strecken ist hier deutlich geringer und berechnet zu $k = n - 1$. Obwohl der *Vorteil* dieses Verfahrens darin liegt, daß ungefähr gleichmäßig in allen Richtungen verteilte Strecken erhalten werden, wiegt der *Nachteil* aber schwerer, da wie schon angedeutet, *keine unabhängigen Beobachtungen* erzielt werden, weil die mittlere Maßstabsberechnung bei diesem Verfahren von *einem* Punkt - in diesem Fall von dem *Zentralpunkt* - abhängt.

Eine *weitere Einschränkung* betrifft die *Länge der Strecken*. Wie im vorherigen Abschnitt (b) schon ausführlich beschrieben, sollten *möglichst großen Strecken* herangezogen werden. Dies kann durch *Vorgabe einer Minimalstrecke* erreicht werden, d.h. es gehen nur solche Strecken in die Berechnung ein, die *größer* als die vorgegebene Minimalstrecke sind.

Die bisher beschriebenen Restriktionen sind für eine optimale Streckenauswahl zur mitt-leren Maßstabsbestimmung *notwendig* aber *noch nicht hinreichend*, da bei der rechen-technischen Umsetzung die Punktfolge in den Koordinatenlisten einen bedeutenden Ein-

fluß auf die Maßstabsbestimmung hat. Bei der Erfassung der Ortspositionen in Koordinatendateien geht man gewöhnlich systematisch vor (siehe Kap. 3). Das hat den Vorteil, daß bestimmte Punkte zu Überprüfungs Zwecken leicht auffindbar sind. Der Nachteil liegt in der programmiertechnischen Behandlung zur Streckenberechnung, die über *zwei* sog. verschachtelte Laufvariablen realisiert wird und ebenfalls systematisch Punkt für Punkt nach der Koordinatenliste abgearbeitet wird. Dadurch werden in der Regel *keine* über das gesamte Kartenfeld *gleichmäßig* in *allen* Richtungen verteilte Strecken erhalten, was aber gerade für eine mittlere Maßstabsbestimmung wünschenswert ist, die für beliebige Richtungen gelten soll. Vor den Streckenberechnungen sollte daher die Punktfolge der Koordinatenlisten mit Hilfe eines *Mischalgorithmus* in eine willkürliche (zufallsverteilte) Reihenfolge gebracht werden.

Rechentechisch läßt sich dieser Mischalgorithmus z.B. folgendermaßen realisieren:

- Generieren von n (=Anzahl der Punkte) *Zufallszahlen* zw. 0 und 1. Diese können z.B. mit Hilfe eines *Zufallsgenerators* berechnet werden, den die meisten Programmiersprachen und mathematischen Softwareprogramme (z.B. Mathematica, Mathcad) zur Verfügung stellen.
- Die Koordinatenlisten (Altkarte, moderne Karte) werden anschließend zeilenweise nach den zuvor ermittelten Zufallszahlen *sortiert* (auf- oder absteigend), so daß die Punktfolge nun *zufällig* über das gesamte Kartenblatt verteilt ist. Anschließende Streckenberechnungen aus aufeinander folgenden Punkten sind dadurch von der originären Erfassungsreihenfolge befreit und können somit für einen systematisch arbeitenden Rechenalgorithmus verwendet werden.

Zusammenfassend aus den oben angeführten Darlegungen, hat sich bei Genauigkeitsanalysen für Altkarten folgendes (iterative) Verfahren als sehr effizient erwiesen, um möglichst unabhängige Maßstabsberechnungen aus Streckenvergleichen zu erzielen:

1. Die Originalreihenfolge der Punkte nach den Koordinatenlisten werden mit Hilfe eines *Mischalgorithmus* in eine zufällige, über das gesamte Kartenblatt verteilte Punktfolge gebracht.
2. Ein und derselbe Punkt wird nur *einmal* für eine Streckenberechnung (Altkarte, moderne Karte) herangezogen.
3. Es werden nur Strecken berücksichtigt, die in der Altkarte *größer* als eine vorgegebene *Minimalstrecke* sind.
4. *Visualisierung* der berechneten Streckenauswahl (Streckenbild).
5. Wiederholung der Schritte 1 - 4, bis ein *optimales* Streckenbild erzielt ist.

Daraus ergibt sich durch die Anwendung des Mischalgorithmus bereits nach ein bis zwei Iterationen ein optimales Streckenbild. Um die Effizienz dieses Verfahrens zu demonstrieren, wurde exemplarisch für die weiter oben schon angeführte Tirolkarte von BURGKLEHNER eine Maßstabsberechnung aus Streckenvergleichen *mit* und *ohne* Mischalgorithmus durchgeführt. Die für die Berechnung eines mittleren Maßstabs herangezogenen Strecken sind in den Abbildungen 5.3 und 5.4 wiedergegeben und zeigen eindrucksvoll den Vorteil der Anwendung des Mischalgorithmus.

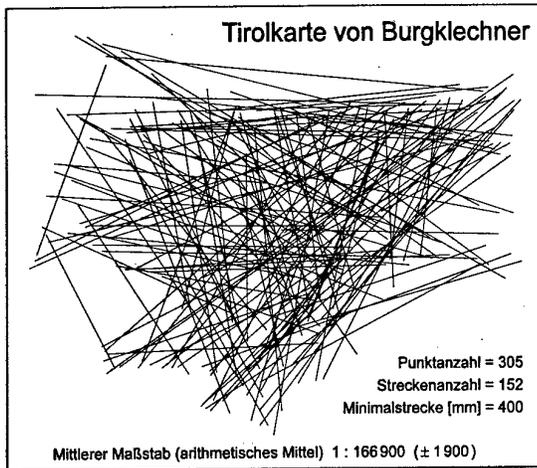


Abb. 5.3: Streckenbild mit Mischalgorithmus



Abb. 5.4: Streckenbild ohne Mischalgorithmus

(d) Schätzungen von Genauigkeitsmaßen aus Streckendifferenzen

Zur Beurteilung der Genauigkeit alter Karten können die im Zuge der Maßstabberechnung benutzten Strecken für weitere Schätzungen von Genauigkeitsmaßen herangezogen werden. Aus den *Streckendifferenzen* in Verbindung mit dem berechneten *mittleren Maßstab* der Altkarte, läßt sich der *mittlere Streckenfehler* und der *mittlere relative Maßstabsfehler* ableiten.

Der mittlere Streckenfehler

Durch Umstellung der Maßstabberechnungsformel (5-15) nach der Naturstrecke, erhält man den Ausdruck: $D_i = d_i \cdot m_i$. Diese Formel kann für den Modellansatz einer *Ausgleichung nach direkten Beobachtungen* mit der unbekanntem Maßstabszahl \bar{m} herangezogen werden (siehe auch Kap. 2.1.2). Die Verbesserungsgleichung läßt sich danach wie folgt angeben

$$v_i = d_i \cdot \hat{m} - D_i \quad (5-18a)$$

wobei v_i die (Natur-)Streckendifferenz zwischen der Modellstrecke ($d_i \cdot \hat{m}$) und der Naturstrecke (D_i) darstellt. In Matrixschreibweise lautet das Gleichungssystem:

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{l} \quad \text{mit:} \quad \mathbf{v} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{A} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{l} = \begin{Bmatrix} D_1 \\ \vdots \\ D_n \end{Bmatrix}; \quad \hat{\mathbf{x}} = \hat{m} \quad (5-18b)$$

Die unbekanntem Maßstabszahl $\hat{m} = \hat{\mathbf{x}}$ ergibt sich aus der Minimumsforderung $\mathbf{v}^T \mathbf{v} = \min$ und die allgemeine Lösung läßt sich danach wie folgt angeben:

$$\hat{m} = \hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{l} \quad (5-19a)$$

Da es sich hier aber um einen (trivialen) Sonderfall der Ausgleichung handelt (die \mathbf{A} -Matrix reduziert sich auf einen Vektor und der Lösungsvektor $\hat{\mathbf{x}}$ besteht nur aus *einer* Unbekannten), läßt sich die Berechnung der *ausgeglichenen Maßstabszahl* (\hat{m}) auch folgendermaßen angeben:

$$\hat{m} = \hat{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{A}^T \mathbf{l}}{\mathbf{A}^T \mathbf{A}} = \frac{\sum_{i=1}^n d_i D_i}{\sum_{i=1}^n d_i^2} \quad \text{mit } n = \text{Anzahl der Vergleichsstrecken} \quad (5-19b)$$

Da die Residuen nach (5-18a) Streckenabweichungen im Naturmaß darstellen, kann die **Standardabweichung** hier als **mittlerer Natur-Streckenfehler** s_D (mittlerer Streckenfehler im Naturmaß) interpretiert werden:

$$s_0 = s_D = \sqrt{\frac{\mathbf{v}^T \mathbf{v}}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n v_i^2}{n-1}} \quad (5-20a)$$

Dividiert man diesen mittleren Natur-Streckenfehler durch den ausgeglichenen Maßstab nach (5-19b), erhält man den bei Genauigkeitsuntersuchungen für Altkarten wesentlich anschaulicheren **mittleren Streckenfehler der Altkarte**, da er sich auf die Maßeinheit der Koordinaten für Altkarte bezieht (in der Regel *Millimeter*):

$$s_d = \frac{s_D}{\hat{m}} \quad (5-20b)$$

Der **Standardabweichung der ausgeglichenen Maßstabszahl** läßt sich aufgrund des Sonderfalls der Ausgleichung wie folgt angeben:

$$s_{\hat{m}} = \frac{s_0}{\sqrt{\mathbf{A}^T \mathbf{A}}} = \frac{s_D}{\sqrt{\sum_{i=1}^n d_i^2}} \quad (5-21)$$

Stellt man die Berechnungsformel für die *ausgegliche* Maßstabszahl nach (5-19b) folgendermaßen um

$$\hat{m} = \frac{\sum_{i=1}^n d_i D_i}{\sum_{i=1}^n d_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{D_i}{d_i} d_i^2}{\sum_{i=1}^n d_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i p_i}{\sum_{i=1}^n p_i} ; m_i = \frac{D_i}{d_i} ; p_i = d_i^2 \quad (5-22)$$

ergibt sich exakt die gleiche Berechnungsformel, wie für das *gewichtete Mittel der Maßstabszahl* nach (5-17a).

Die mittlere relative Standardabweichung der Maßstabszahl

Neben *absoluten* Genauigkeitsmaßen (Standardabweichung) können auch *relative* Fehlermaße angegeben werden. Diese drücken die *Abweichung von geschätzten Mittelwerten* aus und werden in der Regel in *Prozent* angegeben. Für Altkartenuntersuchungen ist dieses Fehlermaß insbesondere dann sehr sinnvoll, wenn *verschiedenen* Altkarten mit *unterschiedlichen* Maßstäben und Genauigkeiten *untereinander* verglichen werden sollen. Die *mittlere relative Standardabweichung der Maßstabszahl* kann wie folgt ausgedrückt werden:

$$\Delta s_{\hat{m}} = \frac{s_{\hat{m}}}{\hat{m}} \cdot 100\% \quad (5-23)$$

5.2 Vergleichspunkt-Verfahren

Bei diesem Verfahren wird das Punktfeld eines Ausgangssystems durch eine ausgleichende Koordinatentransformation mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate (MkQ) optimal dem

Punktfeld eines Zielsystems angepaßt. Zum Einsatz kommen hier die in Kap 2.2 detailliert beschriebene

- Ähnlichkeitstransformation
- Affintransformation

aus denen Maßstab, Drehwinkel und Genauigkeit der Altkarte abgeleitet werden können. Der bedeutende Vorteil dieses Verfahrens besteht darin, daß hier ein *eindeutiges (objektives)* Ergebnis erzielt wird und nicht wie beim Vergleichsstrecken-Verfahren *unterschiedliche (subjektive)* Ergebnisse, je nach Auswahl der verwendeten Strecken.

Transformationsrichtung:

Zur Bestimmung der Maßstabs und Genauigkeitsmaße beziehen sich die in den nachfolgenden Kapiteln 5.2.1 und 5.2.2 angegebenen Formeln (5-25) bis (5-27) darauf, daß die *Punktkoordinaten der Altkarte (x, y) in das Punktfeld des als fehlerfrei unterstellten Ziel- bzw. Soll-Koordinatensystems (Y, X) nach einer modernen Karte transformiert werden* (im folgenden kurz als "*alt-nach-neu*" bezeichnet), was der im Vermessungswesen üblichen Praxis entspricht, ein lokales (älteres) Koordinatensystem in genaueres (modernes) Landeskoordinatensystem zu überführen. Eine *umgekehrte* Transformationsrichtung ("*neu-nach-alt*") wäre zwar auch möglich, liefert aber nach der Ausgleichung spürbar *unterschiedliche* Ergebnisse. So kann z.B. für die Ähnlichkeitstransformation relativ einfach gezeigt werden, daß die ausgeglichenen Maßstabsfaktoren aus den Berechnungen *entgegengesetzter* Transformationsrichtungen sich *nicht exakt reziprok* verhalten. Der Unterschied tritt um so deutlicher hervor, je ungenauer die Altkarte ist. Zur Frage, welche Transformationsrichtung für Altkartenuntersuchungen die vertrauenswürdigeren Ergebnisse bezüglich Maßstab und Genauigkeitsmaße versprechen, besteht allerdings gegenwärtig noch Forschungsbedarf.

Allgemeine Voraussetzungen:

Sowohl das Ausgangs- als auch das Referenz-Koordinatensystem müssen zwingend in ebenen *kartesischen Koordinaten* und in *gleichen Koordinateneinheiten* (z.B. Millimeter) vorliegen. Die zu den Paßpunkten der Altkarte (x, y) homologen Punktkoordinaten des Referenzsystems (X, Y) werden aus den *geographischen* Referenz-Koordinaten (λ, φ) mit Hilfe einer zur Altkarte *adäquaten Kartenabbildung* (z.B. die *rechteckige Plattkarte*; siehe dazu Kap. 4) und einem *vorzugebenden Maßstabsfaktor* (\bar{m}_0) nach der Formel (4-1) berechnet:

$$\begin{aligned} X &= f(\lambda, \varphi) \cdot \bar{m}_0 \\ Y &= g(\lambda, \varphi) \cdot \bar{m}_0 \end{aligned} \quad \text{mit: } \bar{m}_0 = \frac{R}{m_0} \quad (5-24)$$

Dabei ist R der *mittlere Erdradius* nach (5-7) in Koordinateneinheiten des Ausgangssystems (Altkarte) und m_0 eine *frei wählbare* Maßstabszahl, also z.B. ein Näherungswert für die Maßstabszahl der Altkarte, der aus Voruntersuchungen schon bekannt ist. Der Einfachheit halber kann $m_0 = 1$ gesetzt werden, wobei u.U. aber Rechenunschärfen auftreten können.

Da die Wahl von m_0 einen bestimmenden Einfluß auf die Ausgleichungsergebnisse hat, müssen noch einfache Modifikationen vorgenommen werden, um zu einer endgültigen Maßstabs- und Genauigkeitsbestimmung der Altkarte zu gelangen. Auf die Berechnung des Drehwinkels hat m_0 keinen Einfluß, so daß in den folgenden Ausführungen darauf nicht eingegangen wird. Die entsprechenden Formeln dazu entnehme man den Kapiteln 2.2.2 (*Ähnlichkeitstransformation*) und 2.2.3 (*Affintransformation*). Auch auf die Translationsparameter wird hier nicht weiter eingegangen, da sie bei Genauigkeitsuntersuchungen für Altkarten nicht von Bedeutung sind.

5.2.1 Maßstabs- und Genauigkeitsbestimmung mit Hilfe der Ähnlichkeitstransformation

Die ausgleichende Ähnlichkeitstransformation sollte vornehmlich dann angewendet werden, wenn man für die Altkarte *einen*, für die gesamte Karte repräsentativen (globalen) Maßstab bestimmen will. Für das *vorgegebene Referenz-Koordinatensystem* mit der *Maßstabzahl* m_0 nach (5-24) liefert die Ähnlichkeitstransformation ("alt-nach-neu") *zunächst*:

\bar{m} Ausgeglicherer Maßstabsfaktor nach (2-15)

$s_{\bar{m}}$ Standardabweichung des Maßstabsfaktors nach (2-18e) bzw. (2-18f)

s_0 Mittlerer Betrag der Restklaffungen in den Koordinatenrichtungen nach (2-16a)

s_p Mittlerer Punktfehler nach (2-16c)

Daraus ergibt sich die gesuchte **Maßstabzahl und ihre Standardabweichung**:

$$m = m_0 \cdot \bar{m} \quad (5-25a)$$

$$s_m = m_0 \cdot s_{\bar{m}} \quad (5-25b)$$

Für $m_0 = 1$ - die Referenz-Koordinaten nach (5-24) liegen dann im *Naturmaß* vor - gehen der Maßstabsfaktor und seine Standardabweichung *direkt* in die Maßstabzahl und ihre Standardabweichung über:

$$\begin{aligned} m &= \bar{m} \\ s_m &= s_{\bar{m}} \end{aligned} \quad \text{für: } m_0 = 1 \quad (5-25c)$$

Die Genauigkeitsmaße s_0 und s_p sind ebenfalls von m_0 abhängig und drücken z.B. für $m_0 = 1$ die Genauigkeiten in *Naturmaßen* wieder. Generell beziehen sich diese Fehlermaße wie oben schon erwähnt auf das Referenz-Koordinatensystem mit der Maßstabzahl m_0 nach (5-24). Um sie auf die Altkarte mit dem ausgeglichenen Kartenmaßstab $1 : m$ nach (5-25a) umzurechnen, müssen sie dann noch mit dem Faktor $(m_0 / m) = (1 / \bar{m})$ multipliziert werden. Danach läßt sich der *mittlere Betrag der Restklaffungen in Richtung Koordinatenachsen und der mittlere Punktfehler für die Altkarte* wie folgt angeben:

$$\begin{aligned} s_0^{Altkarte} &= \frac{s_0}{\bar{m}} = \sqrt{\frac{\mathbf{v}^T \mathbf{v}}{\bar{m}^2}} \\ s_p^{Altkarte} &= \frac{s_p}{\bar{m}} = s_0^{Altkarte} \sqrt{2} \end{aligned} \quad (5-26)$$

5.2.2 Maßstabs- und Genauigkeitsbestimmung mit Hilfe der Affintransformation

Die ausgleichende Affintransformation kann bei Altkartenuntersuchungen immer dann angewendet werden, wenn man *getrennte* Maßstabs- und Genauigkeitsbestimmungen in Richtung der Hauptachsen durchführen will. Neben der Ähnlichkeitstransformation erhält man damit weitere Ergebnisse und Genauigkeitsaussagen, die zur Gesamtbeurteilung der Altkarte herangezogen werden können.

Die dazu notwendigen Berechnungen können nach den Formeln (5-25) und (5-26) für die Ähnlichkeitstransformation abgeleitet werden, da sie sich nur durch die Trennung der Ergebnisse nach den Hauptachsenrichtungen unterscheiden. Die Affintransformation ("alt-nach-neu") liefert zunächst für das vorgegebene Referenz-Koordinatensystem im Maßstab $1 : m_0$:

\bar{m}_x, \bar{m}_y	Ausgeglichene Maßstabsfaktoren in x- und y-Richtung: für die 6-Parameter-Affintransformation nach (2-19f) für die 5-Parameter-Affintransformation nach (2-21e)
$s_{\bar{m}_x}, s_{\bar{m}_y}$	Standardabweichung der Maßstabsfaktoren in x- und y-Richtung: für die 6-Parameter-Affintransformation nach (2-20g) bzw. (2-30k) für die 5-Parameter-Affintransformation nach (2-22c)
s_0	Mittlerer Betrag der Restklaffungen in den Richtungen der Koordinatenachsen: für die 6-Parameter-Affintransformation nach (2-20a) für die 5-Parameter-Affintransformation nach (2-22a)
s_x, s_y	Mittlerer Betrag der Restklaffungen in Richtung der x- bzw. y-Achse für die 6-Parameter-Affintransformation nach (2-20b) und (2-20c) für die 5-Parameter-Affintransformation nicht definiert
s_p	Mittlerer Punktfehler: für die 6-Parameter-Affintransformation nach (2-20d) für die 5-Parameter-Affintransformation nach (2-22b)

Die Umrechnung auf die Altkarte erfolgt für die 6- und 5-Parameter-Affintransformation allgemein nach den folgenden Formeln, wobei die jeweiligen Ausgleichungsergebnisse der beiden Affintransformationen nach den oben stehenden Formelverweisen einzusetzen sind. Danach ergeben sich für die Altkarte

Maßstabszahlen und ihre Standardabweichung:

$$\begin{aligned} m_x &= m_0 \cdot \bar{m}_x & s_{m_x} &= m_0 \cdot s_{\bar{m}_x} \\ m_y &= m_0 \cdot \bar{m}_y & s_{m_y} &= m_0 \cdot s_{\bar{m}_y} \end{aligned} \quad (5-26a)$$

wobei für $m_0 = 1$ die folgen einfachen (direkten) Ausdrücke erhalten werden:

$$\begin{aligned} m_x &= \bar{m}_x & s_{m_x} &= s_{\bar{m}_x} \\ m_y &= \bar{m}_y & s_{m_y} &= s_{\bar{m}_y} \end{aligned} \quad (5-26b)$$

Mittlerer Betrag der Restklaffungen in den Koordinatenrichtungen:

$$s_0^{\text{Altkarte}} = \sqrt{\frac{\mathbf{u}^T \mathbf{u} + \mathbf{w}^T \mathbf{w}}{\bar{m}_x^2 + \bar{m}_y^2}} \quad \text{mit: } \mathbf{u} = \begin{cases} 6 & \text{für die 6-P-Affintransformation} \\ 5 & \text{für die 5-P-Affintransformation} \end{cases} \quad (5-27a)$$

(\mathbf{u} und \mathbf{w} stellen dabei die Verbesserungsvektoren in x- bzw. y-Richtung dar. Bei der 5-Parameter-Transformation können sie durch Aufspaltung in x- und y- Anteile aus dem Verbesserungsvektor $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$ erhalten werden.)

Mittlere Punktfehler:

$$s_p^{\text{Altkarte}} = s_0^{\text{Altkarte}} \sqrt{2} \quad (5-27b)$$

Die *mittleren Beträge der Restklaffungen in Richtung der x- bzw. y-Achse für die Altkarte* nach der 6-Parameter-Transformation können mit folgenden Formeln berechnet werden:

$$s_x^{\text{Altkarte}} = \frac{s_x}{\overline{m}_x} \quad s_y^{\text{Altkarte}} = \frac{s_y}{\overline{m}_y} \quad (5-27c)$$

5.3 Weitere Methoden zur Genauigkeitsbestimmung

Neben den bisher beschriebenen Verfahren, sollen hier noch einige weitere Möglichkeiten zur Beurteilung der Genauigkeit von Altkarten behandelt werden, auf die - teilweise zwar angesprochen - aber nicht näher eingegangen worden sind. Dazu zählt neben der *Orientierung* und deren Genauigkeit vor allem die Frage, wie zuverlässig die *Graduierung im Kartenrahmen* im Vergleich zu den Ortspositionen der Altkarte (Karteninhalt) ist. Darüber hinaus werden noch einige Aspekte zur Problematik der Genauigkeitsbestimmung von Teilgebieten angesprochen

5.3.1 Orientierungsabweichung

Die Orientierung und deren Genauigkeit einer Altkarte stellt neben der Maßstabsbestimmung ein weiteres Kriterium zur Gesamtbeurteilung dar. Der in der Literatur häufig benutzte Begriff *Genauigkeit der Orientierung* (auch: Orientierungsfehler oder Azimutfehler), ist irreführend, da hierunter *nicht die Standardabweichung* der (absoluten) Orientierung gemeint ist, sondern die *Abweichung der geographischen Nordrichtung* einer Altkarte von der *wahren geographischen Nordrichtung* moderner Karten. In den folgenden Ausführungen wird daher durchgehend der Begriff *Orientierungsabweichung* verwendet.

Zur Berechnung der Orientierungsabweichung lassen sich im wesentlichen *zwei Verfahren* anführen. Das erste geht auf einen *Vergleich der Richtungen* homologer Strecken im Ausgangs- und Referenzsystem zurück. Beim zweiten Verfahren wird die Orientierungsabweichung mittels einer *ausgleichenden Koordinatentransformation* über Vergleichspunkte bestimmt.

(a) Bestimmung der Orientierungsabweichung über Vergleichsrichtungen

Bei dieser Methode können die zu vergleichenden Richtungen entweder aus *geographischen* oder *kartesischen* Koordinaten bestimmt werden. Ein wichtiger Aspekt ist hierbei die Auswahl der zur Richtungsbestimmung herangezogenen Punkte. Hier sollte das gleiche Verfahren angewendet werden, wie es im Kap. 5.1.2, Abschnitt (c): *Optimale Streckenauswahl für die Maßstabsbestimmung* beschrieben ist. Zudem ist es rechentechnisch gesehen von Vorteil, im Zuge der Maßstabsbestimmung aus Streckenvergleichen gleichzeitig die Berechnung der Richtungswinkel durchzuführen.

Bestimmung der Orientierungsabweichung aus geographischen Koordinaten

Der *Winkel gegen die geographische Nordrichtung* wird bekanntlich als *geographisches Azimut* bezeichnet. Auf der Erdkugel entspricht das Azimut dem Winkel, den ein Großkreis mit einem Meridian im Schnittpunkt bildet. Gezählt wird das Azimut - ausgehend vom Meridian - positiv im Uhrzeigersinn.

Die Bestimmung des geographischen Azimuts auf einer für Altkartenuntersuchungen ausreichend genauen Kugeloberfläche erfolgt mit Hilfe der sphärischen Trigonometrie über den Sinus- und Seitencosinussatz. Danach läßt sich der Azimutwinkel (α_i) von einem Ausgangspunkt $P_0(\lambda_0, \varphi_0)$ zu einem beliebigen Zielpunkt $P_i(\lambda_i, \varphi_i)$ - unter strenger Beachtung der Quadrantenregel bei Winkelfunktionen - wie folgt berechnen:

$$\alpha_i = \arcsin\left(\frac{\sin(\Delta\lambda_i) \cdot \cos(\varphi_i)}{\sin(\delta_i)}\right)$$

mit $\Delta\lambda_i = \lambda_i - \lambda_0$ (5-28)

und $\delta_i = \arccos(\sin(\varphi_0) \cdot \sin(\varphi_i) + \cos(\varphi_0) \cdot \cos(\varphi_i) \cdot \cos(\Delta\lambda_i))$

Zur Bestimmung der **Orientierungsabweichung aus einer einzelnen Differenz** ($\Delta\alpha_i$) berechnet man das Azimut nach (5-28) über homologe Punkte sowohl im Ausgangssystem (α_i^A) als auch im Ziel- bzw. Referenzsystem (α_i^Z) und bildet:

$$\Delta\alpha_i = \alpha_i^A - \alpha_i^Z \quad (5-29)$$

Die **mittlere Orientierungsabweichung** und deren Standardabweichung können dann mit Hilfe des **arithmetischen Mittels** nach (2-12) oder des **gewichteten arithmetischen Mittels** nach (2-11) berechnet werden, wobei im letzteren Fall der streckenabhängige Gewichtsansatz nach der Formel (5-17g) eingesetzt werden kann (siehe Kap. 5.1.2, Abschnitt (b)).

Das Problem bei der Anwendung von (5-29) besteht in der Berechnung der Azimute (α_i^A) in der Altkarte, da die geographischen Koordinaten der Ortspositionen in der Regel *nicht bekannt* sind. Unter der Voraussetzung, daß eine *Graduierung* im Kartenrahmen der Altkarte vorliegt, können diese aber *indirekt* aus den kartesischen Punktkoordinaten abgeleitet werden. Auf die Berechnungen soll hier nicht weiter eingegangen werden, da sie detailliert im folgenden Kap. 5.3.2 beschrieben sind. Die Ergebnisse sind allerdings mit einer starken Unsicherheit behaftet, falls sich herausstellen sollte, daß der Karteninhalt mit dem Kartenrahmen schlecht zusammenpaßt.

Bestimmung der Orientierungsabweichung aus kartesischen Koordinaten

Wie schon bei der Maßstabsbestimmung aus Streckenvergleichen detailliert dargelegt (siehe Kap. 5.1), ist es auch hier *zwingend* erforderlich, die geographischen Referenzkoordinaten mit einer zur Altkarte *adäquaten Kartenabbildung* (z.B. die quadratische Plattkarte) in kartesische Koordinaten zu übertragen. Nur dadurch erhält man ein *vergleichbares* Ausgangs- und Referenzsystem, in denen sich abbildungsspezifische Verzerrungen *gleich* verhalten.

Die im folgenden angeführten Formel gelten prinzipiell für *nordorientierte* Altkarten. Bei süd-, west- oder ostorientierten Altkarten ist es empfehlenswert, vorab eine einfache Koordinatentransformation in die Nordrichtung vorzunehmen (siehe Kap. 2.2.1: *Einfache Drehung eines Koordinatensystems*), da man bei der rechnerischen Realisierung aufwendige Abfragen bezüglich der Quadrantenregelung bei nicht nordorientierten Altkarte umgehen kann.

In einem *kartesischen* Koordinatensystem mit *mathematischer* Orientierung wird der **Richtungswinkel** (t_i) zwischen zwei Punkten P_j und P_k wie folgt berechnet

$$t_i = t_{j,k} = \arctan\left(\frac{x_k - x_j}{y_k - y_j}\right) \quad (5-30)$$

wobei die Quadrantenregel der Tangensfunktion zwingend beachtet werden muß, da sich alle möglichen Richtungen in einem Vollkreis (360°) ergeben können. Die **Orientierungsabweichung aus einer einzelnen Differenz** ergibt sich dann aus

$$\Delta t_i = t_i^A - t_i^Z$$

mit

t_i^A Richtungswinkel zwischen zwei Punkten im Ausgangssystem

t_i^Z Richtungswinkel zwischen zwei Punkten im Ziel- bzw. Referenzsystem

(5-31)

Die **mittlere Orientierungsabweichung** und deren Standardabweichung können entweder über das *arithmetische Mittel* oder das *gewichtete arithmetische Mittel* berechnet werden.

Der Richtungswinkel nach (5-30) ist *nicht* identisch mit dem geographischen Azimut nach (5-28). Von daher gesehen stellt sich die Frage, ob die *geographische* Orientierungsabweichung nach (5-29) gleichbedeutend mit der *kartesischen* Orientierungsabweichung nach (5-31) ist. Liegen sowohl das Ausgangssystem als auch das Referenzsystem in *gleicher Kartenabbildung* vor, werden die Richtungswinkel in diesen beiden kartesischen Koordinatensystemen um den *gleichen Betrag* zum wahren geographischen Azimut verdreht, der bei einer Differenzbildung nach (5-31) wieder herausfällt. Das gilt streng genommen nur dann, wenn die Punktkoordinaten beider Koordinatensysteme gleich genau sind. Bei Altkartenuntersuchungen ist das aber erwartungsgemäß nicht der Fall. Unterstellt man, daß die Abweichungen *zufälliger* Natur sind, stimmen die *geographische* und die *kartesische Orientierungsabweichung* ungefähr überein ($\Delta t \approx \Delta \alpha$).

(b) Bestimmung der Orientierungsabweichung über Vergleichspunkte

Bessere und vertrauenswürdigeren Aussagen über die Orientierungsabweichung und deren Standardabweichung gewinnt man, wenn das Punktfeld des Ausgangssystems (Altkarte) durch eine (ausgleichende) Koordinatentransformation (siehe Kap. 2.2) optimal dem homologen Punktfeld des Referenzsystems (moderne Karte) angepaßt wird. Im folgenden soll die Bestimmung der Orientierungsabweichung anhand der Ähnlichkeits- und Affintransformation beschrieben werden. Auch hier empfiehlt es sich, wenn die Koordinaten des Ausgangssystems (Altkarte) nicht nordorientiert vorliegen, vorab eine einfache Koordinatentransformation (siehe Kap. 2.2.1) in die Nordrichtung vorzunehmen.

Bestimmung der Orientierungsabweichung aus der Ähnlichkeitstransformation

Der aus der Ausgleichung abgeleitete Drehwinkel α nach (2-15b) gibt die Verdrehung des Ausgangssystems gegenüber dem Referenzsystem an und ist *positiv gegen den Uhrzeigersinn* (mathematische Orientierung) definiert. Der Richtungswinkel nach (5-30) wird aber wie beim geographischen Azimut nach (5-28) *positiv im Uhrzeigersinn* gezählt, also entgegengesetzt. Daraus ergibt sich für die Orientierungsabweichung:

$$\Delta t = -\alpha \quad (5-32)$$

Die *Standardabweichung* wird nach (2-18f) berechnet.

Bestimmung der Orientierungsabweichung aus der Affintransformation

Bei der normalen **6-Parameter-Affintransformation** stehen die Hauptachsen nicht senkrecht aufeinander, so daß sich für jede Hauptachse ein eigener Drehwinkel nach (2-19f) ergibt. Die

Orientierungsabweichung entspricht direkt dem Drehwinkel α_y , da beide im gleichen Drehsinn definiert sind:

$$\Delta t = \alpha_y \quad (5-33)$$

Die *Standardabweichung* ergibt sich aus (2-20k).

Der bei der 6-Parameter-Affintransformation noch anfallende Drehwinkel α_x ist positiv gegen den Uhrzeigersinn definiert und kann als *Verschwenkung der Breitenkreise* interpretiert werden.

Für die **5-Parameter-Affintransformation** gilt Formel (5-32), da hier wie bei der Ähnlichkeitstransformation nur *ein* Drehwinkel nach (2-21e) bestimmt wird. Die *Standardabweichung* wird nach (2-22c) in Verbindung mit (2-22a) berechnet.

5.3.2 Die Zuverlässigkeit der Graduierung im Kartenrahmen

Bei Untersuchungen von Altkarten, die im *Kartenrahmen mit einer Graduierung* versehen sind, stellt sich häufig die Frage, ob der Karteninhalt mit Hilfe des Kartenrahmens als Konstruktionsgrundlage kartiert oder ob der Karteninhalt auf andere Weise erstellt und der Kartenrahmen mit der Graduierung nachträglich angefertigt wurde. Die Berechnungsverfahren hierzu sollen Gegenstand der folgenden Ausführungen sein.

Zur Beurteilung der Zuverlässigkeit der Graduierung vergleicht man die Ortspositionen im geographischen Referenzsystem mit den homologen geographischen Punktkoordinaten in der Altkarte, die aus der Graduierung im Kartenrahmen *aber erst abgeleitet werden müssen*. Dies kann *manuell-graphisch* oder *rechnerisch* gelöst werden. Die manuelle Methode ist zwar einfach, aber erwartungsmäßig auch fehleranfällig und vor allem wegen der bei Altkartenuntersuchungen anfallenden vielen Punkte sehr zeitaufwendig. Wesentlich genauer und rationeller ist daher das rechnerische Verfahren.

(a) Rechnerische Ermittlung von geographischen Punktkoordinaten in Altkarten

Da man im allgemeinen davon ausgehen muß, daß die Kartenbegrenzungslinien (Abgrenzung vom inneren Kartenfeld) in Altkarten mehr oder weniger in *schiefwinkliger Form* vorliegen, soll hier zur Ableitung der geographischen Koordinaten exemplarisch der Verfahrensweg mit Hilfe der *bilinearen Transformation* und deren *Umkehrung* (siehe Kap. 2.2.4) beschrieben werden:

1. Im Zuge der *digitalen Erfassung* (Digitalisierung) der Punktkoordinaten in der Altkarte werden *zusätzlich* die im Kartenrahmen angegebenen geographischen Netzkoordinaten auf der Kartenbegrenzungslinie miterfaßt. Dazu werden *zumindest* die *vier Blattecken* der Altkarte benötigt. Darüber hinaus können aber zur Steigerung der Genauigkeit noch weitere im Kartenrahmen angegebene (runde) geographische Netzpunkte mit aufgenommen werden.
2. Über den folgenden Ansatz mit *m Paßpunkten im Kartenrahmen* werden die acht Parameter *a* und *b* der (ausgleichenden) *bilinearen Transformation* nach (2-23) berechnet:

$$\begin{aligned} x'_i &= a_1 + a_2 \lambda'_i + a_3 \varphi'_i + a_4 \lambda'_i \varphi'_i \\ y'_i &= b_1 + b_2 \lambda'_i + b_3 \varphi'_i + b_4 \lambda'_i \varphi'_i \end{aligned} \quad i = 1 \dots m; m \geq 4$$

wobei

$\lambda'_i, \varphi'_i \dots$ Ausgangssystem: geogr. Koord. der Paßpunkte im Kartenrahmen
 $x'_i, y'_i \dots$ Zielsystem: kartesische Koord. der Paßpunkte im Kartenrahmen

3. Inverse bilineare Transformation nach (2-30):

Für die Ermittlung der geographischen Ortskoordinaten sind für *jeden* zu transformierenden, digital erfaßten Punkt im *Kartenfeld der Altkarte* (x, y) die folgenden drei Berechnungsschritte notwendig:

3.1 Berechnung der (Funktions-)Koeffizienten nach (2-30d):

$$\begin{aligned} A &= b_2 a_4 - a_2 b_4 \\ B(x, y) &= b_2 a_3 - a_2 b_3 + b_1 a_4 - a_1 b_4 + b_4 x - a_4 y \\ C(x, y) &= b_1 a_3 - a_1 b_3 + b_3 x - a_3 y \\ D &= b_3 a_4 - a_3 b_4 \\ E(x, y) &= b_3 a_2 - a_3 b_2 + b_1 a_4 - a_1 b_4 + b_4 x - a_4 y \\ F(x, y) &= b_1 a_2 - a_1 b_2 + b_2 x - a_2 y \end{aligned}$$

3.2 Berechnung der Lösungspaare der quadratischen Gleichungen nach (2-30e):

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{-B(x, y) \pm \sqrt{B(x, y)^2 - 4 \cdot C(x, y)}}{2 \cdot A} \\ \varphi_{1,2} &= \frac{-E(x, y) \pm \sqrt{E(x, y)^2 - 4 \cdot F(x, y)}}{2 \cdot D} \end{aligned}$$

3.3 Die Fallunterscheidung nach (2-30f) ergibt die gesuchten geogr. Koordinaten:

$$\tilde{\lambda}, \tilde{\varphi} = \begin{cases} \lambda_1, \varphi_1 & \text{wenn: } (\lambda'_{\min} \leq \lambda_1 \leq \lambda'_{\max}) \wedge (\varphi'_{\min} \leq \varphi_1 \leq \varphi'_{\max}) \\ \lambda_1, \varphi_2 & \text{wenn: } (\lambda'_{\min} \leq \lambda_1 \leq \lambda'_{\max}) \wedge (\varphi'_{\min} \leq \varphi_2 \leq \varphi'_{\max}) \\ \lambda_2, \varphi_1 & \text{wenn: } (\lambda'_{\min} \leq \lambda_2 \leq \lambda'_{\max}) \wedge (\varphi'_{\min} \leq \varphi_1 \leq \varphi'_{\max}) \\ \lambda_2, \varphi_2 & \text{wenn: } (\lambda'_{\min} \leq \lambda_2 \leq \lambda'_{\max}) \wedge (\varphi'_{\min} \leq \varphi_2 \leq \varphi'_{\max}) \end{cases}$$

wobei

$$\begin{aligned} \lambda'_{\min} &= \min(\lambda'_1 \dots \lambda'_m) & \lambda'_{\max} &= \max(\lambda'_1 \dots \lambda'_m) \\ \varphi'_{\min} &= \min(\varphi'_1 \dots \varphi'_m) & \varphi'_{\max} &= \max(\varphi'_1 \dots \varphi'_m) \end{aligned}$$

(b) Berechnung der mittleren Verschiebung in Meridian- und Breitenkreisrichtung

Sind die geographischen Ortspositionen der Altkarte nach Abschnitt (a) bestimmt, kann der Vergleich mit den geographischen Referenzkoordinaten durchgeführt werden. Dazu ermittelt man zunächst für jedes homologe Punktpaar die Differenzen:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_i &= \varphi_i - \tilde{\varphi}_i \\ \Delta\lambda_i &= \lambda_i - \tilde{\lambda}_i \end{aligned} \quad i = 1 \dots n; \quad n = \text{Anzahl der Punkte} \quad (5-34)$$

wobei λ_i, φ_i die Referenzkoordinaten und $\tilde{\lambda}_i, \tilde{\varphi}_i$ die nach Abschnitt (a) berechneten geographischen (Ist)Koordinaten der Altkarte auf der Basis des Kartenrahmens sind.

Mittlere Verschiebung in Meridianrichtung

Das arithmetische Mittel aus den Differenzen der geographischen Breiten nach (5-34) ergibt die *mittlere Verschiebung in Meridianrichtung*:

$$\Delta\bar{\varphi} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta\varphi_i \tag{5-35a}$$

Der theoretische Erwartungswert (E) für $\Delta\bar{\varphi}$ ist der Ausgangspunkt (Nullpunkt) der geographischen Breitenzählung *in der Altkarte* ($\tilde{\varphi}_0$), der identisch mit der heutigen Festlegung durch den Äquator ($\varphi_0 = 0$) ist:

$$E(\Delta\bar{\varphi}) = \tilde{\varphi}_0 = \varphi_0 = 0 \tag{5-35b}$$

Wegen der bei Altkarten generell zu erwartenden Ungenauigkeiten wird man i.d.R. $\Delta\bar{\varphi} \approx 0$ erhalten, in machen Fällen auch deutlich von Null abweichend. Die Verschiebung in Meridianrichtung nach (5-35a) entspricht einem *konstanten systematischen Fehleranteil*, dessen Ursache in der Ableitung der geographischen Ist-Koordinaten aus der Graduierung im Kartenrahmen der Altkarte liegt. Die anfangs gestellte Frage, ob der Karteninhalt auf der Basis des Kartenrahmens kartiert oder ob der Kartenrahmen nachträglich angehängt wurde, kann - hier zunächst nur in Meridianrichtung - über folgende Fallunterscheidungen beurteilt werden:

- Liegt die mittlere Verschiebung ungefähr beim Erwartungswert Null ($\Delta\bar{\varphi} \approx 0$), paßt der Karteninhalt - und damit auch der Kartenrahmen in Meridianrichtung - mehr oder weniger gut zu den geographischen Referenzkoordinaten. In diesem Fall kann daher vermutet werden, daß der Karteninhalt auf der Grundlage des Kartenrahmens erstellt wurde.
- Liegt dagegen eine *deutlich* von Null abweichende mittlere Verschiebung vor ($|\Delta\bar{\varphi}| \gg 0$), kann zwar vermutet werden, daß der Kartenrahmen unabhängig von der Kartierung der Ortspositionen im Kartenfeld erstellt wurde. Eine gesicherte Aussage darüber läßt sich aber nicht ableiten. So könnte z.B. die Bezifferung der runden geographischen Grad- und Minutenangaben im Kartenrahmen (Graduierung) aufgrund von unfachmännischen Übertragungsfehlern entstanden sein.

Genauigkeitsschätzung:

Mit den Verbesserungen (der konstante Fehleranteil wird dabei eliminiert)

$$v_i = \Delta\bar{\varphi} - \Delta\varphi_i \tag{5-36a}$$

ergibt sich für die *Standardabweichung* einer beliebigen Differenz $\Delta\varphi_i$ nach (5-34) bzw. da die geographischen Referenzkoordinaten als *fehlerfrei* angesehen werden können: Standardabweichung einer beliebigen nach Abschnitt (a) berechneten geographischen Breite ($\tilde{\varphi}_i$)

$$s_{0_{\tilde{\varphi}}} = \sqrt{\frac{\mathbf{v}^T \mathbf{v}}{n-1}} \quad ; \quad \mathbf{v} = \{v_1, v_2 \dots v_n\} \tag{5-36b}$$

und für die *Standardabweichung des arithmetischen Mittels* ($\Delta\bar{\varphi}$) bzw. des konstanten systematischen Fehleranteils:

$$s_{\Delta\bar{\varphi}} = \frac{s_{0_{\tilde{\varphi}}}}{\sqrt{n}} \tag{5-36c}$$

Mittlere Verschiebung in Breitenkreisrichtung

Das arithmetische Mittel aus den Differenzen der geographischen Längen nach (5-34) ergibt die *mittlere Verschiebung in Breitenkreisrichtung*:

$$\Delta\bar{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta\lambda_i \quad (5-37a)$$

Dabei werden die geographischen Längen - ausgehend vom jeweiligen Nullmeridian - in östlicher Richtung *negativ* und in westlicher Richtung *positiv* gezählt.

Anders als bei den geographischen Breiten, gilt für den Erwartungswert von $\Delta\bar{\lambda}$

$$E(\Delta\bar{\lambda}) = \tilde{\lambda}_0 - \lambda_0 = \tilde{\lambda}_0 \neq 0 \quad (5-37b)$$

wobei $\lambda_0 = 0$ der heutige Nullmeridian (Sternwarte bei Greenwich/London) und $\tilde{\lambda}_0$ der Nullmeridian in der Altkarte (bezogen auf Greenwich) ist.

Schon in der Antike wählte man als Ausgangspunkt der geographischen Längenzählung einen Meridian, der das westlichste Ende der damals bekannten Welt (vermutlich die Kanarischen Inseln) kennzeichnen sollte. Mit den damaligen Meßmethoden war aber keine genaue Längenbestimmung möglich. Erst im Jahre 1634 wurde in Frankreich durch königlichen Erlaß (LUDWIG XIII.) der Längengrad durch die Sternwarte von Paris für alle französischen Karten verbindlich auf den fiktiven Wert 20° *östlich von Ferro* (westlichste der Kanarischen Inseln; heute: *El Hierro*) gesetzt. Da der Längenunterschied zwischen Paris und Greenwich aus modernen Vermessungen bekannt ist ($2^\circ 21' 20''$), kann als Wert für den Nullmeridian in Altkarten $17^\circ 39' 40''$ westlich von Greenwich ab 1634 angenommen werden, der aber streng gesehen nicht durch Ferro/El Hierro, sondern ca. 20 km östlich davon verläuft. Für Altkarten, die in der Nachfolgezeit außerhalb Frankreichs entstanden, kann zwar vermutet werden, daß sie sich auf diesen Wert bezogen haben, sicher kann man aber nicht sein. Für Altkarten, die vor 1634 entstanden, bleibt der Nullmeridian unbestimmt.

Die *mittlere Verschiebung in Breitenkreisrichtung* nach (5-37a) und (5-37b) entspricht daher nur einer *Schätzung für den Nullmeridian der vorliegenden Altkarte*. Eine Aussage über die absolute Verschiebung der Graduierung im Kartenrahmen gegen den Karteninhalt in West-Ost-Richtung ist folglich nicht möglich. Es kann lediglich die Differenz zu einem *vermuteten* Wert des Nullmeridians der Altkarte (also z.B. Ferro / El Hierro: $17^\circ 39' 40''$) angegeben werden. Abweichungen bis zu 5° stellen dabei keine Seltenheit dar.

Genauigkeitsschätzung:

Mit den Verbesserungen (der konstante Anteil wird dabei eliminiert)

$$w_i = \Delta\bar{\lambda} - \Delta\lambda_i \quad (5-38a)$$

ergibt sich für die *Standardabweichung* einer beliebigen nach Abschnitt (a) berechneten geographischen Länge ($\tilde{\lambda}_i$)

$$s_{0_{\tilde{\lambda}_i}} = \sqrt{\frac{\mathbf{w}^T \mathbf{w}}{n-1}} \quad ; \quad \mathbf{w} = \{w_1, w_2 \dots w_n\} \quad (5-38b)$$

und für die *Standardabweichung des arithmetischen Mittels* ($\Delta\bar{\lambda}$) bzw. des Nullmeridians $\tilde{\lambda}_0$ der Altkarte:

$$s_{\Delta\bar{\lambda}} = s_{\tilde{\lambda}_0} = \frac{s_{0\tilde{\lambda}}}{\sqrt{n}} \quad (5-38c)$$

5.4 Zur Genauigkeitsbestimmung von Teilgebieten

Bei den bisher beschriebenen Verfahren zur Maßstabs- und Genauigkeitsbestimmung ist allgemein davon ausgegangen worden, daß sich die Untersuchungen auf das Gesamtgebiet der Altkarte beziehen. Zur Schätzung von Maßzahlen und Genauigkeiten in Teilgebieten einer zu untersuchenden Altkarte (*regionale Genauigkeitsbestimmung*) können diese Verfahren gleichermaßen verwendet werden.

Eine Aufteilung in mehrere Teilgebiete ist insbesondere dann sinnvoll, wenn aus anderweitigen Untersuchungen bekannt ist, daß die vorliegende Altkarte aus unterschiedlichen Quellen kompiliert wurde, wie es z.B. bei der *Ostfrieslandkarte* von UBBO EMMIUS aus dem Jahre 1599 der Fall ist (siehe Anhang B.3). Im Normalfall liegen jedoch für Altkarten solche Voranalysen *nicht* vor. Ob Untersuchungen von Teilgebieten sinnvoll sind, kann daher erst auf der Grundlage einer Gesamtuntersuchung des Gebietes entschieden werden. Als Entscheidungshilfe können hier visualisierte Restklaffungsvektoren (siehe Kap. 8.1) herangezogen werden, aus denen sich möglicherweise Teilgebiete mit überwiegend gleichartigen Vektorstrukturen abgrenzen lassen, die auf signifikante Unregelmäßigkeiten bezüglich Lage, Verdrehung oder Maßstab hinweisen. So deuten z.B. gleichgerichtete Vektoren auf einen regionalen Lagefehler oder radial verlaufende Vektoren auf eine regionale Maßstabsabweichung hin.

Lassen sich Teilgebiete aufgrund von Voruntersuchungen hinreichend abgrenzen, kann bei der Datenerfassung direkt gebietsweise vorgegangen werden. Man erhält somit mehrere Dateien, die einerseits für die Untersuchungen der Teilgebiete und andererseits - durch Zusammenführung der Einzeldateien - auch für das gesamte Gebiet der vorliegenden Altkarte verwendet werden können. Da dies aber nicht der Regelfall ist, gestaltet sich die rechnerische Realisierung wesentlich schwieriger. Eine *gleichmäßige* Aufteilung in zwei, drei oder mehr Teilgebiete und deren Untersuchung, läßt sich zwar rechentechnisch gesehen relativ einfach durchführen und damit auch unter Umständen Irregularitäten aufdecken. Im allgemeinen wird man bei dieser Vorgehensweise aber nur dann signifikante Abweichungen nachweisen können, wenn eine tatsächlich vorhandene regionale Anomalie zufällig in irgendein der gleichmäßig aufgeteilten Gebiete fällt.

Wünschenswert wären deshalb automatisierte Analyseverfahren zur Erkennung von Punktgruppen (Segmentierung) mit gleichartigen Strukturen von Restklaffungsvektoren. Möglicherweise können hier Lösungsvorschläge herangezogen werden, wie sie von FÖRSTER / WERNER [1986] und LEHMKÜHLER [1993] für die *geodätische Deformationsanalyse als Mustererkennungsaufgabe* entwickelt wurden. Ob diese Verfahren allerdings auch für Altkartenuntersuchungen geeignet sind, müßte eingehend untersucht werden (Forschungsbedarf).

5.5 Beurteilung der Verfahren

Im vorliegenden Kapitel 5 wurden die grundlegenden Methoden zur Maßstabs- und Genauigkeitsbestimmung vorgestellt, wobei im wesentlichen auf zwei unterschiedliche Berechnungsverfahren (Vergleichsstrecken- und Vergleichspunktverfahren) detailliert eingegangen wurde.

Einigermaßen *zuverlässige Aussagen* über den Maßstab, den Drehwinkel bzw. die Orientierungsabweichung der zu untersuchenden Altkarte sowie die entsprechenden Genauigkeitsschätzungen lassen sich danach nur mit Hilfe der **Vergleichspunktverfahren** (siehe Kap. 5.2 und Kap. 5.3.1(b)) erzielen. Dabei sollten prinzipiell *beide* Grundmethoden der ausgleichenden Koordinatentransformation, also sowohl die *Ähnlichkeitstransformation* (Kap. 5.2.1) als auch die *Affintransformation* (Kap. 5.2.2) angewendet werden, um aus den Ergebnissen eine vertrauenswürdige Gesamtbeurteilung der Altkarte zu erhalten.

Die Verfahren mit Hilfe von **Vergleichsstrecken** (siehe Kap. 5.1 sowie Kap. 5.3.1(b)) liefern dagegen lediglich nur **Näherungswerte**, wobei die Ergebnisse nach der *direkten Methode* (Kap. 5.1.1) generell als unsicher bzw. fragwürdig eingestuft werden müssen. Allenfalls bei der Anwendung der *indirekten Methode* (Kap. 5.1.2) lassen sich einigermaßen akzeptable Resultate erzielen, die allerdings sehr unterschiedlich ausfallen können, da sie von der mehr oder weniger *subjektiven* Auswahl der verwendeten Strecken und der vorab festzulegenden Nebenbedingung (Minimalstrecke) abhängen.

Bei den Verfahren zur Beurteilung der **Zuverlässigkeit der Graduierung im Kartenrahmen** (Kap. 5.3.2) und die damit zusammenhängende Ermittlung von *geographischen* Punktkoordinaten - bei **Vorhandensein** einer Graduierung im Kartenrahmen - ist verfahrenstechnisch der korrekte Weg mit Hilfe der *bilinearen Transformation und deren Umkehrung* (siehe Kap. 2.2.4, Formeln (2-23) und (2-30)) exemplarisch beschrieben worden. Die Berechnungsformeln dazu sind zwar relativ aufwendig, stellen aber bei der rechentechnischen Umsetzung durch eine entsprechende Programm-Applikation kein Problem dar. Ersatzweise kann hier aber auch die wesentlich einfacher zu handhabende *projektive Transformation* nach (2-31) eingesetzt werden, da man in den meisten Fällen davon ausgehen kann, daß der vermutlich rechteckig konstruierte Kartenrahmen der Altkarte im Laufe der Zeit keine *extrem* größeren Abweichungen von einer rechteckigen Form aufweist und somit die abbildungsspezifischen Verzerrungen der projektiven Transformation nur geringfügig ins Gewicht fallen. Die Ausgangskoordinaten bei Anwendung der projektiven Transformation sind hier die kartesischen Tischkoordinaten (Digitalisierung) der Ortspositionen in der Altkarte und die Zielkoordinaten sind die *gesuchten* geographischen Koordinaten, wobei sich die acht Transformationskonstanten der projektiven Transformation (im einfachsten Fall *ohne* Ausgleichsrechnung) aus den entsprechenden Koordinaten der vier Blattecken ableiten.

Zur Problematik der Festlegung des **Nullmeridians** für eine konkret vorliegende und zu untersuchende Altkarte, wie sie im Abschnitt *Mittlere Verschiebung in Breitenkreisrichtung* des Kapitels 5.3.2 beschrieben wurde, muß festgestellt werden, das hier noch *eingehender Forschungsbedarf* besteht, um der Altkarte den vermutlich verwendeten Nullmeridian zuzuordnen.

Kapitel 6

Graphische Darstellungen von Stichproben und Häufigkeitsverteilungen

Bei der Genauigkeitsuntersuchung einer Altkarte sollte man sich zunächst einen Überblick über das vorhandene Datenmaterial verschaffen ehe es für die Berechnung der Parameterschätzungen (z.B. mittlerer Maßstab, Standardabweichung) herangezogen wird. Da die Sichtung der reinen Daten, die für die rechnerische Verarbeitung verwendet werden und in Form digitaler Datenlisten (Koordinaten, Residuen, Restklaffungsvektoren) vorliegen, *unanschaulich* ist, empfehlen sich *graphische Darstellungen*, die auf *einen Blick* die Streuung und Verteilung des gesamten Datenmaterials sichtbar machen. Die nachfolgenden Abbildungen wurden mit dem professionellen Mathematikprogramm *Mathcad* erstellt.

6.1 Graphische Darstellung der Streuung von Stichproben

Unter einer Stichprobe wird die Menge aller Beobachtungsdaten (Beobachtungsreihe) verstanden, die für die Parameterschätzung einer vorliegenden Altkarte herangezogen werden. Dazu zählen hier im wesentlichen die Stichproben für die Maßstabberechnung nach dem *indirekten Vergleichsstreckenverfahren* (siehe Kap. 5.1.2) sowie die Residuen und die daraus abgeleiteten Längen von Restklaffungsvektoren nach dem *Vergleichspunktverfahren* (siehe Kap. 5.2).

Zur Visualisierung der Streuung der zu untersuchenden Stichproben gibt es verschiedene Möglichkeiten. Optimal ist hier die Darstellung in Form eines *Streuungsdiagramms* (auch: Rohdatenplot = graphische Rohdarstellung eines univariaten Datensatzes) in dem die Streuung des gesamten Datensatzes und damit auch die *Ausreißer* und *groben Fehler* auf einen Blick sichtbar gemacht werden können. Durch zusätzliche Markierung des *arithmetischen Mittels*, der *empirischen Standardabweichung* sowie des *Medians* (Definition und Berechnungsformel des Medians siehe Kap. 7: *Einsatz robuster Schätzverfahren*) gewinnt man einen ersten Eindruck über die Datenqualität der vorliegenden Altkarte, wie die beiden folgenden Abbildungen anschaulich demonstrieren.

So zeigt die **Abbildung 6.1** am Beispiel der *Schlesienkarte* die Streuung von $n = 947$ einzeln berechneten Maßstabswerten (Maßstabszahlen) nach dem *indirekten Vergleichsstreckenverfahren*. Wie deutlich zu erkennen ist, bewegen sich die Maßstabsberechnungen im Bereich zwischen ca. 200 000 und 1 000 000, wobei sich die meisten Maßstabswerte um den arithmetischen Mittelwert (ca. 540 000) im Intervall der empirischen Standardabweichung (ca. 64 000) häufen. Daraus kann allerdings noch keine Normalverteilung der Stichprobe gefolgert werden, auch wenn es augenscheinlich danach aussieht und der Median wie hier ersichtlich fast mit dem Mittelwert zusammenfällt. Ob eine Normalverteilung vorliegt kann z.B. erst anhand eines Häufigkeitsdiagramms anschaulich nachgeprüft werden (siehe Kap. 6.2). Da maximale Abweichungen vom Mittelwert bis zum ca. 7-fachen Betrag der Standardabweichung auftreten, kann davon ausgegangen werden, daß in Teilbereichen der Altkarte *grobe Fehler* und *Ausreißer* vorliegen, welche die Maßstabs- und Genauigkeitsbestimmung nachteilig beeinflussen.

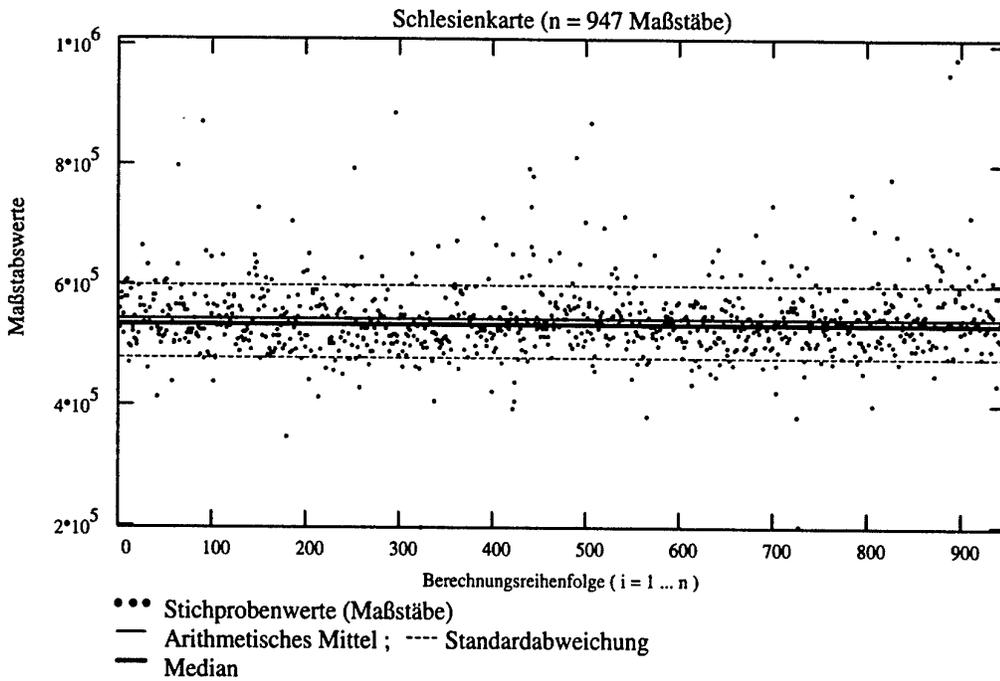


Abb. 6.1: Streuungsdiagramm von $n = 947$ einzeln berechneten Maßstabswerten (Maßstabszahlen) nach dem *indirekten* Vergleichsstreckenverfahren für die Schlesienkarte von HELWIG aus dem Jahre 1561 mit Eintrag des *arithmetischen Mittels* und der dazugehörigen *empirischen Standardabweichung* sowie zusätzlich des *Medians*.

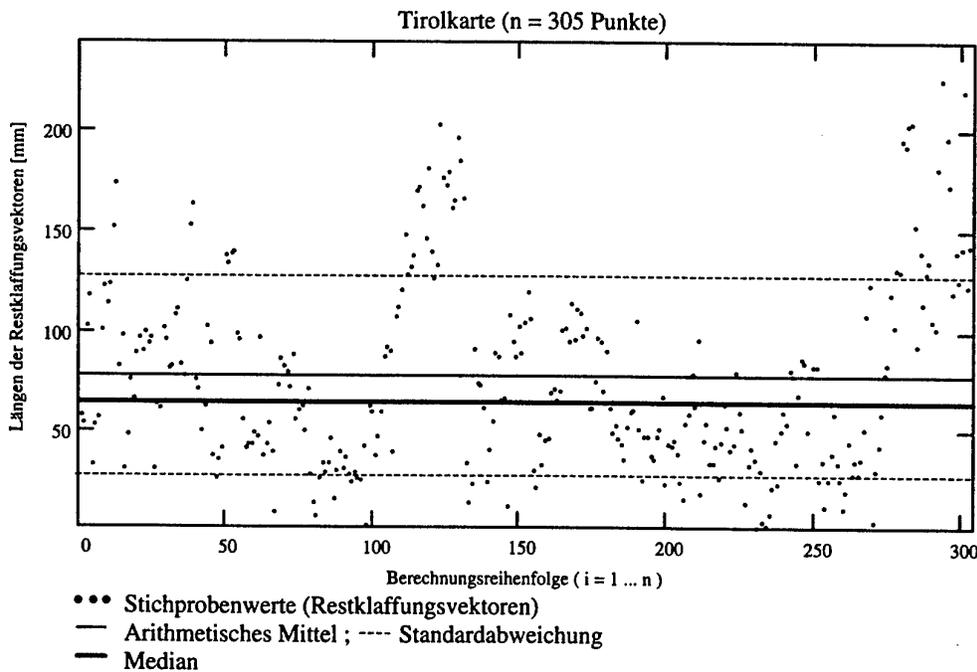


Abb. 6.2: Streuungsdiagramm der Längen von Restklaffungsvektoren nach einer Ähnlichkeitstransformation für die *Tirolkarte* von MICHAEL BURCKLEHNER aus dem Jahre 1611 mit Eintrag des *arithmetischen Mittels* und der dazugehörigen *empirischen Standardabweichung* sowie zusätzlich des *Medians*.

In **Abbildung 6.2** ist am Beispiel der *Tirolkarte* die Streuung der Längen von 305 Restklaffungsvektoren nach einer *Ähnlichkeitstransformation* wiedergegeben. Die maximalen Längen erreichen dabei Werte bis ca. 250 mm (!) in der Altkarte, die bei dieser Größenordnung deutlich auf *grobe Fehler* und *Ausreißer* hinweisen. Im Gegensatz zu der in **Abbildung 6.1** dargestellten Streuung von Maßstabszahlen läßt sich aber hier *keine* eindeutige Häufung der Werte (Längen der Restklaffungsvektoren) um das arithmetische Mittel (ca. 80 mm) oder den Median (ca. 65 mm) feststellen. Allenfalls *unterhalb* des arithmetischen Mittels bzw. des Medians kann eine im Vergleich zur restlichen Streuung merkliche Häufung der Berechnungswerte erkannt werden, die in diesem Fall zudem noch annäherungsweise gleichmäßig verteilt erscheinen. Wie im nachfolgenden Kap. 6.2 noch näher erläutert wird, kann aber bei der Häufigkeitsverteilung von Längen der Restklaffungsvektoren *grundsätzlich keine* Normalverteilung erwartet werden, so daß die Parameter der Normalverteilung (Mittelwert, Standardabweichung), die hier nur aus den *Längen der Restklaffungsvektoren* abgeleitet sind, für Genauigkeitsaussagen prinzipiell ungeeignet sind. Diesen Sachverhalt veranschaulicht die vorliegende Abbildung in Form eines einfachen Streuungsdiagramms eindrucksvoll.

6.2 Graphische Darstellung von Häufigkeitsverteilungen

Im folgenden werden die bei Altkartenuntersuchungen *typisch* auftretenden Häufigkeitsverteilungen im Vergleich zur Normalverteilung *graphisch* dokumentiert. Auf die *rechnerischen* Testverfahren zur Prüfung auf Normalverteilung, wie z.B. der *Kolmogoroff-Smirnov-Test* oder der *Chi-Quadrat-Test*, soll hier nicht näher eingegangen werden, da sie in der Statistikliteratur detailliert beschrieben sind (siehe KREYSZIG, [1975], SACHS, [1992]). Im Gegensatz zur graphischen Veranschaulichung der Abweichungen von einer hypothetischen Verteilung, sind die rechnerischen Testverfahren zwar objektiver und genauer, liefern aber nur die *Annahme* oder die *Verwerfung* der unterstellten Hypothese (hier: Vermutung auf Normalverteilung). Interessanter und aufschlußreicher sind bei Altkartenuntersuchungen die tatsächlichen Stichprobenverteilungen, die sich am anschaulichsten in Form von Histogrammen darstellen lassen.

Die nachfolgenden Abbildungen (6.3 - 6.5) zeigen die charakteristischen Häufigkeitsverteilungen von Stichproben bei Maßstabsbestimmungen von Altkarten. Für die *Anzahl der Klassen* wurde in allen Diagrammen der in der Statistik übliche Wert \sqrt{n} (n = Anzahl der Beobachtungen) verwendet. Wie aus den Abbildungen zu ersehen ist, weichen die tatsächlichen Verteilungen in allen Histogrammen von der zusätzlich eingezeichneten Normalverteilung *deutlich* ab. Außerdem ist überall eine eindeutige Tendenz zu einer *linkssteilen* Häufigkeitsverteilung zu erkennen (auch: positive Schiefe). Im einzelnen lassen sich folgende Merkmale anführen:

- Bei Maßstabsbestimmungen unter Verwendung des *Vergleichsstreckenverfahren* (siehe Kap. 5.1.2) mit *vielen* Beobachtungen ist eine deutliche Neigung zu einer *steilgipfligen* Verteilung (positiver Exzeß) zu erkennen (siehe Abb. 6.3a und 6.3b). Bei relativ *wenigen* Beobachtungen, wie sie zwangsläufig bei dem Verfahren mit *optimaler Streckenauswahl und Vorgabe einer Minimalstrecke* (siehe Kap. 5.1.2 (c)) vorkommen, ist eine Abhängigkeit von der Wahl der Minimalstrecke zu erkennen (siehe Abb. 6.4a und 6.4b). Je kleiner die Minimalstrecke gewählt wird, desto *unruhiger* verläuft die Verteilung. Zwei- und mehrgipflige (multimodale) Verteilungen sind dabei keine Seltenheit. Die Ursachen dafür sind schwer festzustellen und müßten näher untersucht werden. Möglicherweise sind konstante Verschiebungen von Ortspositionen innerhalb lokaler Gebiete dafür verantwortlich.

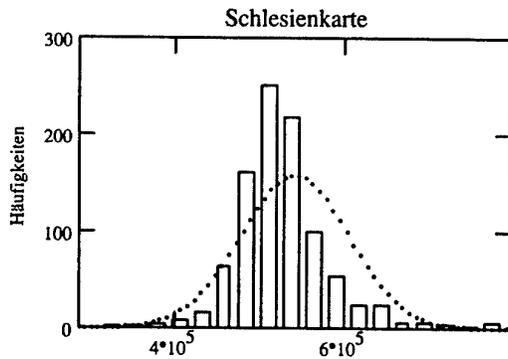


Abb. 6-3a: Anzahl der Strecken =947

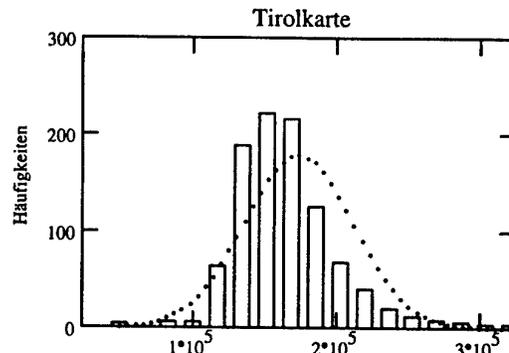


Abb. 6-3b: Anzahl der Strecken =986

Abb. 6.3: Häufigkeitsverteilung bei Maßstabsbestimmungen nach dem *indirekten Vergleichsstreckenverfahren* aus *vielen* Streckenvergleichen (Balken) im Vergleich zur empirischen Normalverteilung (gepunktete Linie).

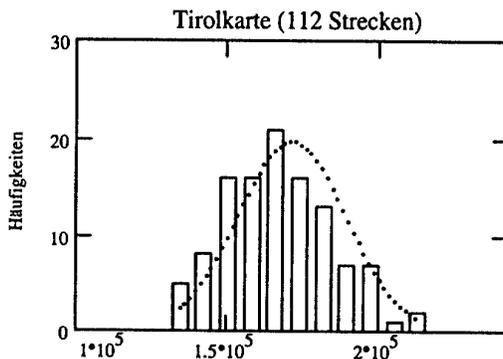


Abb. 6-4b: Minimalstrecke = 90 cm

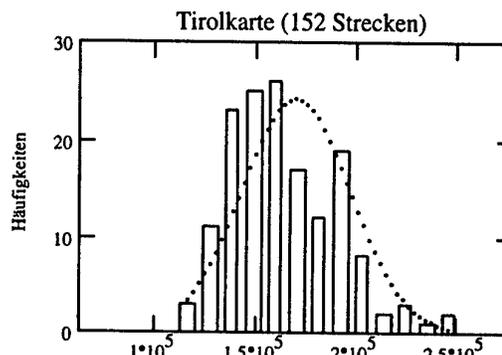


Abb. 6-4b: Minimalstrecke = 30 cm

Abb. 6.4: Häufigkeitsverteilung bei Maßstabsbestimmungen nach dem *indirekten Vergleichsstreckenverfahren* bei *optimaler Streckenauswahl* und *Vorgabe unterschiedlicher Minimalstrecken* (Balken) im Vergleich zur empirischen Normalverteilung (gepunktete Linie).

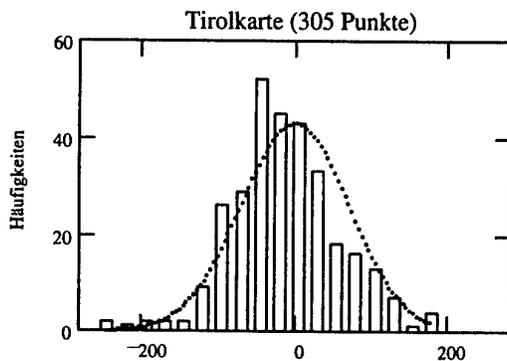


Abb. 6-5a: Restklaffungen in x-Richtung

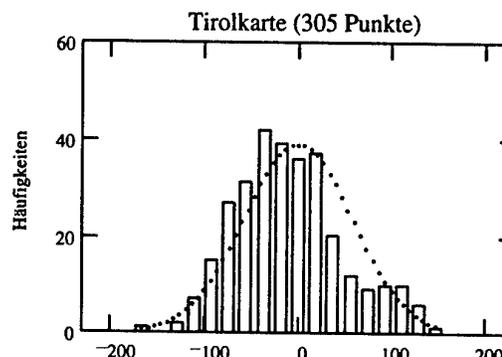


Abb. 6-5b: Restklaffungen in y-Richtung

Abb. 6.5: Häufigkeitsverteilung von Restklaffungen in x- und y-Richtung nach dem *Vergleichspunktverfahren* (Balken) und Eintrag der empirischen Normalverteilung (gepunktete Linie).

- Beim *Vergleichspunktverfahren* (siehe Kap. 5.2) mit Hilfe einer ausgleichenden Koordinatentransformation (hier exemplarisch für die Ähnlichkeitstransformation) zeigen die Häufigkeitsverteilungen von Residuen in x- und y-Richtung (siehe Abb. 6.5a und 6.5b) im Prinzip die gleiche charakteristische Tendenz auf wie beim Verfahren mit Vergleichsstrecken, wobei empirische Untersuchungen belegen, daß mehrgipflige Verteilungen zwar auch auftreten, aber eher die Ausnahme sind.

Bei der Häufigkeitsverteilung der aus den Residuen (v_x, v_y) abgeleiteten Längen der Restklaffungsvektoren (d)

$$d = +\sqrt{v_x^T v_x + v_y^T v_y} \quad (6-1)$$

kann dagegen *grundsätzlich keine* Normalverteilung erwartet werden, denn nach der Wahrscheinlichkeitstheorie ergibt sich für den Ansatz (6-1) die sogenannte *Chi-Verteilung* (auch: χ -Verteilung) mit dem Freiheitsgrad $f = 2$, wenn die Residuen in x und y-Richtung *normalverteilten* Grundgesamtheiten entsprechen.

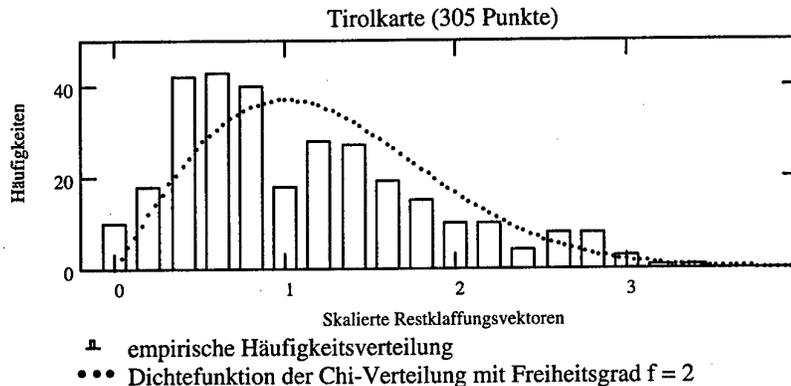


Abb. 6.6: Häufigkeitsverteilung der (skalierten) Längen von Restklaffungsvektoren aus den Residuen der Tirolkarte (Abb. 6.5a und 6.5b) nach dem *Vergleichspunktverfahren* und Darstellung der entsprechenden Dichtefunktion der χ -Verteilung mit dem Freiheitsgrad $f = 2$.

Die Dichtefunktion der χ -Verteilung (siehe PROHOROV, ROZANOV [1969], CASPARY u.a. [1983]) ist *allgemein* durch

$$f(x, f) = \begin{cases} \frac{x^{f-1}}{2^{\frac{f-2}{2}} \cdot \Gamma(\frac{f}{2})} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} & ; x > 0 \\ 0 & ; x \leq 0 \end{cases} \quad (6-2a)$$

gegeben, wobei f der Freiheitsgrad und x die Länge eines f -dimensionalen Zufallsvektors aus *normalverteilten* Komponenten mit dem *Mittelwert* $\mu = 0$ und der *Standardabweichung* $\sigma = 1$ bedeuten. Das Zeichen Γ steht für die in der Statistik häufig verwendete Gamma-Funktion. Da nach (6-1) nur zwei Komponenten (v_x, v_y) auftreten, ergibt sich der Freiheitsgrad $f = 2$ und damit eine vereinfachte Formel für die Dichtefunktion:

$$f(x) = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} ; x \geq 0 \quad (6-2b)$$

In **Abbildung 6.6** ist die Häufigkeitsverteilung der Längen von Restklaffungsvektoren dargestellt, die aus den Residuen der Tirolkarte nach dem *Vergleichspunktverfahren* berechnet wurden und deren Verteilung in **Abbildung 6.5** dargestellt ist. Zusätzlich wurde die entsprechende Dichtefunktion der χ -Verteilung nach (6-2) eingetragen. Die x-Achse ist hier in *Einheiten der Standardabweichung* (s_0) über die Transformation $x_i = d_i / s_0$ skaliert (skalierte Längen der Restklaffungsvektoren), um eine Vergleichbarkeit mit der in **Abbildung 6.7** dargestellten Häufigkeitsverteilung von Strecken eines Testbeispiels zu ermöglichen. Bei diesem Testbeispiel wurden mit Hilfe eines Zufallsgenerators normalverteilte x- und y-Residuen mit den Parametern: *Mittelwert* $\mu = 0$ und *Standardabweichung* $\sigma = 1$ simuliert und daraus die Strecken ermittelt. Ein Vergleich der beiden **Abbildungen 6.6** und **6.7** zeigt deutlich, daß *nur bei normalverteilten Residuen* eine χ -Verteilung (mit $f = 2$) zu erwarten ist.

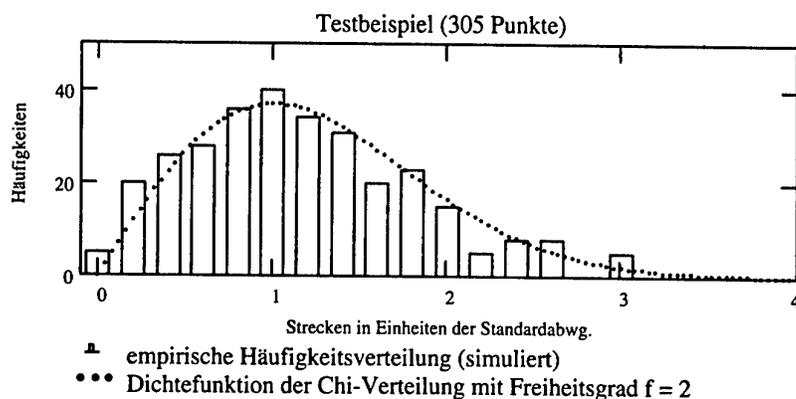


Abb. 6.7: Häufigkeitsverteilung von Strecken aus *simulierten normalverteilten Residuen* $\{R(v_x | v_y) | N(\mu = 0, \sigma = 1)\}$ und Dichtefunktion der χ -Verteilung ($f = 2$).

Zusammenfassend kann festgehalten werden, daß bei Stichproben für Altkartenuntersuchungen *generell keine* Normalverteilung vermutet werden kann. Dies bestätigen - neben den hier an einigen graphischen Beispielen gezeigten Häufigkeitsverteilungen - auch Überprüfungen an allen der im Rahmen dieser Arbeit herangezogenen Altkarten mit Hilfe rechnerischer Testverfahren (z.B. Kolmogoroff-Smirnov-Test).

Allerdings konnte *immer* eine Annäherung an die Normalverteilung erreicht werden, wenn das Beobachtungsmaterial wegen grober Fehler und vermeintlicher Ausreißer weit genug reduziert wurde. Ein *Teil des Datenmaterials* kann also durchaus als *normalverteilt* angesehen werden. Da die tatsächliche Gesamtverteilung im Einzelfall unbekannt ist, empfehlen sich daher für die Schätzung der für Altkarten wichtigen Parameter *Maßstab* und *Standardabweichung* Rechenverfahren, die weitgehend *verteilungsunabhängig* sind.

Darüber hinaus wäre es zwar sehr hilfreich, wenn *allgemeingültige Modellverteilungen* für Stichproben bei Altkartenuntersuchungen bekannt wären (hier besteht noch eingehender Forschungsbedarf). Der *Einfluß* von *groben Fehlern* und *Ausreißern* (bei Altkarten die Regel) auf die Parameterschätzung wäre damit aber *nicht* gelöst. Mit der Anwendung *robuster Schätzverfahren* (siehe Kap. 7) lassen sich die hier angesprochenen Problematiken weitgehend überwinden.

Kapitel 7

Einsatz robuster Schätzverfahren

Die bisher (siehe Kap. 5) behandelten Verfahren zur Genauigkeitsanalyse für Altkarten stützen sich generell auf die Anwendung der *Methode der kleinsten Quadrate* (MkQ) als optimales Schätzverfahren. Neben dem Vorteil der relativ einfachen rechnerischen Handhabung, weist die MkQ aber auch einen *gravierenden* Nachteil auf, da sie wegen des quadratischen Ansatzes *sehr empfindlich* auf *Ausreißer* und *grobe Fehler* im Datenmaterial reagiert. Gerade bei Altkarten hat man wegen der unzureichenden Meß- und Kartiermethoden der damaligen Zeit, mit großen bis groben Fehlern zu rechnen, welche die ausgeglichenen Ergebnisse nach der MkQ irreal verfälschen und insbesondere bei großen Datenmengen - wie bei Altkarten üblich - beträchtliche Probleme verursachen. Zudem werden bisher bei Genauigkeitsangaben *normalverteilte* Beobachtungen unterstellt. Wie im Kapitel 6 schon gezeigt wurde, weisen aber gerade bei Altkarten Stichprobenverteilungen *keine* Normalverteilung auf. Die Angabe der traditionellen Standardabweichung kann daher leicht zu Fehlinterpretationen führen.

Eine gute Alternative zur MkQ stellen die in den letzten 35 Jahren in der mathematischen Statistik entwickelten *robusten Schätzverfahren* dar, da sie *prinzipiell resistent* gegenüber Abweichungen von Modellverteilungen sind. Der *wesentliche Vorteil* besteht aber vor allem darin, daß der Einfluß inkonsistenter Beobachtungen (Ausreißer) auf die Parameterschätzungen (Mittelwert, Standardabweichung) klein gehalten wird. Zwar können auch mit dem herkömmlichen Verfahren der MkQ durch iterative Berechnungen bessere Ergebnisse erzielt werden, in dem sukzessiv die großen bis groben Fehler aus dem Beobachtungsmaterial eliminiert werden. Diese Vorgehensweise ist aber zeitaufwendig und subjektiv. Die Anwendung robuster Verfahren liefert dagegen eine schnelle und weitgehend *objektive* Auswertung des Beobachtungsmaterials mit *mehreren Ausreißern* in *einem* Schritt.

Entwickelt wurde die robuste Schätzung von HUBER [1964], der auf der Grundlage der *Maximum-Likelihood-Methode* (siehe KREYSZIG, [1975], SACHS, [1992]) den Grundtyp der robusten Schätzer (M-Schätzer) einführte. Die Bezeichnung *robust* wurde dabei im Sinne von BOX [1953] als resistent gegenüber Abweichungen von Modellannahmen verwendet. Die Arbeit von HUBER löste eine Vielzahl von Veröffentlichungen mit weiteren Modellvorschlägen für robuste Schätzer aus.

Im Rahmen dieser Arbeit kann nur auf einige Typen robuster Schätzer eingegangen werden sowie auf die rechentechnische Realisierung zur Parameterbestimmung. Einen ausgezeichneten Überblick über die Verfahren der robusten Schätzung liefern BORUTTA [1988], sowie die Veröffentlichungen von CASPARY u.a. [1985, 1987, 1990].

7.1 Grundbegriffe und -definitionen

Unter dem Begriff *Parameter* werden in der Statistik *Konstanten* bezeichnet, die eine bestimmte Verteilung einer vorliegenden Stichprobe charakterisieren. Das sind z.B. bei einer Normalverteilung eines univariaten (ein-dimensionalen) Datensatzes die Parameter *Mittelwert* und *Standardabweichung*. Im Hinblick auf die *Anzahl der Unbekannten* des Ausgleichsmodells spricht man allerdings hier von einer *ein-Parameter-Schätzung* und bei *mehr-dimensionalen* Datensätzen, wie sie z.B. bei einer ausgleichenden Koordinatentransformation vorkommen, von einer *m-Parameter-Schätzung* (z.B. $m = 4$ bei einer Ähnlichkeitstransforma-

tion). Die Ermittlung von numerischen Werten für diese Konstanten wird in der Statistik als *Schätzung der Parameter* bezeichnet.

7.1.1 Parameter der robusten Schätzung

Im Unterschied zu den traditionellen Parameterbezeichnungen in der Geodäsie, werden in der mathematischen Statistik zwei grundlegende Begriffe verwendet:

- **Lageparameter** (location)
- **Skalenparameter** (scale)

Als Lageparameter einer Stichprobe kommt z.B. das *arithmetischen Mittel* (ein-dimensionaler Fall) oder der *Median* und als Skalenparameter die *Standardabweichung* oder ein *Quantilenabstand* in Frage.

7.1.2 Einfache robuste Schätzung des Lageparameters

Bei einfachen Maßstabsbestimmungen für Altkarten (Vergleichsstreckenverfahren) führt die Anwendung des arithmetischen Mittels wegen des Einflusses inkonsistenter Beobachtungen (Ausreißer) und der generell unsicheren Verteilung mit positiver Schiefe (siehe Kap. 6.2) auf eine zu große mittlere Maßstabszahl. Eine wesentlich realistischere Schätzung stellt hier der *Median* (auch *Zentralwert*) dar, der im Falle normalverteilter Grundgesamtheiten und sehr vielen Beobachtungen ($n \rightarrow \infty$) mit dem arithmetischen Mittel zusammenfällt.

Der **Median** (\tilde{x}) ist der *mittlere, der ansteigend nach Größe geordneten n Werte* eines Beobachtungsvektors (\mathbf{x}):

$$\tilde{x} = \text{med}(x_i) = \begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}} & ; \text{für } n = \text{ungerade Anzahl der Beobachtungen} \\ \frac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2} & ; \text{für } n = \text{gerade Anzahl der Beobachtungen} \end{cases} \quad (7-1)$$

Er ist *äußerst robust* gegen Ausreißer und asymmetrischen Verteilungen. Bei linkssteilen Häufigkeitsverteilungen - bei Altkarten die Regel - ist er kleiner als das arithmetische Mittel (siehe dazu in Kap. 6 die Abb. 6.1 und 6.2). Für einfache Maßstabsbestimmungen bei Altkarten nach dem Vergleichsstreckenverfahren, ist der Median immer dem einfachen arithmetischen Mittel vorzuziehen.

7.1.3 Einfache robuste Schätzung des Skalenparameters

Für Streuungsmaße, die unempfindlicher auf grobe Abweichungen als die traditionelle Standardabweichung reagieren, lassen sich eine ganze Reihe verschiedener Vorschläge anführen. Allgemein gebräuchlich ist der *Median der absoluten Abweichung vom Stichprobenmedian* (MAD: median of the absolute deviations from the median:), der entweder als Schätzfunktionen der *Beobachtungen* (\mathbf{x}) oder der *Residuen* (\mathbf{v}) definiert werden kann und ein sehr robustes Streuungsmaß darstellt:

$$s_{\tilde{x}} = s_{\text{MAD}} = \begin{cases} \text{med}(|\tilde{x} - x_i|) & ; \text{bei ein - Parameterschätzung} \\ \text{med}(|v_i|) & ; \text{bei ein - und mehr - Parameterschätzung} \end{cases} \quad (7-2)$$

Daneben gibt es noch weitere Vorschläge, die durch Modifikation von (7-2) eine Anpassung an die Standardabweichung vornehmen, falls die Beobachtungen normalverteilt sind (siehe BORUTTA [1988]). Da dies bei Altkartenuntersuchungen in der Regel aber nicht gegeben ist (siehe Kap. 6), soll hier nicht weiter darauf eingegangen werden.

7.2 Robuste Parameterschätzung

Der *Grundgedanke* des robusten Schätzverfahrens besteht darin, die Minimumsbedingung so zu definieren, daß der ungünstige quadratische Ansatz, wie er z.B. bei der MkQ durch $\mathbf{v}^T \mathbf{v} = \min$ bzw. $\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = \min$ gegeben ist (siehe Kap. 2), entweder *ganz ausgeschlossen* oder nur *teilweise* berücksichtigt wird. Zur Realisierung dieser Zielsetzung wird bei der robusten Schätzung folgender *Minimierungsansatz* auf der Basis einer *Funktion der Residuen* $\rho(v_i)$ definiert:

$$\sum_{i=1}^n \rho(v_i) = \min \quad (7-3)$$

Die Funktion $\rho(v)$ wird in der Terminologie der robusten Schätzung als **Zielfunktion** (auch: *Verlust-* oder *Risikofunktion*) bezeichnet. Sie kann *beliebig* definiert werden, allerdings mit der Einschränkung (im Hinblick auf die Minimierung), daß sie konvex (nach oben offen) ist. So ergibt sich z.B. bei Anwendung der konventionellen MkQ für gleichgenaue Beobachtungen die Zielfunktion

$$\rho(v) = v^2$$

die auf das *arithmetische Mittel* führt. Im statistischen Sprachgebrauch wird diese Schätzfunktion auch als L_2 -Norm bezeichnet. Die Ableitung des *Medians* (L_1 -Norm) ergibt sich dagegen aus der Zielfunktion:

$$\rho(v) = |v|$$

Nach der grundlegenden Arbeit von HUBER [1964] sind eine Vielzahl verschiedenster Vorschläge für Zielfunktionen robuster Schätzverfahren veröffentlicht worden. Auf einige und im Rahmen dieser Arbeit verwendete Zielfunktionen wird im nachfolgenden Kapitel 7.2.1 eingegangen.

Das Minimum einer Funktion wird bekanntlich dadurch ermittelt, daß das Differential dieser Funktion (erste Ableitung) zu Null gesetzt wird und daraus der unbekannte Parameter (z.B. Lageparameter) berechnet wird. Auf die Minimierung von (7-3) angewendet, führt das auf die sogenannte **ψ -Funktion**

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \rho'(v_i) &= \sum_{i=1}^n \frac{d\rho(v_i)}{dv_i} = \sum_{i=1}^n \psi(v_i) = 0 \\ &\Rightarrow \psi(v) = \rho'(v) \end{aligned} \quad (7-4)$$

die im allgemeinen aber nicht linear ist. Durch Erweiterung des Ansatzes nach (7-4) erhält man

$$\sum_{i=1}^n \psi(v_i) \cdot \frac{v_i}{v_i} = \sum_{i=1}^n \frac{\psi(v_i)}{v_i} \cdot v_i = \sum_{i=1}^n w_i \cdot v_i = \mathbf{w}^T \mathbf{v} = 0 \quad (7-5a)$$

mit

$$w_i = \frac{\psi(v_i)}{v_i} \rightarrow w(v) = \frac{\psi(v)}{v} \quad (7-5b)$$

wobei w_i als "Gewicht" einer einzelnen Beobachtung bzw. $w(v)$ als "**Gewichtsfunktion**" betrachtet werden kann. Der Ausdruck $\mathbf{w}^T \mathbf{v} = 0$ in (7-5a) entspricht der bei der MkQ geforderten Summationsbedingung für gewichtete Beobachtungen, wobei die "Gewichte" aber hier Funktionen der Residuen (\mathbf{v}) sind.

Mit Hilfe des Skalenparameters (s) können die Argumente der Zielfunktion über den folgenden Ansatz (ein-Parameter-Schätzung) *skaliert* werden

$$u_i = \frac{v_i}{s} = \frac{x_i - \hat{x}}{s} \quad \text{mit:} \begin{cases} x_i = \text{Beobachtungswerte} \\ \hat{x} = \text{zu schätzender Lageparameter} \end{cases} \quad (7-6)$$

so daß sich ein lage- und skalenäquivarianter Schätzer ergibt. Die Ziel-, ψ - und "Gewichtsfunktion" werden damit als Funktionen der Variablen u definiert: $\rho(u)$, $\psi(u)$ und $w(u)$, wobei u_i die *skalierten Residuen* (in Einheiten des Skalenparameters) darstellen.

7.2.1 Robuste M-Schätzer

Nach HUBER [1964, 1981] lassen sich robuste Schätzer auf *drei* Grundtypen zurückführen, von denen sich die Klasse der M-Schätzer dadurch hervorhebt, daß sie durch Verallgemeinerung des Maximum-Likelihood Prinzips entsteht, weil sie die MkQ für normalverteilte Stichproben als Spezialfall enthält. Für einen gewissen Teil der Beobachtungen wird dabei eine Normalverteilung angenommen, während die Verteilung der restlichen Beobachtungen als Störverteilung (z.B. grobe Fehler) betrachtet werden. Für geodätische Aufgabenstellungen - und insbesondere hier bei Genauigkeitsanalysen für Altkarten - sind sie daher von besonderem Interesse. Im folgenden sollen einige robuste Schätzer vorgestellt werden, die für die numerischen Beispiele in dieser Arbeit verwendet wurden.

(a) Huber-Schätzer

Die von HUBER 1964 für robuste Schätzverfahren vorgeschlagene Zielfunktion lautet

$$\rho(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}u^2 & ; \text{für } |u| < k \\ k \cdot |u| - \frac{1}{2}k^2 & ; \text{für } |u| \geq k \end{cases} \quad (7-7a)$$

wobei die Variable u nach (7-6) einzusetzen ist. Die Konstante k wird in der Terminologie der robusten Schätzung als *Tuningkonstante* bezeichnet, mit deren Hilfe eine Anpassung (Abstimmung) an die Datenqualität vorgenommen werden kann. Sie ist ebenfalls, wie die Variable u , in Einheiten des Skalenparameters (s) definiert. So entspricht z.B. $k=2$ dem 2-fachen Wert des Skalenparameters.

Kennzeichnend für diese Zielfunktion ist, daß sie innerhalb der Bereiches $[-k, k]$ mit der quadratischen Zielfunktion nach der MkQ identisch ist und außerhalb (im Gegensatz zur MkQ) linear verläuft. Für $k \rightarrow \infty$ geht der Huber-Schätzer in die MkQ über.

Die aus der Zielfunktion (7-7a) abgeleitete ψ - und **Gewichtsfunktion** des Huber-Schätzers ergeben sich nach (7-4) und (7-5) wie folgt:

$$\psi(u) = \begin{cases} u & ; \text{für } |u| < k \\ \text{sign}(u) \cdot k & ; \text{für } |u| \geq k \end{cases} \quad ; \text{ mit: } \text{sign}(u) = \frac{u}{|u|} \quad (7-7b)$$

$$w(u) = \begin{cases} 1 & ; \text{für } |u| < k \\ \frac{k}{|u|} & ; \text{für } |u| \geq k \end{cases} \quad (7-7c)$$

Die Graphen der Funktionen (7-7) sind in der Abbildung 7.1 dargestellt.

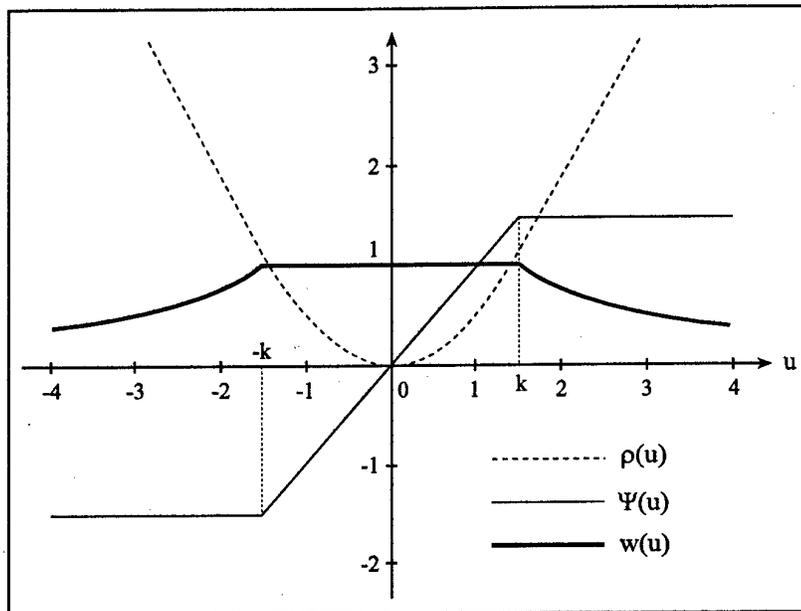


Abb. 7.1: Ziel-, ψ - und Gewichtsfunktion des Huber-Schätzers mit der Tuningkonstanten: $k=1.5$

(b) Hampel-Schätzer

Dieser von HAMPPEL (siehe ANDREWS [1972]) vorgeschlagene Schätzer hängt von *drei* Tuningkonstanten a , b und c ab. In der Regel werden sie in dem Verhältnis $a:b:c = 1:2:4$ festgelegt. Je nach Datenqualität können aber auch andere Relationen verwendet werden. Die Tuningkonstante a ist hierbei identisch mit der Tuningkonstante des Huber-Schätzers, so daß $a = k$ gilt. Die Ziel-, ψ - und Gewichtsfunktion des Hampel-Schätzers sind wie folgt definiert und in der Abbildung 7.2 graphisch dargestellt:

$$\rho(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}u^2 & ; \text{für } |u| < a \\ a \cdot |u| - \frac{1}{2}a^2 & ; \text{für } a \leq |u| < b \\ ab - \frac{1}{2}a^2 + (c-b) \frac{a}{2} \left[1 - \left(\frac{c-|u|}{c-b} \right)^2 \right] & ; \text{für } b \leq |u| < c \\ ab - \frac{1}{2}a^2 + (c-b) \frac{a}{2} & ; \text{für } |u| \geq c \end{cases} \quad (7-8a)$$

$$\psi(u) = \begin{cases} u & ; \text{für } |u| < a \\ a \cdot \text{sign}(u) & ; \text{für } a \leq |u| < b \\ a \cdot \text{sign}(u) \cdot \frac{c-|u|}{c-b} & ; \text{für } b \leq |u| < c \\ 0 & ; \text{für } |u| \geq c \end{cases} \quad (7-8b)$$

$$w(u) = \begin{cases} 1 & ; \text{für } |u| < a \\ \frac{a}{|u|} & ; \text{für } a \leq |u| < b \\ \frac{a}{|u|} \cdot \frac{c}{c-b} - \frac{a}{c-b} & ; \text{für } b \leq |u| < c \\ 0 & ; \text{für } |u| \geq c \end{cases} \quad (7-8c)$$

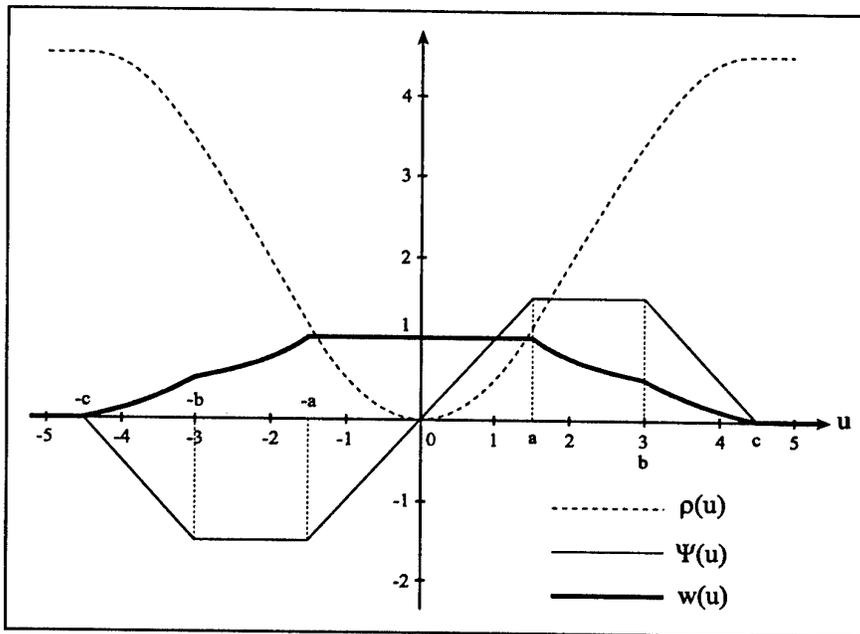


Abb. 7.2: Ziel-, ψ - und Gewichtsfunktion des Hampel-Schätzers mit den Tuningkonstanten: $a=1.5$, $b=3.0$, $c=4.5$

Bei einem Vergleich der ψ - bzw. Gewichtsfunktion mit dem Huber-Schätzer wird deutlich, daß bis zur Tuningkonstanten b sich beide Schätzer gleich verhalten. Dann aber wird der Einfluß der Beobachtungen beim Hampel-Schätzer *deutlicher* abgedämpft und ab der Grenze c auf Null gesetzt, d.h. Beobachtungen, deren Residuen größer/gleich dem c -fachen Wert des Skalenparameters sind, gehen *nicht* mehr in die robuste Berechnung ein. Bei stark kontaminierten (verschmutzten) Daten ist dieser Schätzer daher dem Huber-Schätzer vorzuziehen.

Im Gegensatz zum Huber-Schätzer oder der MkQ stellt die Funktion

$$f(x) = e^{-\rho(x)} \quad (7-9)$$

im statistischen Sinne aber keine *echte* Dichtefunktion dar, da sie außerhalb des Intervalls $[-c, c]$ konstant ist und damit *keine* Standardisierung der Verteilungsfunktion in der Form

$$\int f(x) dx = 1 \quad (7-10)$$

durchgeführt werden kann. Von der statistischen Bedeutung her gesehenen ist dies zwar von Nachteil. Als Mittel zur Abschirmung grober Fehler und im Hinblick auf eine realistische Parameterschätzung ist der Hampel-Schätzer dennoch von hohem Stellenwert.

(c) Dänische Methode

Diese Methode (nach einer Idee von KRARUP [1980]) wurde entwickelt, um auf einfache und schnelle Weise grobe Fehler zu entdecken. Im folgenden soll hier nur die für die rechnerische Realisierung der Parameterschätzung interessierende **Gewichtsfunktion** angegeben werden:

$$w(u) = \begin{cases} 1 & ; \text{für } |u| < k \\ e^{-\frac{|u|}{k}} & ; \text{für } |u| \geq k \end{cases} \quad (7-11)$$

Sie hat einerseits den Vorteil, daß sie nur von *einer* Tuningkonstanten (k) abhängt und andererseits, daß sie im Vergleich zum Huber- und Hampel-Schätzer durch den schnell

rückläufig wirkenden Exponentialansatz *wesentlich* robuster ist (siehe dazu CASPARY [1987]). Der Einfluß von Beobachtungen/Residuen auf die Parameterschätzung wird daher ab der Grenze k erheblich gedämpft.

(d) Methode der „variablen Kontaminierung“

Mit dieser vom Autor speziell für Altkartenuntersuchungen entwickelten Methode (bisher unveröffentlicht) wird ein Schätzer vorgestellt (im folgenden **V-Schätzer** genannt; wobei "V" für variabel steht), der von *zwei* Tuningkonstanten k und c abhängt. Mit der ersten Konstanten k wird zunächst eine *Grobabstimmung* der Datenqualität festgelegt, die wie bisher üblich den Splitpunkt kennzeichnet, bis zu dem eine Normalverteilung der Daten angenommen wird. Mit Hilfe der zweiten Konstanten c kann eine *Feinabstimmung* in Abhängigkeit eines *vermuteten* Verschmutzungsgrades der Daten außerhalb der Grenze k vorgenommen werden.

Die Konstante c (im folgenden auch *Kontaminierungskonstante* genannt) wird bei dieser Methode als Funktion des Verschmutzungsgrades (ϵ) und der vorgegebenen Tuningkonstanten k definiert

$$c = \epsilon \cdot k \quad ; \quad \text{mit: } 0 \leq \epsilon \leq 1 \tag{7-12}$$

wodurch c im Intervall $[0, k]$ festgelegt ist.

Für den Verschmutzungsgrad (ϵ) können die in der folgenden Tabelle angeführten Werte als Anhalt verwendet werden:

Verschmutzung	ϵ
schwach, geringfügig	0.0 ... 0.3
mittelmäßig	0.3 ... 0.7
extrem	0.7 ... 1.0

Die Ziel-, ψ - und Gewichtsfunktion dieses Schätzers sind folgendermaßen definiert und in der Abbildung 7.3 für einen mittleren Verschmutzungsgrad graphisch dargestellt.

$$\rho(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}u^2 & ; \text{ für } |u| < k \\ (k - c) \cdot (|u| + c \cdot \ln(|u| - c)) + C & ; \text{ für } |u| \geq k \end{cases}$$

mit: $C = \frac{1}{2}k^2 - (k - c) \cdot (k + c \cdot \ln(k - c))$ (7-13a)

wobei $0 \leq c \leq k$

$$\psi(u) = \begin{cases} u & ; \text{ für } |u| < k \\ u \cdot \frac{k - c}{|u| - c} & ; \text{ für } |u| \geq k \end{cases} \quad \text{wobei } 0 \leq c \leq k \tag{7-13b}$$

$$w(u) = \begin{cases} 1 & ; \text{ für } |u| < k \\ \frac{k - c}{|u| - c} & ; \text{ für } |u| \geq k \end{cases} \quad \text{wobei } 0 \leq c \leq k \tag{7-13c}$$

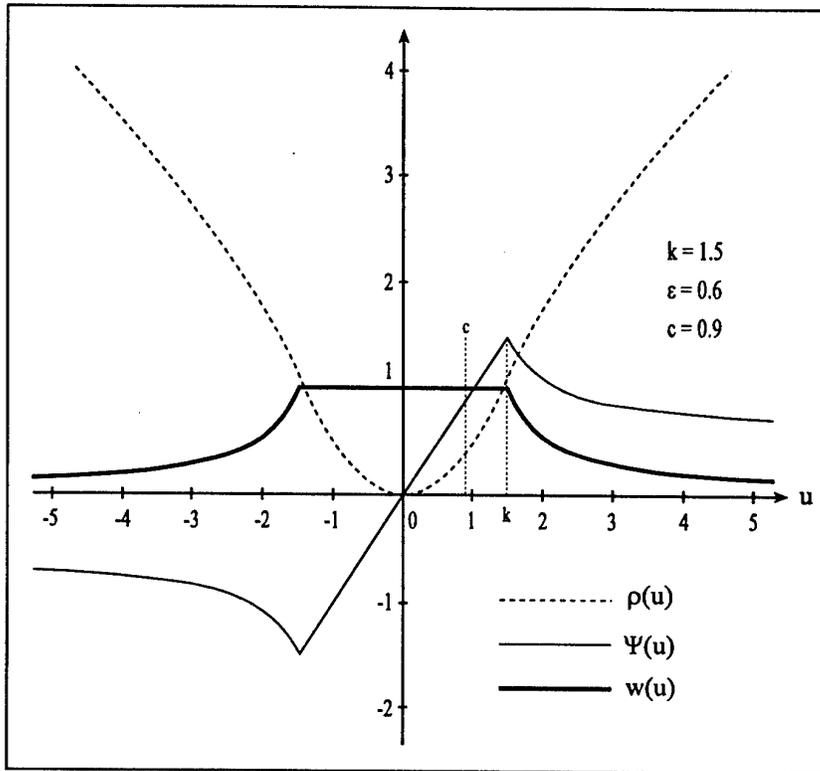


Abb. 7.3: Ziel-, ψ - und Gewichtsfunktion des **V-Schätzers** mit den Tuningkonstanten $k = 1.5$ und $c = 0.9$ bei einem mittleren Verschmutzungsgrad ($\varepsilon = 0.6$)

Der Einfluß des Verschmutzungsgrades bzw. der Kontaminierungskonstanten auf die Ziel-, ψ - und Gewichtsfunktion dieses Schätzers wird deutlich, wenn c in der Nähe des Anfangs- und Endpunktes des Begrenzungsintervalls $[0, k]$ liegt (siehe die folgende Abb. 7.4).

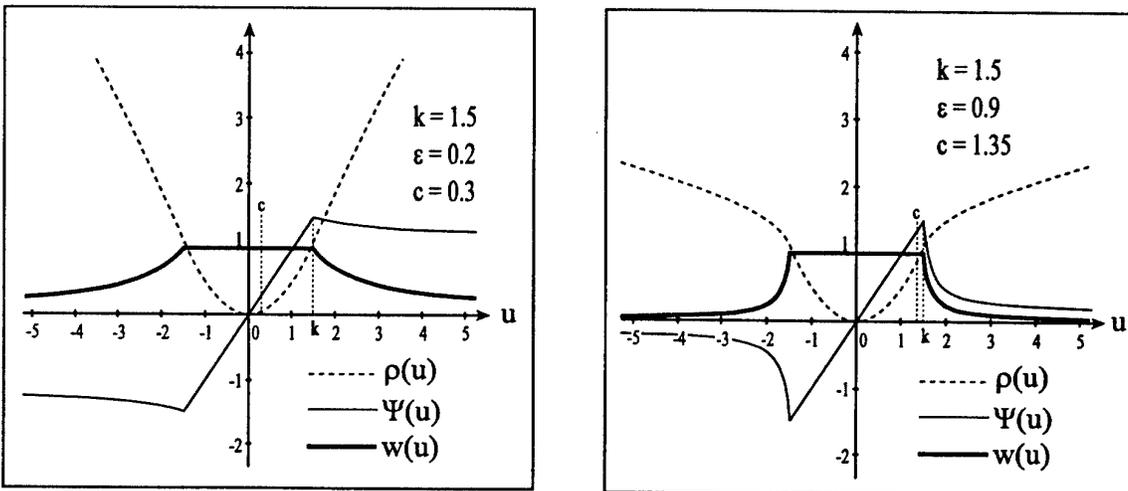


Abb. 7.4: Einfluß des Verschmutzungsgrades (ε) auf die Ziel-, ψ - und Gewichtsfunktion des **V-Schätzers**. Links: *geringer* Verschmutzungsgrad ($\varepsilon = 0.2$). Rechts: *extremer* Verschmutzungsgrad ($\varepsilon = 0.9$).

Die Eigenschaften dieses Schätzers bestehen darin, daß er einerseits für $c = 0$ exakt in den Huber-Schätzer nach (7-7) übergeht und andererseits, daß für $c = k$ der Einfluß der Beobachtungen ab der Grenze k für die Parameterschätzungen auf Null gesetzt werden kann. Durch geeignete Wahl der Kontaminierungskonstanten c lassen sich zudem der Hampel-Schätzer als

auch die dänische Methode angenähert emulieren. Des weiteren ergibt sich aus der Zielfunktion (7-13a) eine echte Dichte- und Verteilungsfunktion nach (7-9) und (7-10).

(e) Methode der kleinsten absoluten Summe (LAS)

Bei dem für Altkartenuntersuchungen wichtigen Vergleichspunktverfahren (siehe Kap. 5.2) mit Hilfe ausgleichender Koordinatentransformationen (z.B. Ähnlichkeitstransformation) wird für jeden Paßpunkt ein Restklaffungsvektor (v) aus den Residuen in x- und y-Richtung (v_x, v_y) zwischen dem Ziel- und dem transformierten Ausgangssystem erhalten:

$$v^T = \{v_x, v_y\} \quad (7-14)$$

Eine Minimierung der Summe der *absoluten Beträge* aller x- und y-Residuen ist hier aber nicht sinnvoll, da bei Restklaffungsvektoren, die ungefähr in Richtung der Hauptachsen des Koordinatensystems zeigen (v_x oder $v_y \approx 0$), wegen der Gewichtsfunktion nach (7-5b) unverhältnismäßig große Gewichte auftreten würden und nur bei $v_x \approx v_y \approx 0$ angebracht wären, was aber in der Regel nicht der Fall ist.

Bei der Methode der kleinsten absoluten Summe (LAS: Least Absolute Sum) werden daher nicht die Residuen, sondern die *Längen der Restklaffungsvektoren* (d_j) der einzelnen Punkte herangezogen:

$$\sum_{j=1}^{n_p} d_j \rightarrow \min \quad ; \quad n_p = \text{Anzahl der Punkte} \quad (7-15)$$

mit

$$d_j = +\sqrt{v_{x_j}^2 + v_{y_j}^2}$$

Dieser Minimierungsansatz führt auf die Gewichtsfunktion (siehe CASPARY [1987])

$$w(d_j) = \frac{1}{d_j} \quad (7-16)$$

die bekanntlich eine Hyperbel darstellt. Bei der rechnerischen Umsetzung ersetzt man d_j zweckmäßig durch $d_j + \delta$, wobei δ ein angemessener kleiner Wert (z.B. 10^{-6}) darstellt, der im Falle $d_j = 0$ eine Division durch Null verhindert.

Da sich das berechnete Gewicht nach (7-16) immer auf einen einzelnen (Beobachtungs)Punkt (x_j, y_j) bezieht, muß bei der Festlegung der Gewichtsmatrix darauf geachtet werden, daß sowohl der x- als auch der y-Koordinate dieses Punktes das *gleiche Gewicht* zugeordnet wird.

Die LAS-Methode hat die benutzerfreundliche Eigenschaft, daß sie *ohne* Tuningkonstante(n) auskommt und in rechentechnischer Hinsicht einfach und problemlos zu realisieren ist. Zudem ist sie eine Methode, die unempfindlich auf Ausreißer reagiert. Empirische Untersuchungen für Altkartenuntersuchungen haben gezeigt, daß ihr Stellenwert etwa dem des Huber-Schätzers entspricht.

Im übrigen läßt sich diese Methode (Anwendung der Längen von Restklaffungsvektoren anstelle der x- und y-Residuen) durch eine entsprechende Modifikation der Gewichtsfunktionen auch auf alle bisher vorgestellten Schätzer anwenden (siehe dazu CASPARY [1987] und das numerische Beispiel im Kapitel 7.3). Dann allerdings ist auch die Festlegung der spezifischen Tuningkonstanten zwingend erforderlich.

7.2.2 Rechentechnische Realisierung der Parameterschätzung

Die Bestimmung der Parameter mit robusten Zielfunktionen führt in der Regel auf die Auflösung eines nichtlinearen Gleichungssystems der Ordnung m ($m = \text{Anzahl der unbekannt Parameter}$), wozu es verschiedenen Methoden gibt (siehe BORUTTA [1988]). Im folgenden soll hier das Verfahren der *iterativen* Anwendung des *Kleinste-Quadrate Algorithmus* vorgestellt werden, das auf BEATON/TURKEY [1974] zurückgeht. Es ist im Gegensatz zu anderen Verfahren einfach und problemlos zu realisieren und konvergiert nach relativ wenigen Schritten.

(a) Grundprinzip (ein-Parameter-Schätzung)

Ausgehend von dem Minimumansatz nach (7-3) bzw. der impliziten Darstellung nach (7-4) und in Verbindung mit (7-6)

$$\sum_{i=1}^n \rho(u_i) = \sum_{i=1}^n \rho\left(\frac{\hat{x} - x_i}{s}\right) = \min \rightarrow \sum_{i=1}^n \psi(u_i) = \sum_{i=1}^n \psi\left(\frac{\hat{x} - x_i}{s}\right) = 0 \quad (7-17)$$

erhält man durch Substitution von $\psi(u) = u \cdot w(u)$ nach (7-5b) und einigen Umformungen eine Berechnungsformel in Analogie zum *gewichteten arithmetischen Mittel* (2-11a):

$$\hat{x} = \frac{\sum_{i=1}^n w\left(\frac{\hat{x} - x_i}{s}\right) \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n w\left(\frac{\hat{x} - x_i}{s}\right)} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n p_i} = \frac{\mathbf{p}^T \mathbf{x}}{\mathbf{p}^T \mathbf{e}} \quad ; \quad n = \text{Anzahl der Beobachtungen} \quad (7-18)$$

Da der zu bestimmende Parameter \hat{x} aber auch als Argument in der Gewichtsfunktion (w) enthalten ist, läßt er sich nur *iterativ* bestimmen.

Setzt man als **Startwert** nach (7-1) den Median

$$\hat{x}^{(0)} = \text{med}(x_i) \quad (7-19a)$$

lautet die **Iterationsvorschrift zur Berechnung des Lage- und Skalenparameters**

$$\left. \begin{aligned} s^{(k)} &= \text{med}(|\hat{x}^{(k)} - x_i|) \\ \hat{x}^{(k+1)} &= \frac{\sum_{i=1}^n p_i^{(k)} \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n p_i^{(k)}} \quad \text{mit: } p_i^{(k)} = w\left(\frac{\hat{x}^{(k)} - x_i}{s^{(k)}}\right) \end{aligned} \right\} k = 0, 1, 2, \dots \quad (7-19b)$$

wobei k der Iterationsindex bedeutet. *Kennzeichnend* für diesen Algorithmus sind die bei jedem Iterationsschritt *neu berechneten Gewichte* (p_i) aufgrund des verbesserten Lageparameters. Die Iteration kann abgebrochen werden, wenn sowohl die *Änderung* des Schätzwertes für den Lageparameter (\hat{x}) als auch für den Skalenparameter (s) hinreichend klein ausfällt.

Für die simultane Schätzung von Lage- und Skalenparameter lassen sich noch andere Verfahren anführen, die darauf hinauslaufen, den Skalenparameter ebenfalls als M-Schätzer zu bestimmen, wobei durch Vorgabe einer Konstanten eine Angleichung an die Normalverteilung

erzielt werden kann, wenn die Beobachtungen normalverteilten Grundgesamtheiten entsprechen (siehe BORUTTA [1988]). Da dies bei Altkartenuntersuchungen aber generell nicht zu erwarten ist, soll hier nicht weiter darauf eingegangen werden. Der Algorithmus nach (7-9) kann daher als *ausreichend* für die Berechnung des Lage- und Skalenparameters bei Altkartenuntersuchungen angesehen werden.

(b) Verallgemeinerung (mehr-Parameter-Schätzung)

Ausgehend von einem *linearen Ausgleichungsmodell* nach (2-2a)

$$\mathbf{l} + \mathbf{v} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} \quad ; \quad \mathbf{P} \quad (7-20)$$

führt die Verallgemeinerung des im vorhergehenden Abschnittes (a) dargelegten Grundprinzips hier auf den Minimierungsansatz

$$\sum_{i=1}^n \rho(u_i) = \sum_{i=1}^n \rho\left(\frac{v_i}{s}\right) = \sum_{i=1}^n \rho\left(\frac{\sum_{j=1}^m a_{ij} \cdot \hat{x}_j - l_i}{s}\right) = \sum_{i=1}^n \rho\left(\frac{\mathbf{a}_i^T \hat{\mathbf{x}} - l_i}{s}\right) = \min \quad (7-21)$$

wobei n die Anzahl der Beobachtungen, m die Anzahl der Unbekannten, a_{ij} die Elemente der \mathbf{A} -Matrix und \mathbf{a}_i der Zeilenvektor (i -te Beobachtung) der \mathbf{A} -Matrix bedeuten.

Für die Schätzung der unbekannt Parameter ($\hat{\mathbf{x}}$) erhält man nach der MkQ (siehe (2-4a))

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l} \quad (7-22)$$

wobei hier aber die Elemente der Gewichtsmatrix (\mathbf{P}) mit Hilfe einer *robusten Gewichtsfunktion* berechnet werden:

$$p_{ij} = \begin{cases} w(u_i) = w\left(\frac{v_i}{s}\right) = w\left(\frac{\mathbf{a}_i^T \hat{\mathbf{x}} - l_i}{s}\right) & ; \text{ für } i = j \\ 0 & ; \text{ für } i \neq j \end{cases} \quad (7-23)$$

Da diese Gewichtsmatrix aber wiederum vom Lösungsvektor $\hat{\mathbf{x}}$ abhängt, ergibt sich die Notwendigkeit einer **iterativen Berechnung**, die wie folgt durchgeführt werden kann:

$$\left. \begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}^{(k)} &= (\mathbf{A}^T \mathbf{P}^{(k)} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P}^{(k)} \mathbf{l} \\ v_i^{(k)} &= \mathbf{a}_i^T \hat{\mathbf{x}}^{(k)} - l_i \\ s^{(k)} &= \text{med}(|v_i^{(k)}|) \\ p_{ij}^{(k+1)} &= \begin{cases} w\left(\frac{v_i^{(k)}}{s^{(k)}}\right) & ; \text{ für } i = j \\ 0 & ; \text{ für } i \neq j \end{cases} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &k = 0, 1, 2, \dots \\ &\mathbf{P}^{(0)} = \mathbf{E} \\ &i, j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (7-24)$$

Als Startwert für die Gewichtsmatrix wird die Einheitsmatrix (\mathbf{E}) eingesetzt und bei jedem Iterationsschritt ($k = 0, 1, 2, \dots$) durchlaufen die Indizes i, j die Werte von eins bis $n =$ Anzahl der Beobachtungen. Die Iteration wird abgebrochen, wenn die Änderungen der Schätzwerte für $\hat{\mathbf{x}}$ und s hinreichend klein ausfallen.

Modifikation des Iterationsschemas für die LAS-Methode:

Da bei der LAS-Methode (siehe Abschnitt (e)) die Gewichte nicht aus den Residuen, sondern aus den Längen der Restklaffungsvektoren (d_j) berechnet werden, muß das Iterationsschema von (7-24) etwas modifiziert werden:

$$\left. \begin{aligned}
 \hat{\mathbf{x}}^{(k)} &= (\mathbf{A}^T \mathbf{P}^{(k)} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P}^{(k)} \mathbf{l} \\
 v_i^{(k)} &= \mathbf{a}_i^T \hat{\mathbf{x}}^{(k)} - l_i \\
 s^{(k)} &= \text{med}(|v_i^{(k)}|) \\
 d_j^{(k)} &= +\sqrt{(v_{2j-1}^{(k)})^2 + (v_{2j}^{(k)})^2} \\
 \mathbf{P}^{(k+1)} &= \text{diag} \left(\frac{1}{d_1^{(k)}}, \frac{1}{d_1^{(k)}}, \frac{1}{d_2^{(k)}}, \frac{1}{d_2^{(k)}}, \dots, \frac{1}{d_{n_p}^{(k)}}, \frac{1}{d_{n_p}^{(k)}} \right)
 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l}
 k = 0, 1, 2, \dots \\
 \mathbf{P}^{(0)} = \mathbf{E} \\
 i = 1, 2, \dots, n \\
 j = 1, 2, \dots, n_p
 \end{array} \quad (7-25)$$

Hier durchläuft bei jedem Iterationsschritt für die *Berechnung der Residuen* der Index i die Werte von eins bis n und für die *Berechnung der Längen der Restklaffungsvektoren* der Index j die Werte von eins bis $n_p = n/2 = \text{Anzahl der Punkte}$, wobei v_{2j-1} und v_{2j} die im Vektor $\mathbf{v} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{l}$ aufeinanderfolgenden x- und y-Residuen darstellen, wenn das Ausgleichungsmodell (7-20) so angelegt ist, daß im Beobachtungsvektor (\mathbf{l}) die Zielkoordinaten (x, y) ebenfalls alternierend angeordnet sind: $\mathbf{l}^T = \{x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_{n_p}, y_{n_p}\}$.

Die Bezeichnung "diag" in (7-25) drückt aus, daß die Reihe der aufgelisteten Argumente (Gewichte) die Hauptdiagonale der Gewichtsmatrix (\mathbf{P}) definiert. Alle anderen Elemente von \mathbf{P} sind immer auf Null zu setzen.

Um den Iterationsprozeß etwas zu beschleunigen, braucht der Skalenparameter (s) nicht unbedingt bei jedem Iterationsschritt neu berechnet werden, da er hier keinen Einfluß auf die Berechnungen der Gewichte hat. Es genügt auch, wenn er *nach* Abschluß der Iteration aus den endgültigen Residuen berechnet wird.

7.3 Praktischer Einsatz von robusten Schätzern

Bei praktischen Anwendungen muß zunächst die Festlegung einer oder mehrerer Tuningkonstanten der robusten Schätzer in Abhängigkeit von der Datenqualität gefunden werden. Für geodätische Aufgabenstellungen existieren hierzu umfangreiche Untersuchungen, deren Ergebnisse aber auch für Genauigkeitsuntersuchungen bei Altkarten als *Anhalt* für die Wahl dieser Konstanten herangezogen werden können (siehe BORUTTA[1987], ANDREWS [1972]).

So wird normalerweise die Tuningkonstante des Huber-Schätzers auf $\mathbf{k} = 1.5$ gesetzt, wobei dieser Wert auch bei allen anderen hier vorgestellten robusten Schätzern (mit Ausnahme der reinen LAS-Methode) verwendet werden kann. Für den Hampel-Schätzer setzt man $\mathbf{a} = \mathbf{k}$, so daß sich die anderen Konstanten \mathbf{b} und \mathbf{c} aus dem (zuvor festgesetzten) Verhältnis der drei Tuning-Parameter zueinander (z.B.: $\mathbf{a}:\mathbf{b}:\mathbf{c} = 1:2:4$ oder $1:2:3$) berechnen lassen.

Bei ersten Untersuchungen (siehe numerisches Beispiel in Tabelle 7.1 zur Maßstabsbestimmung einer Altkarte mit Hilfe der Ähnlichkeitstransformation) zeigt sich allerdings, daß die

Wahl der Tuningkonstanten (k) einen geringeren Einfluß ausübt als die Wahl der Schätzmethode (Huber, Hampel, ...). Hier besteht noch Forschungsbedarf, um die Ursachen näher zu untersuchen.

Die Frage, welcher robuste Schätzer für eine vorliegende Altkarte herangezogen werden soll, kann generell nach dem Verschmutzungsgrad entschieden werden, der aufgrund von Voruntersuchungen (z.B. Streuungsdiagramm, Restklaffungsvektoren) vermutet werden kann. So wird man den Huber-Schätzer bei geringfügig verschmutzten Daten einsetzen, den Hampel-Schätzer und die dänische Methode bei mittelmäßiger bis starker Verschmutzung. Mit dem **V-Schätzer** läßt sich der gesamte Bereich von geringer bis zur extremer Verschmutzung bei geeigneter Wahl des Kontaminierungsgrades (ϵ) und der Tuningkonstanten (k) abdecken, so daß diese Methode *universell*, insbesondere für Programmapplikationen, eingesetzt werden kann.

Wie unterschiedlich die Berechnungen mit den verschiedenen robusten Schätzern ausfallen können, soll ein numerisches Beispiel zur *Bestimmung des Maßstabes für die Tirolkarte* demonstrieren, wobei als Altkartenabbildung die *rechteckige Plattkarte* mit einem längentreuen Parallelkreis von $\varphi_0 = 27^\circ$ gewählt wird (siehe dazu Anhang B.1) Auf der Grundlage einer ausgleichenden Ähnlichkeitstransformation und der Transformationsrichtung: "*alt-nach-neu*", werden die Maßstabsberechnungen in Abhängigkeit von drei verschiedenen Tuningkonstanten ($k = 1.25, 1.50, 1.75$) durchgeführt (siehe Tabelle 7.1). Für die Gewichtsfunktionen $w(u)$ der jeweiligen Schätzer wurden die Argumente (u_i) nach (7-6) aus den Längen der Restklaffungsvektoren (d_i) wie folgt abgeleitet:

$$u_i = \frac{d_i - \bar{d}}{s} \quad ; \quad d_i = \sqrt{v_{x_i}^2 + v_{y_i}^2} \quad ; \quad \bar{d} = \text{med}(d_i) \quad ; \quad s = \text{med}(|d_i - \bar{d}|)$$

Des weiteren wurde für alle Schätzer das Gewicht $w(u) = 1$ für $d_i \leq \bar{d} + k \cdot s$ festgelegt.

k	Huber	Hampel (a:b:c = 1:2:3)	Dänische Methode	V-Schätzer ($\epsilon = 0.9$)	MkQ (zum Vergleich)
1.25	152 231	150 029	148 433	148 449	155 908
1.50	152 766	150 334	147 355	149 216	
1.75	153 196	150 899	148 659	150 015	

Tab. 7.1: Maßstabsbestimmungen "*alt-nach-neu*" für die Tirolkarte mit verschiedenen robusten Schätzern. Die mittlere Streuung beträgt bei allen Schätzern ca. ± 700 und wurde nach Formel (7-26) und (7-27) – siehe folgendes Kapitel 7.4 – abgeleitet.

Da man bei dieser Altkarte von einer *extremen Verschmutzung* der Daten ausgehen muß, liefern für $k=1.25$ die dänische Methode oder der V-Schätzer (hier mit einem hohen Kontaminierungsgrad von $\epsilon = 0.9$) die vertrauenswürdigsten Ergebnisse.

7.4 Schätzunsicherheit der robusten Parameterschätzung

Die traditionelle Schätzung der Standardabweichung (s_x) der unbekannt Parameter (\hat{x}) eines linearen Ausgleichsmodells der Form $I + v = A\hat{x}$, die mit Hilfe der MkQ ermittelt wurden, erfolgt unter der Annahme *normalverteilter* und *vieler* Beobachtungen ($n \rightarrow \infty$) *allgemein* nach

$$s_{x_i} = s_0 \cdot \sqrt{q_{ii}} \quad ; \quad q_{ii} \text{ aus: } \mathbf{Q} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \quad (7-26)$$

wobei s_0 der Gewichtseinheitsfehler und q_{ii} das i -te Diagonalelement der \mathbf{Q} -Matrix darstellt (siehe auch Kap. 2). Um die Schätzunsicherheit (Streuung) der mit robusten Schätzverfahren ermittelten Parameter zu erhalten, muß ein zu (7-26) äquivalenter mathematischer Ausdruck gefunden werden, der insbesondere auf die Bestimmung eines *robusten Gewichtseinheitsfehlers* (s_0) hinausläuft. Nach HUBER [1981] läßt sich dieser angenähert wie folgt ermitteln:

$$s_0 = \frac{\sqrt{\frac{1}{n-1} \sum \psi(u)^2 \cdot s^2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{n} \sum w(u)\right)^2}} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} n = \text{Anzahl der Beobachtungen} \\ \psi(u) = \text{Werte der } \psi\text{-Funktion} \\ w(u) = \text{Gewichte} \\ u = \frac{v}{s} \quad \text{mit} \begin{cases} v = \text{Residuen} \\ s = \text{MAD} \end{cases} \end{cases} \quad (7-27a)$$

Die Eigenschaft dieser Schätzfunktion besteht darin, daß im Falle $k \rightarrow \infty$ für die ψ -Funktion $\psi(u) = u$ und für die Gewichtsfunktion $w(u) = 1$ gilt, so daß der Ausdruck (7-27a) in die konventionelle Schätzung der Standardabweichung übergeht. Durch Multiplizieren mit dem Faktor $\sqrt{(n-1)/(n-p)}$ kann eine Verallgemeinerung für ein Ausgleichungsmodell mit mehreren Parametern ($p =$ Anzahl der Unbekannten) vorgenommen werden. Werden die Argumente (u_i) nach (7-6) aber aus den Längen der Restklaffungsvektoren (d_i) abgeleitet – bei Altkartenuntersuchungen mit Hilfe einer Ähnlichkeitstransformation der Normalfall (siehe Kap. 7.3 und Tabelle 7.1) – ist hier $p = 1$ zu setzen.

Da nach (7-5b) $\psi(u) = w(u) \cdot u$ gilt, kann (7-27a) als Funktion der (robusten) Gewichte und der Residuen sowie den Konstanten n und s auch folgendermaßen vereinfacht angegeben werden:

$$s_0 = \frac{s \cdot n}{\sum w(u)} \cdot \sqrt{\frac{\sum (w(u) \cdot u)^2}{n-1}} \quad (7-27b)$$

Durch Einsetzen von (7-27) in (7-26) erhält man die gesuchten Streuungsmaße für die ermittelten robusten Parameterschätzungen. Wie empirische Untersuchungen gezeigt haben, kann die Wahrscheinlichkeit mit ca. 50% angegeben werden. Das heißt z.B. für die Streuung des Medians (\tilde{x}), daß ca. 50% aller Beobachtungen im Intervall $\tilde{x} \pm s_0$ liegen.

Auf robuste Parameterschätzungen mit Hilfe der *LAS-Methode* kann die Formel (7-27) *nicht* angewendet werden, da hier die Gewichte nicht direkt aus den Residuen und dem MAD abgeleitet werden (siehe dazu Kap. 7.2.1(e)). Als Ersatz (für Vergleichszwecke bei Altkartenuntersuchungen hinreichend genau) kann die Schätzung des Gewichtseinheitsfehlers nach (2-5a) hergenommen werden, wobei nach HUBER [1981] eine *rückwirkende* Anpassung an die (robuste) Streuung durch den Faktor 0.6745 vorgenommen werden kann, wenn die Beobachtungen normalverteilt sind:

$$s_0 = 0.6745 \cdot \sqrt{\frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{n-p}} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} n = \text{Anzahl der Beobachtungen} \\ p = \text{Anzahl der Unbekannten} \\ \mathbf{v} = \text{Vektor der Residuen} \\ \mathbf{P} = \text{Gewichtsmatrix} \end{cases} \quad (7-28)$$

Da bei Stichproben für Altkartenuntersuchungen aber keine Normalverteilung vermutet werden kann (siehe Kap. 6), ist die Formel (7-28) nur für grobe Abschätzungen sinnvoll.

Kapitel 8

Visualisierung von Genauigkeitsanalysen

Maßzahlen und Genauigkeitsangaben, wie z.B. *mittlerer Maßstab* und *Standardabweichung* sind Ergebnisse von Ausgleichsrechnungen und repräsentieren die zu untersuchenden Altkarten *im ganzen*. Zur Beurteilung *lokaler* Genauigkeiten müssen die bei den Berechnungen anfallenden Einzelwerte bzw. die Abweichungen (Residuen) vom Referenzmodell herangezogen werden. Der Nachteil dieser bei Altkartenuntersuchungen in sehr hoher Anzahl rein digital vorliegenden Daten liegt in ihrer mangelnden Anschaulichkeit. Aus diesem Grund sind graphische Darstellungen der Untersuchungsergebnisse besonders geeignet, da sie unmittelbar auf *einen Blick* die Genauigkeit bzw. Ungenauigkeit der Altkarte in ihrer lokalen Differenzierung für den gesamten Kartenausschnitt zeigen.

Einen Überblick über die bis heute bekannten graphischen Verfahren liefert die Arbeit von FORSTNER und OEHLI [1998]. Danach lassen sich (mindestens) 10 Methoden anführen, die zum Teil auch in Kombinationen angewendet werden können. Im Sinne der Aufgabenstellung der vorliegenden Arbeit soll hier aber nur auf Möglichkeiten und Ansätze *neuer* Visualisierungsverfahren eingegangen werden, die auf folgende drei Grundverfahren zurückgehen:

- Restklaffungsvektoren
- Dreiecksvermaschung
- Reguläres Gitternetz

Wegen der unterschiedlichen Aufgabenstellungen und benutzerspezifischen Anforderungen können die meisten dieser graphischen Methoden mit professionellen Mathematikprogrammen (z.B. Mathcad, Mathematica) in der Regel *nicht* zufriedenstellend gelöst werden. Die hier dokumentierten Abbildungsbeispiele sind das Ergebnis von Applikationen, die speziell für Altkartenuntersuchungen im Rahmen dieser Arbeit entwickelt wurden, aber noch mit professionellen Graphikprogrammen (z.B. FreeHand) zu Präsentationszwecken nachbearbeitet wurden. Die Nachbearbeitung beschränkte sich dabei lediglich auf die Festlegung von Strichstärken, Farben und Textformatierungen.

8.1 Methode der Restklaffungsvektoren

Die Darstellung von Restklaffungsvektoren $v^T = (v_x, v_y)$ aus den Residuen in x- und y-Richtung, wie sie aus einer ausgleichenden Koordinatentransformation (z.B. Ähnlichkeits- oder Affintransformation) ermittelt werden (zur Berechnung siehe Kap. 2.2 und 5.2), ist eine sehr anschauliche Methode lokale Verzerrungen der Ortslagen in der Altkarte sichtbar zu machen, da sie die *Richtungen* und *Längen* als **Verbesserungen** zu den jeweiligen Referenzpunkten nach einer modernen Karte aufzeigen. Die Längen der Restklaffungsvektoren sollten dabei möglichst unverzerrt, also im Vektormaßstab 1 : 1 wiedergegeben werden, da bei Altkartenuntersuchungen wegen der generell großen Residuen eine Skalierung (in der Regel Vergrößerung) nicht notwendig ist. In Ausnahmefällen (bei überwiegend kleinen Restklaffungsvektoren) kann davon aber abgesehen werden.

Die Darstellung der Restklaffungsvektoren (i.d.R. Verbesserungsvektoren) erfolgt zweckmäßig im Koordinatensystem der Altkarte, damit z.B. bei einer kombinierten Darstellung mit einer unterlegten Altkarte, die Paßpunkte deckungsgleich mit den entsprechenden Ortslagen in der Altkarte gebracht werden können (siehe folgende Abb. 8.1).

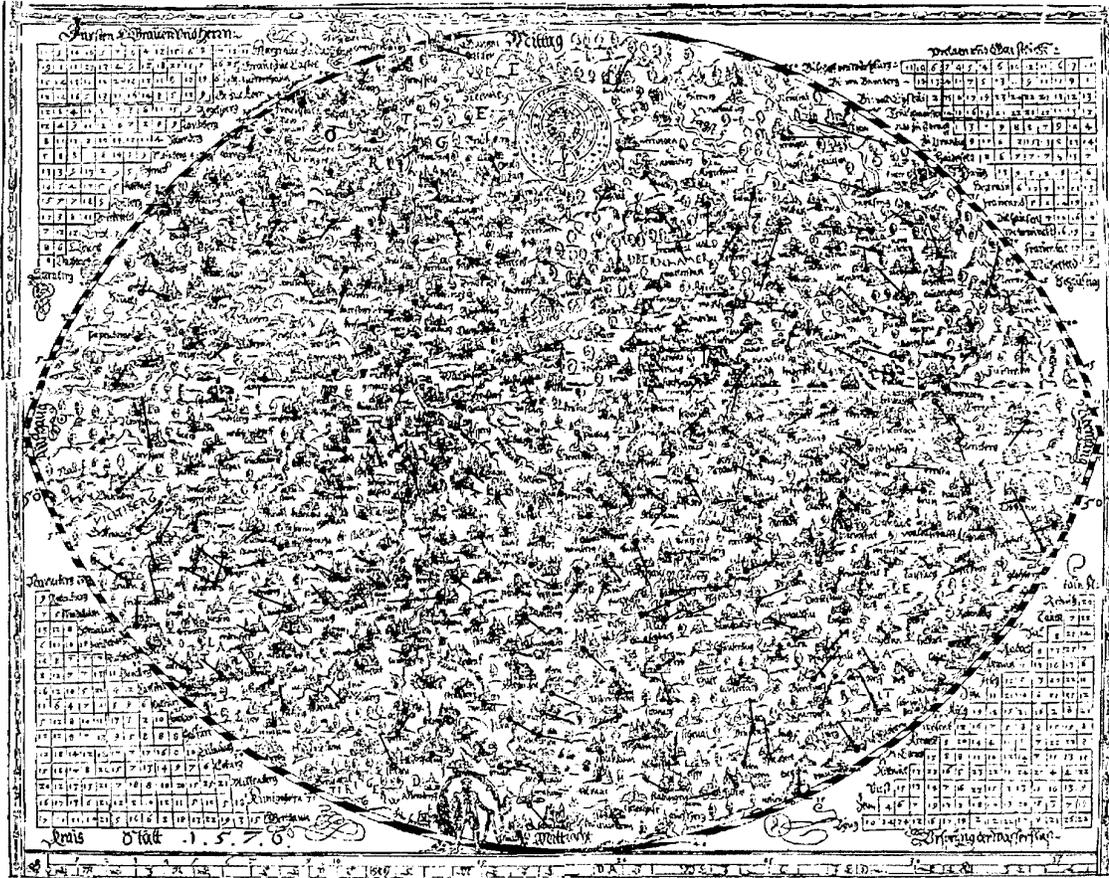


Abb. 8.1: Restklaffungsvektoren (Vektormaßstab 2 : 1) mit der unterlegten Karte des Fränkischen Kreises von DAVID SETZLIN aus dem Jahre 1576. In: [BRUNNER, 1995]

Diese herkömmliche Form der Darstellung von Restklaffungsvektoren (mit oder ohne unterlegter Altkarte) ist häufig angewandt und publiziert worden. Um eine differenziertere Genauigkeitsaussage zu erhalten, ist es aber wünschenswert *ausreißerverdächtige* Punkte und *grobe Fehler* deutlich sichtbar hervorzuheben. Diese Möglichkeit einer verbesserten Darstellung soll im folgenden an zwei Beispielen demonstriert werden, wobei gleichzeitig der Vorteil des Einsatzes *robuster Schätzverfahren* veranschaulicht werden soll, in dem die Restklaffungsvektoren zunächst traditionell nach der Methode der kleinsten Quadrate (MkQ) und dann mit Hilfe der robusten Schätzung berechnet werden.

Als Ausreißerkriterium wurde hier die **3-Sigma-Regel** angewendet, d.h. alle Restklaffungsvektoren deren Abweichungen vom Mittelwert der Restklaffungsvektoren größer als der dreifache Betrag der Standardabweichung sind, werden in der graphischen Darstellung (im Gegensatz zu den restlichen Restklaffungsvektoren) z.B. durch eine andere Farbe gekennzeichnet, so daß die *ausreißerverdächtigen* Punkte sofort auf *einen Blick* erkannt werden können.

Die *Längen der Restklaffungsvektoren* werden sowohl bei der MkQ als auch bei der robusten Schätzung generell nach $d_i = +\sqrt{v_{x_i}^2 + v_{y_i}^2}$ berechnet, wobei die Residuen und damit auch Längen der einzelnen Restklaffungsvektoren nach beiden Verfahren aber unterschiedlich sind.

Bei der traditionellen Vorgehensweise ergeben sich für die *mittlere Länge der Restklaffungsvektoren* (\bar{d}) und deren *Standardabweichung* (s_0)

$$\bar{d} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n d_i \quad s_0 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (d_i - \bar{d})^2}{n-1}}$$

Der *Testwert* wird dann wie folgt definiert: $T_1 = \bar{d} + 3 \cdot s_0$.

Bei der robusten Schätzung ergeben sich nach den Formeln (7-1,2) die äquivalenten Größen *Lageparameter*: $\tilde{d} = \text{med}(d_i)$ und *Skalenparameter*: $s_{\text{MAD}} = \text{med}(|d_i - \tilde{d}|)$. Als *Testwert* wird $T_2 = \tilde{d} + 3 \cdot s_{\text{MAD}}$ festgelegt.

Überschreiten die Längen der einzelnen Restklaffungsvektoren d_i die entsprechenden Testwerte T_1 bzw. T_2 werden sie in der graphischen Darstellung markiert (*rot*). Die folgenden Abbildungen 8.2 und 8.3 demonstrieren anschaulich die Wirkungsweise dieser Methode.

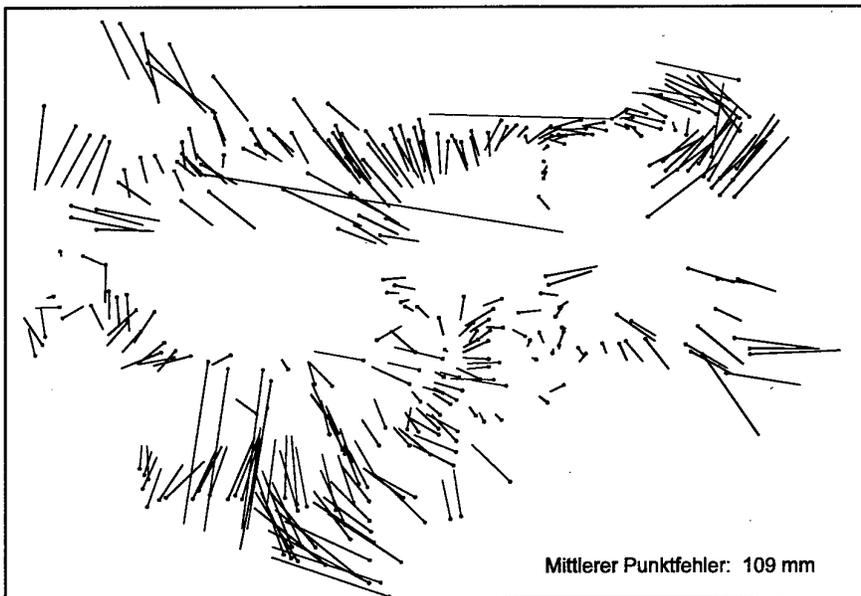


Abb. 8.2:
Restklaffungsvektoren nach der **Methode der kleinsten Quadrate** für die Tirolkarte von BURGKLECHNER aus dem Jahre 1611.

Von 316 Punkten werden *sechs grobe Fehler* erkannt.

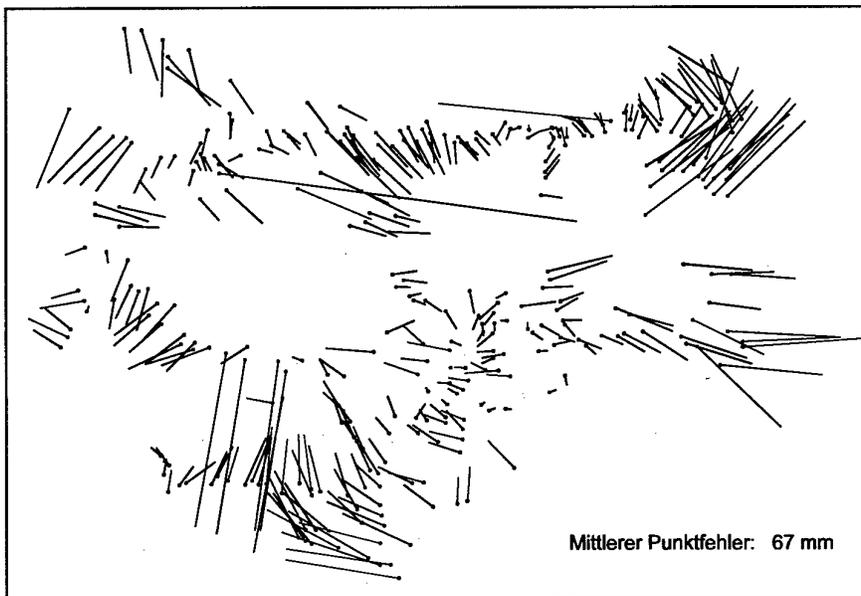


Abb. 8.3:
Restklaffungsvektoren nach **robustem Schätzverfahren** (Dänische Methode mit $k = 1.5$) für die Tirolkarte von BURGKLECHNER aus dem Jahre 1611.

Von 316 Punkten werden neben *sechs groben Fehlern* noch *29 ausreißerverdächtige Punkte* erkannt.

8.2 Methode der Dreiecksvermaschung

Diese Methode hat insbesondere den Vorteil, daß sie *universell* für eine Vielzahl von graphischen Darstellungsverfahren zur Visualisierung von Genauigkeitsanalysen einsetzbar ist. So lassen sich mit ihr z.B.:

- traditionelle *Dreiecksseiten- und Dreiecksflächenmethoden* realisieren (siehe FORSTNER und OEHLI [1998]),
- *topologische Unstimmigkeiten* in der Altkarte nachweisen,
- *Isolinien* zur graphischen Darstellung von (absoluten und relativen) Genauigkeitsmaßen (Isodeformate) und *Verzerrungsgitter* generieren sowie *grobe Fehler* aufdecken.

Nachfolgend soll hier im Sinne der Aufgabenstellung der vorliegenden Arbeit nur auf die Methoden zur Erkennung *topologischer Unstimmigkeiten* und auf die o.a. Möglichkeiten der *Isoliniendarstellung* eingegangen werden.

8.2.1 Optimale Dreiecksvermaschung

Die Anwendung dieser Methode verlangt eine optimale Dreiecksvermaschung des zu untersuchenden unregelmäßig verteilten Punktfeldes. Das dazu am häufigsten verwendete Verfahren ist die *Delaunay-Triangulation* (DELAUNAY [1934]). Vereinfacht ausgedrückt, wird ausgehend von der kleinsten Basis-Dreiecksseite, aus der Menge der benachbarten Punkte derjenige ausgewählt, der den größten Scheitelwinkel zu dieser Basisseite bildet. Dieser Prozeß wird sukzessiv für alle neu gefundenen Dreiecksseiten (jeweils zwei) wiederholt bis alle Punkte abgearbeitet sind. Im Endergebnis liefert die Delaunay-Triangulation für jedes bestimmte Dreieck ein Zahlentripel aus Punktnummern, welche die zu verbindenden Dreieckspunkte angibt.

Für die rechentechnische Realisierung existieren eine Menge veröffentlichter Vorschläge und frei zugänglicher Quellprogramme für verschiedene Programmiersprachen und Plattformen (PC, Workstation). Der für die Programmierung hier verwendete Algorithmus stammt von WATSON [1982]. Der Quellcode dazu ist klein (50 Zeilen) und das Programm arbeitet auch bei sehr vielen Punkten sehr schnell und zuverlässig.

8.2.2 Erkennung von topologischen Unstimmigkeiten

Unter Topologie wird allgemein die *Lehre von der Lage und Anordnung geometrischer Gebilde im Raum oder in der Ebene* verstanden. Da es in Altkarten häufig vorkommt, daß die relativen Lageanordnungen von Ortspositionen (Istlagen) nicht mit den entsprechenden relativen Lageanordnungen der Ortspositionen nach einer modernen Karte (Sollagen) übereinstimmen, werden im folgenden diese fehlerhaften Kartierungen als *topologische Unstimmigkeiten bzw. Widersprüche* bezeichnet, wobei diese sich *ausschließlich* auf die geometrischen Lageanordnungen von *Ortschaften* relativ zueinander beziehen. Die Anzahl der mit der nachstehend beschriebenen Methode lokalisierten topologischen Unstimmigkeiten kann als ein weiteres Genauigkeitsmaß zur Beurteilung von Altkarten herangezogen werden.

Auf der Grundlage einer Delaunay-Triangulation mit den Punktkoordinaten nach einer modernen Karte kann die Überprüfung auf topologische Unstimmigkeiten relativ simpel durchgeführt werden. Dazu braucht lediglich geprüft werden, ob in jedem Dreieck der Drehsinn der Numerierungsfolge der Dreieckspunkte (im Uhrzeigersinn bzw. gegen den Uhrzeigersinn) auch in der Altkarte mit den entsprechenden homologen Dreieckspunkten identisch ist. Ist der Drehsinn entgegengesetzt liegt nachweislich ein Widerspruch vor.

Der Drehsinn läßt sich für irgendein (Delaunay-)Dreieck am einfachsten mit Hilfe einer beliebigen Dreieckshöhe ermitteln, im folgenden *Querabweichung* (q) genannt. Dazu betrachte man die Abbildung 8.4. Ausgehend von der Basisstrecke zwischen den ersten beiden Punkten (1-2) nach der modernen Karte, liegt der dritte Punkt rechts von der Basisstrecke. Die Numerierungsfolge (und damit der Drehsinn) liegt hier also *im* Uhrzeigersinn vor. In der Altkarte dagegen liegt der homologe dritte Punkt (3') links der homologen Basisstrecke (1'-2'). Damit liegt eine *Umklappung* des Ausgangsdreiecks über die Basisseite vor, was zur Folge hat, daß sich eine Numerierungsfolge *gegen* den Uhrzeigersinn ergibt und somit eine topologische Unstimmigkeit vorliegt.

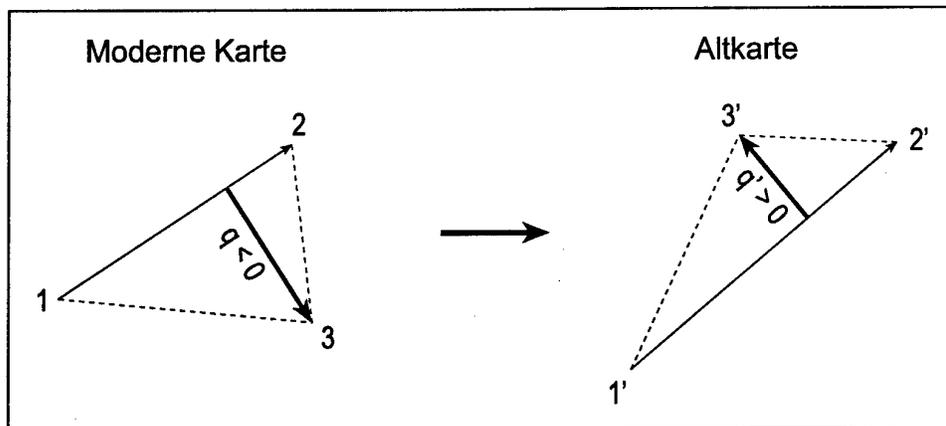


Abb. 8.4: Beispiel für das Auftreten eines topologischen Widerspruchs, wenn die Querabweichungen (q bzw. q') des dritten (homologen) Dreieckspunktes von der Basisseite (1-2 bzw. 1'-2') in beiden Karten entgegengesetzte Richtungen aufweisen.

Der Drehsinn kann über die Querabweichung (q) des dritten Punktes von der Basisstrecke der ersten beiden Punkte bestimmt werden und wird aus den Punktkoordinaten nach der modernen Karte wie folgt berechnet:

$$q = (y_3 - y_1) \cdot \cos(\alpha_{1,2}) - (x_3 - x_1) \cdot \sin(\alpha_{1,2}) \quad ; \quad \text{mit } \alpha_{1,2} = \arctan\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)$$

Durch einsetzen der homologen Punktkoordinaten der Altkarte in die o.a. Formel ergibt sich die entsprechende Querabweichung q' .

Die Entscheidung, ob eine topologische Unstimmigkeit in einem Dreieck vorliegt wird allein über das Vorzeichen der Querabweichungen bestimmt. Haben beide Querabweichungen *gleiche* Vorzeichen, also ($q < 0$ und $q' < 0$) oder ($q > 0$ und $q' > 0$) liegt in beiden Karten der *gleiche* Drehsinn und damit **kein Widerspruch** vor. Haben beide Querabweichungen dagegen *ungleiche* Vorzeichen, also ($q < 0$ und $q' > 0$) oder ($q > 0$ und $q' < 0$) liegt in beiden Karten ein *entgegengesetzter* Drehsinn und damit **ein topologischer Widerspruch** vor.

Für die Visualisierung wird die Dreiecksvermaschung im Koordinatensystem der Altkarte dargestellt, wobei sich die Punktverbindungen auf der Grundlage der Delaunay-Triangulation nach der modernen Karte richten. Dadurch werden topologische Unstimmigkeiten sofort durch *überschneidende Dreiecksseiten* sichtbar. Um sie in der graphischen Darstellung deutlich hervorzuheben ist es zweckmäßig sie mit einer anderen Farbe (z.B. rot) als die übrigen Dreiecke zu kennzeichnen (siehe Abb. 8.5).

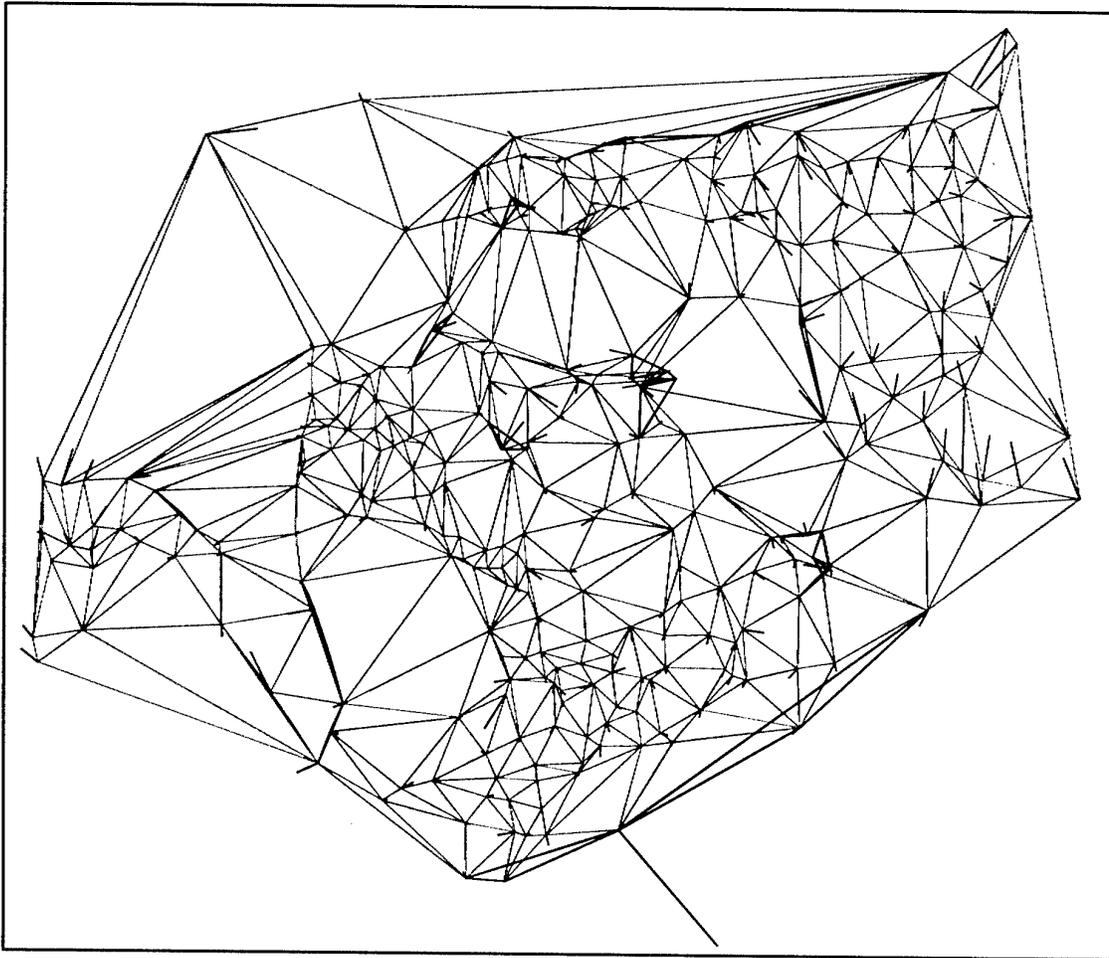


Abb. 8.5: Dreiecksvermaschung des Punktfeldes der *Ostfrieslandkarte* von UBBO EMMIUS (1595) auf der Grundlage einer Delaunay-Triangulation mit den Referenzpunkten nach einer modernen Karte und Markierung von **topologisch widersprüchlichen Dreiecken** (rot) und **Restklaffungsvektoren** (blau) nach einer Ähnlichkeitstransformation, die auf die Ortspositionen der (lagerichtigen) Referenzpunkte zeigen.

Mit diesem Verfahren lassen sich zwar auf einfache Weise topologische Unstimmigkeiten feststellen. Es kann aber nicht immer mit Bestimmtheit gesagt werden, welche(r) von den drei Punkten einer Dreiecksmasche dafür verantwortlich ist. Als *Entscheidungshilfe* zur Überprüfung der Rohdaten und Eliminierung grob fehlerhafter bzw. fehlerverdächtiger Dreieckspunkte können hier z.B. die **Restklaffungsvektoren** nach einer (robusten) Ähnlichkeits- oder Affintransformation herangezogen werden, die zusätzlich in die graphische Darstellung eingetragen werden (siehe Abb. 8.5). In einem topologisch widersprüchlichen Dreieck wird man dann zuerst denjenigen Punkt überprüfen, der den größten Restklaffungsvektor aufweist.

Wünschenswert wäre hier eine weitestgehend vollautomatische rechnerische Reduzierung topologisch widersprüchlicher Punkte, was sich aber als sehr schwierig erweist, da auch mit Restklaffungsvektoren die Fehlerursache nicht immer eindeutig geklärt werden kann. Hier besteht auf jeden Fall noch Forschungsbedarf.

Ergänzend sei noch erwähnt, daß zur *vollständigen* Topologieprüfung nach dem hier vorgestellten Verfahren sie auch in *umgekehrter Richtung* durchgeführt werden muß, d.h. die Delaunay-Triangulation wird dann auf der *Grundlage der Altkartenpunkte* berechnet und die Punktverbindungen erfolgen mit den Punktkoordinaten der modernen Karte. Erst dann wird eine umfassende Aussage über die Topologieeigenschaft der vorliegenden Altkarte erhalten.

8.2.3 Isolinien

Die geläufigsten Formen von Isolinien-Darstellungen bei Genauigkeitsuntersuchungen für Altkarten sind

- **Isodeformate**
- **Verzerrungsgitter (auch: Verzerrungsnetze)**

und stellen neben den Restklaffungsvektoren *zwei weitere* sehr anschauliche Methoden dar. Darüber hinaus lassen sich mit der hier vorgestellten Methode zur Generierung von Verzerrungsgittern auch *Ausreißer* und *grobe Fehler* aufdecken.

(a) Isodeformate

Unter *Isodeformaten* werden im allgemeinen Linien verstanden, die Punkte gleicher Verzerrungswerte (bzw. Fehler) verbinden. Dazu zählen bei Genauigkeitsanalysen für Altkarten an erster Stelle *Linien gleicher Restklaffungsbeträge*, wobei die Restklaffungsvektoren der einzelnen Paßpunkte z.B. nach einer ausgleichenden Affintransformation ermittelt wurden. Es können aber auch Isodeformate mit *relativen* Genauigkeitsangaben, wie z.B. *Abweichungen vom mittleren Restklaffungsvektor* dargestellt werden. Die Möglichkeiten zur Darstellung von Isodeformaten sind vielfältig und hängen vom jeweiligen Zweck der gewünschten Aussage ab.

Unter der Annahme, daß die Einzelwerte ein *Kontinuum* beschreiben, entspricht die Bestimmung von Isodeformaten der Aufgabenstellung, wie man sie für die Ableitung von Höhenlinien aus einem digitalen Gelände- bzw. Höhenmodell kennt, nur daß anstelle der Höhenkoten (z_i) hier z.B. die Längen der Restklaffungsvektoren (d_i) treten. Für die automatische Generierung von Isolinien existiert seit Einsatz der elektronischen Datenverarbeitung eine Vielzahl veröffentlichter Vorschläge aus den Natur- und Ingenieurwissenschaften, wobei die Berechnung auf der Grundlage von Dreieckselementen wesentlich anspruchsvoller und aufwendiger ist, als beispielsweise über reguläre Gitternetzpunkte (siehe Kap.8.3).

Die *einfachste* und hier bei Genauigkeitsanalysen für Altkarten in einigen Fällen völlig ausreichende Methode ist die **lineare Interpolation**, wobei jede Dreiecksmasche als orthogonale Projektion einer *Schrägebene* durch die drei "Höhenkoten" z_1, z_2, z_3 (hier z.B. Längen der Restklaffungsvektoren) angesehen wird.

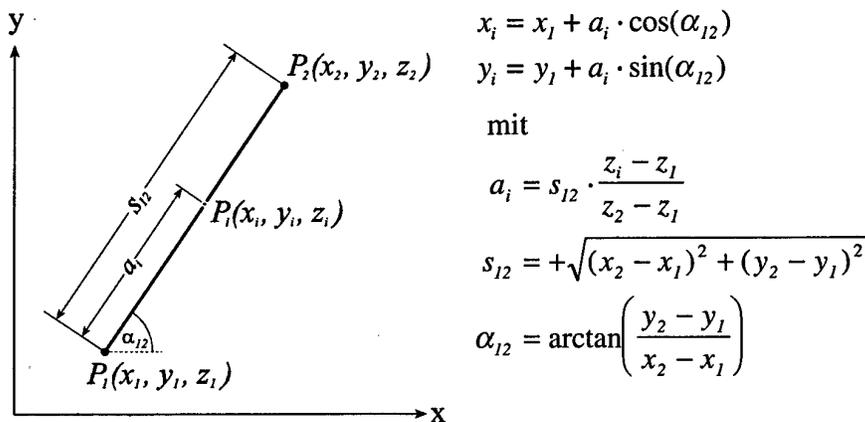


Abb. 8.6: Lineare Interpolation auf einer Dreiecksseite zur Berechnung der Lagekoordinaten (x_i, y_i) von runden Konturwerten (z_i)

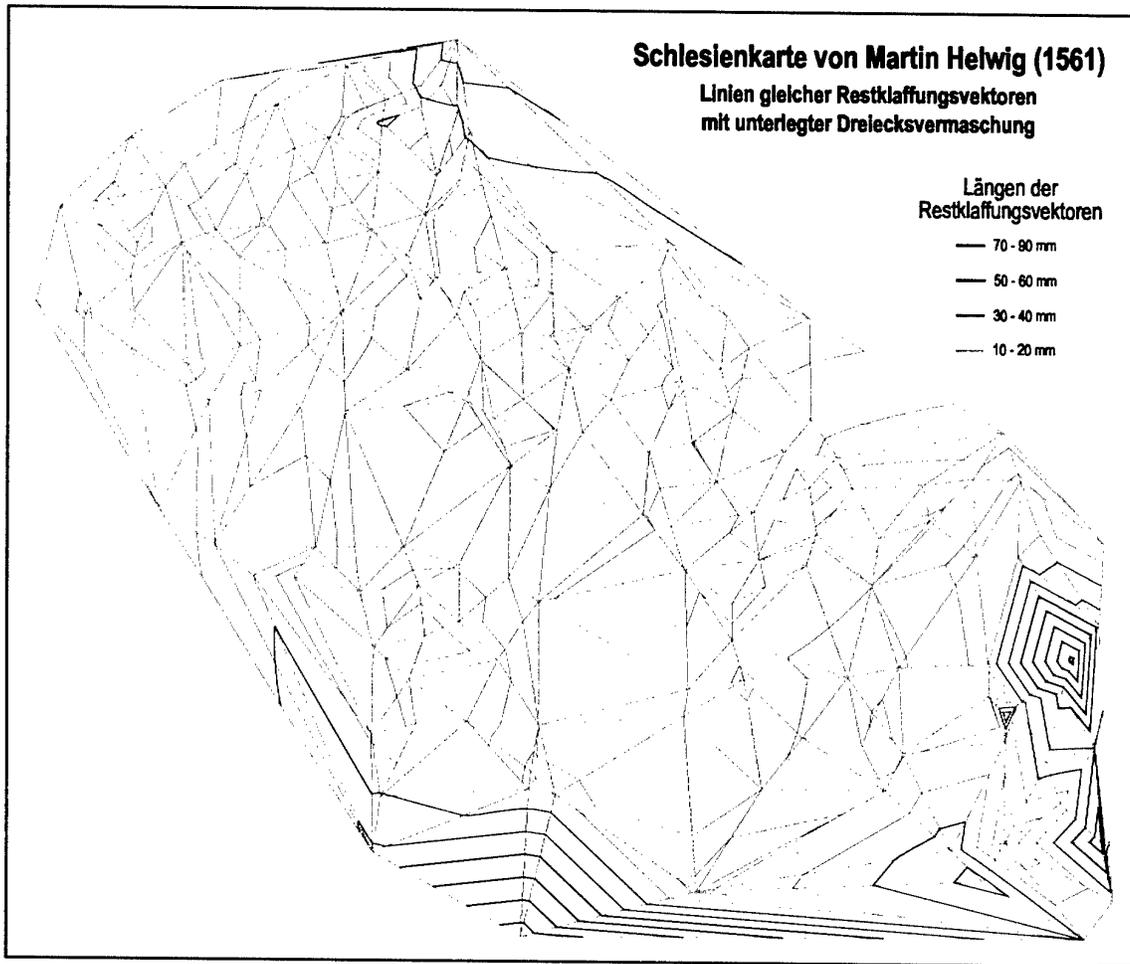


Abb. 8.7: *Lineare Interpolationsmethode* zur Darstellung von **Isodeformaten** (Linien gleicher Restklaffen) mit hinterlegter Dreiecksvermaschung. Deutlich zu sehen ist die dichte Scharung der Isolinien im unten rechten Bereich der Karte, wo Restklaffungsvektoren bis zu einer Länge von 90 mm auftreten.

Dazu wird der Reihe nach in *jedem* mit Hilfe der Delaunay-Triangulation gefundenen Dreiecken (definiert durch die jeweiligen Punktnummern) auf den einzelnen Seiten eine lineare Interpolation mit den vorgegebenen runden Kontur- bzw. Niveauwerten ($z_i = z_1, z_2, \dots, z_n$) vorgenommen (siehe Abb. 8.6). Innerhalb eines jeden Dreiecks brauchen jetzt nur noch die auf den Dreiecksseiten gefundenen Punkte mit *gleichem* Konturwert gradlinig verbunden werden. Die Abbildung 8.7 zeigt das Ergebnis dieses Verfahrens am Beispiel der Schlesienkarte von MARTIN HELWIG zur Darstellung von *Linien gleicher Restklaffen* mit der hinterlegten Dreiecksvermaschung. Für Interpretationsaussagen ist es natürlich erforderlich, daß die einzelnen Isolinien mit den entsprechenden Niveauwerten beschriftet werden. Zum Zweck der besseren Lesbarkeit wurde aber hier eine farbige Differenzierung der Konturwerte (Längen der Restklaffungsvektoren) vorgenommen.

Anstatt die Punkte gleicher Konturwerte linear zu verbinden, besteht hier noch die Möglichkeit, die Punktverbindungen z.B. mit Hilfe von Splinefunktionen [SPÄTH, 1986] vorzunehmen. Diese Methode eignet sich aber generell nur für solche Fälle, bei denen *keine enge* Scharung der Isolinien auftritt, denn bekanntlicher Weise neigt die Splinefunktion bei extremen Richtungsänderungen aufeinander folgender Punkte zum starken überschwingen, was zur Folge haben kann, daß eng benachbarte Isolinien sich gegenseitig schneiden, was unerwünscht ist. Abhilfe kann hier in der Regel eine größer gewählte Äquidistanz schaffen.

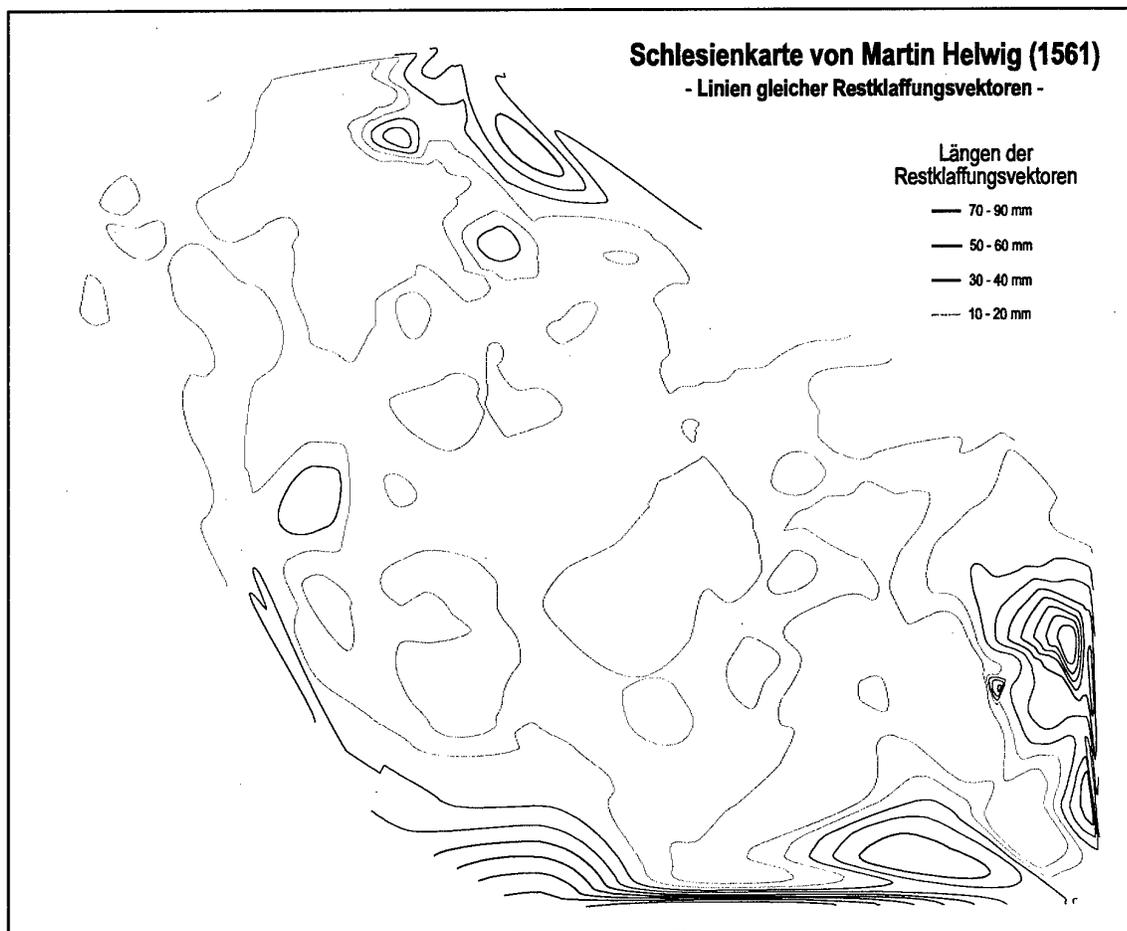


Abb. 8.8: Darstellung von Isodeformaten mit Hilfe einer *bivariaten Interpolation* über Dreieckselemente durch Polynome 5. Ordnung

Um einen harmonisch glatten Verlauf der Isolinien (ohne Überschneidungen) zu erhalten, müssen den Dreiecksmaschen *Flächen höherer Ordnung* zugeordnet werden, wobei gewährleistet werden muß, daß die Funktionsansätze einen stetigen und differenzierbaren Übergang zwischen benachbarten Dreieckselementen besitzen müssen.

Dazu wurde im Rahmen dieser Arbeit ein Softwareprogramm entwickelt, das auf dem veröffentlichten Algorithmus von PREUSSER [1983, 1984] zurückgeht und hier speziell für die graphischen Darstellungen bei Altkartenuntersuchungen modifiziert wurde. Der Funktionsansatz für die Berechnung der Isolinien ist eine *bivariate Interpolation* über die Dreieckselemente durch Polynome 5. Ordnung mit C_1 -Kontinuität (stetiger und differenzierbarer Übergang zwischen benachbarten Dreiecksmaschen).

Abbildung 8.8 zeigt die Anwendung dieses Verfahrens für die Schlesienskarte von MARTIN HELWIG, wobei die Konturwerte (Längen der Restklaffungsvektoren) farblich differenziert dargestellt werden.

(b) Verzerrungsgitter

Die Methode zur Darstellung von Verzerrungsgittern wird in der Literatur häufig IMHOF [1939, 1964] zugeschrieben. Die Anwendung wurde aber schon lange vor ihm (Ende des 19. Jahrhunderts), damals noch unter der Bezeichnung "Kartometrische Methode" von HERMANN WAGNER (1840-1929) praktiziert (nach FORSTNER und OEHLI [1998]).

Unter einem Verzerrungsgitter wird die *Abbildung von geographischen oder kartesischen Isolinien* nach einer modernen Karte *in der Altkarte* verstanden. Die Gitterlinien stellen demnach die Punktverbindungen gleicher (runder) Koordinatenwerte dar. Bei Altkartenuntersuchungen sind das entweder:

- Linien gleicher geographischer Längen und Breiten ($\lambda_i, \varphi_i = \text{konstant}$) oder
- Linien gleicher kartesischer Koordinaten ($x_i, y_i = \text{konstant}$).

Verzerrungsgitter zeigen gleichermaßen *Dehnungen, Stauchungen und Verdrehungen* in der lokalen Differenzierung für die gesamte Altkarte auf und stellen ein ausgezeichnetes Hilfsmittel zur Visualisierung und Beurteilung der Genauigkeit alter Karten dar.

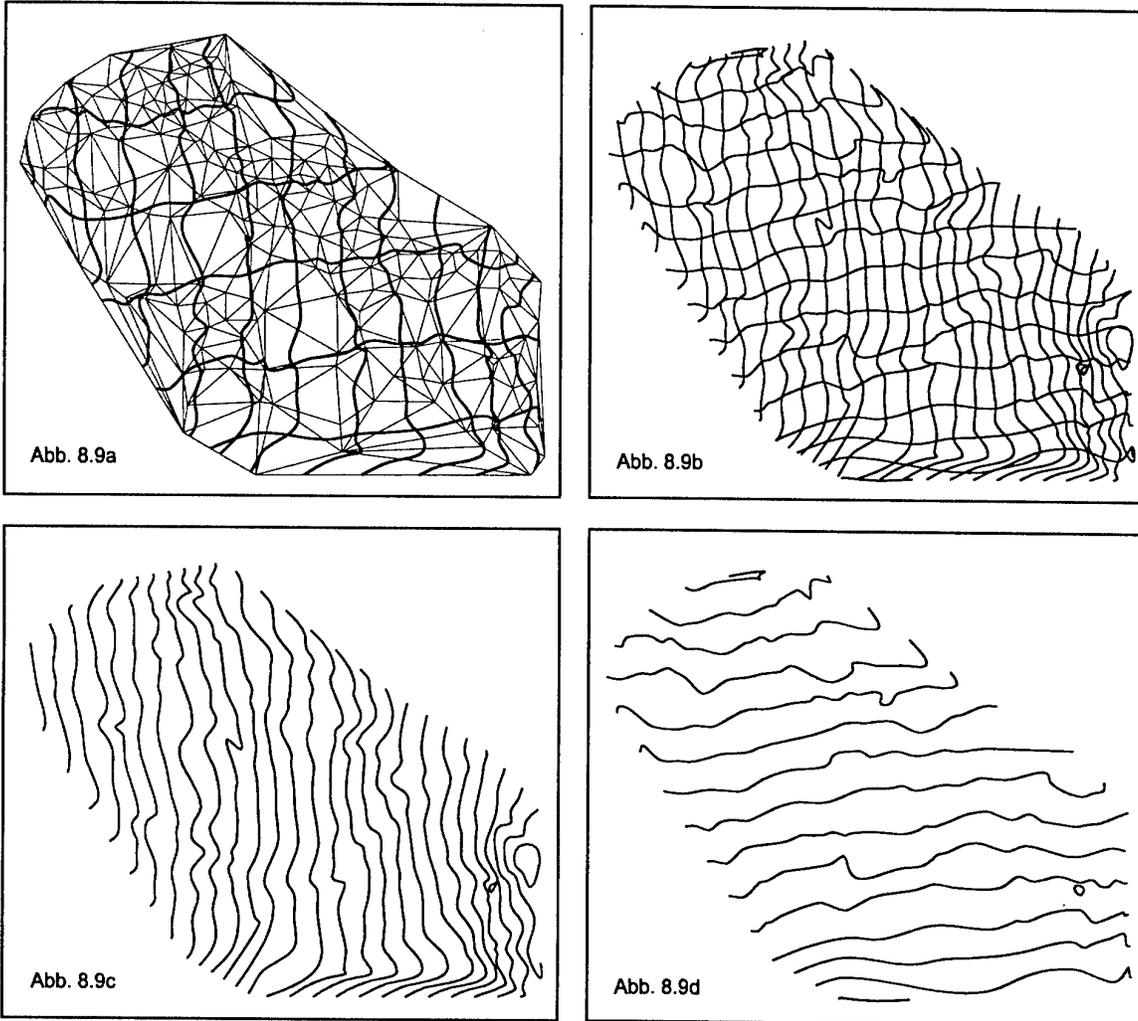


Abb. 8.9: Verzerrungsgitter (a,b) und Verzerrungslinien (c,d) der Schlesienkarte von MARTIN HELWIG (1561). Generiert durch *lineare Interpolation* auf den Dreiecksseiten, wobei Interpolationspunkte mit gleichen Niveauewerten hier durch *Splinefunktionen* verbunden wurden.

Für die Darstellung eines Verzerrungsgitters auf der Grundlage einer Delaunay-Triangulation, können die gleichen im Abschnitt (a) beschriebenen Algorithmen angewendet werden. Die Berechnung erfolgt allerdings getrennt nach den Koordinaten-Haupttrichtungen, wobei z.B. für die z-Koordinaten entweder die geographischen Längen (λ_i) oder die geographischen Breiten (φ_i) der Ortspositionen nach einer modernen Karte eingesetzt werden. Eine anschließende Zusammenfügung dieser getrennt berechneten Isolinien ergibt schließlich das gesuchte Verzerrungsgitter (siehe Abb. 8.9a,b).

Bei der Darstellung von Verzerrungsgittern sollte eine angemessene Maschenweite (Äquidistanz) der Isolinien gewählt werden, damit lokale Verzerrungen deutlich herauskommen. Häufig wird eine zu grobe Maschenweite gewählt. Kleine lokale Ausschwingungen der einzelnen Isolinien - hervorgerufen durch die im Vergleich zur Äquidistanz der Isolinien dichtere Dreiecksvermaschung - haben wenig Aussagekraft, weil der Abstand zu den benachbarten Isolinien zu groß ist.

In Abbildung 8.9a ist dies z.B. deutlich zu erkennen. Die Maschenweite beträgt hier sowohl für die geographischen Längen als auch für die Breiten 30'. Dagegen beträgt die Maschenweite in Abbildung 8.9b nur 12' und ergibt eine wesentlich bessere Visualisierung der lokalen Verzerrungen wieder. Sie macht aber ebenfalls deutlich, daß bei kleiner werdenden Maschenweite auch mehr Fehler im Gitterlinienbild in Erscheinung treten, die sich z.B. durch s-förmige Kurvenzüge, irregulär Überschneidungen, Schlingenbildung oder im Extremfall *geschlossene* Linienzüge bemerkbar machen. Hauptursachen dafür sind in der Regel - wenn *Eingabefehler* absolut ausgeschlossen werden können - *topologische Unstimmigkeiten* der Ortspeditionen in der Altkarte.

Da bei lokalen Häufungen dieser Fehler im Verzerrungsgitter ein kaum auseinander zu haltendes Linienengewirr entsteht, empfiehlt sich für genaue Analysen eine getrennte Darstellung der λ - und φ -Linien (*Verzerrungslinien*), wie sie z.B. in den Abbildungen 8.9c und 8.9d (separiert aus dem Verzerrungsgitter nach Abb. 8.9b) wiedergegeben sind. Hinterlegt man in den Darstellungen zusätzlich noch das Dreiecksnetz mit den entsprechenden Punktnummern an den Knotenpunkten, lassen sich fehlerhafte Punkte schnell und leicht identifizieren.

Noch detailliertere Aussagen erhält man, wenn an Stelle der *linearen* Interpolationsmethode die *bivariater* Interpolation über Dreieckselemente durch Polynome 5. Ordnung für die Berechnung der Verzerrungslinien herangezogen wird, wie die folgende Abbildung 8.10 zeigt.

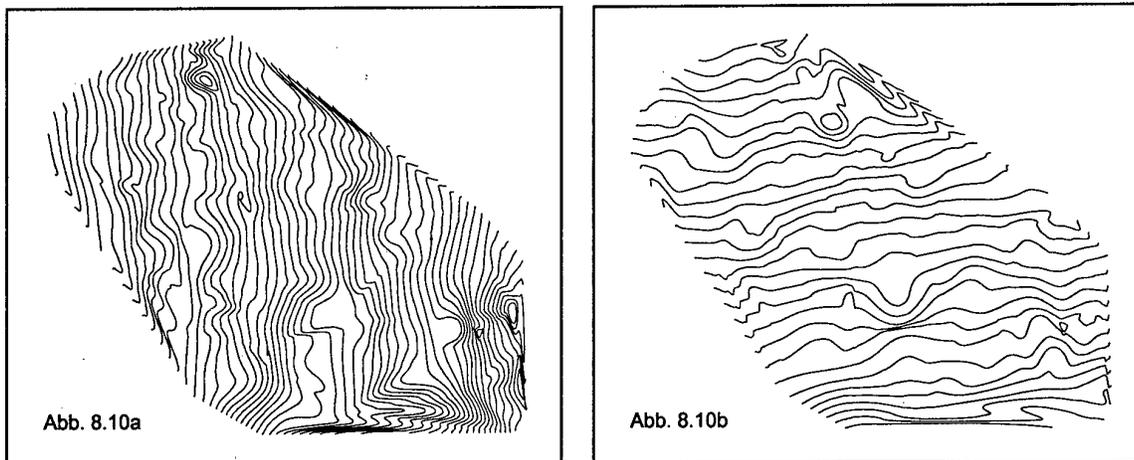


Abb. 8.10: Darstellung von geographischen Verzerrungslinien (Äquidistanz: $\Delta\lambda = \Delta\varphi = 6'$) der Schlesienkarte von MARTIN HELWIG mit Hilfe *bivariater Interpolation* über Dreieckselemente durch Polynome 5. Ordnung

Neben dem Vorteil der Erkennung von topologischen Unstimmigkeiten und den graphischen Darstellungsmöglichkeiten von Isodeformaten, Verzerrungsgittern bzw. Verzerrungslinien, liegt eine weitere Stärke der Triangulationsmethode darin, daß sie im Gegensatz zu anderen Verfahren *unabhängig* von einer vorab festzulegenden Altkartenabbildung ist.

Für die *Darstellung der Verzerrungsgitter* besteht allerdings aus den weiter oben dargelegten Gründen der *generelle Nachteil* in der getrennten (unabhängigen) Behandlung durch Berechnung der Verzerrungslinien in den Hauptkoordinaten-Richtungen.

8.3 Methode regulärer Gitternetze

Bei diesem Verfahren werden die Isolinien (hier Linien gleicher geographischer Längen oder Breiten ($\lambda_i, \varphi_i = \text{konstant}$)) auf der Grundlage eines regelmäßigen Gitters (Quadratgitter oder Rechteckgitter) berechnet, wobei den Lagekoordinaten der Schnittpunkte des Gitters (x_i, y_i) entsprechende z_i -Koordinaten zugeordnet werden. Dieses Verfahren ist relativ einfach, wobei der verwendete Algorithmus durch eine stückweise (pro Gittermasche) *bikubische Splinefunktion* realisiert wird. Um einen *glatten Verlauf* der Isolinien zu erhalten (ohne Knicke), werden die Interpolationsfunktionen so bestimmt, daß zu beiden Seiten jeder (stückweisen) Gitterlinie neben der Steigung (1. Ableitung) auch noch die Krümmung (2. Ableitung) gleich ist. Zur rechentechnischen Umsetzung stehen in Programmbibliotheken entsprechende Unterprogramme zur Verfügung, die für wissenschaftliche Zwecke in der Regel frei zugänglich sind [siehe auch: SPÄTH, 1986].

Da bei Altkarten die Paßpunkte (Ortspositionen) aber unregelmäßig verteilt sind, besteht zunächst das Problem, die z -Koordinaten (hier in der Regel die geographischen Soll-Koordinaten nach einer modernen Karte, also $z = \lambda$ bzw. $z = \varphi$) zuvor auf die Lage der regelmäßig angeordneten Gitterschnittpunkte umzurechnen. Hierzu werden meist Interpolationsverfahren mit streckenabhängigen Gewichtsfunktionen herangezogen (auch: *Prädiktionsverfahren*).

Konkrete Ansätze zur Anwendung dieser Methode für Altkarten wurden bereits in der Diplomarbeit von WEISS [1985] realisiert. Aber auch hier besteht, wie schon bei der Triangulationsmethode angesprochen, das gleiche Problem darin, daß die Berechnung der Verzerrungslinien *getrennt* nach den Hauptkoordinaten-Richtungen vorgenommen werden müssen, da den z -Werten eines bestimmten Punktes immer nur *eine* Koordinate, also z.B. entweder die geographische Länge ($z_i = \lambda_i$) oder die geographische Breite ($z_i = \varphi_i$) zugeordnet werden kann.

Im folgenden soll hier eine neu entwickelte Methode zur Berechnung von Verzerrungsgittern mit Hilfe der **multiquadratischen Interpolation** (siehe Kap. 2.3) vorgestellt werden. Der schon mehrfach angesprochene Nachteil der getrennten Berechnung der Verzerrungslinien in den Hauptkoordinaten-Richtungen entfällt hier vollständig, weil bei diesem Verfahren *nicht* mehr von der Vorstellung einer Modellfläche (Kontinuum) zur Ableitung der jeweiligen Verzerrungslinien ausgegangen wird und somit auch das am Anfang dieses Kapitels angesprochene Interpolationsverfahren zur Berechnung von Isolinien auf der Grundlage eines *regelmäßigen* Gitternetzes nicht notwendig ist. Das Verzerrungsgitter wird allein mit Hilfe der multiquadratischen Interpolationsmethode über *Restklaffungsvektoren* generiert, die zuvor mit einer Ähnlichkeitstransformation zwischen der modernen Karte und der Altkarte ermittelt wurden.

Nachstehend wird der **Verfahrensablauf zur Generierung eines Verzerrungsgitters mit geographischen Netzlinien** am Beispiel der *Preußenkarte von H. ZELL (1542)* detailliert beschrieben:

1. Berechnung *kartesischer Soll-Koordinaten* (Ausgangssystem) aus den geographischen Koordinaten der Paßpunkte nach einer modernen Karte mit Hilfe einer *adäquaten Altkartenabbildung* (z.B. rechteckige Plattkarte; siehe Kap. 4), wobei es ausreicht, einen *ungefähren* Maßstab der Altkarte einzusetzen.
2. Berechnung der *Restklaffungsvektoren* mit Hilfe einer ausgleichenden *Ähnlichkeitstransformation* nach den Formeln (2-14) und (2-15). Die Punkte des Ausgangssystems sind dabei die im 1. Schritt berechneten kartesischen Soll-Koordinaten (x, y) und das Zielsystem ist das Punktfeld (X, Y) der Altkarte.

3. Berechnung der *multiquadratischen Interpolationsparameter* (\mathbf{a} , \mathbf{b}) nach Formel (2-32d) im Kap. 2.3, wobei die zuvor im 2. Schritt berechneten Komponenten der Restklaffungsvektoren (\mathbf{u} , \mathbf{w}) aber als *negative* Absolutgliedvektoren in das Gleichungssystem eingesetzt werden müssen. Die Restklaffungsvektoren werden dadurch zu *Fehlervektoren* deklariert, die auf die fehlerhaft kartierten Ortslagen zeigen (siehe Abb. 8.11).
4. Festlegung eines *regulären geographischen Netzlinienbildes* über das gesamte Punktfeld des Ausgangssystems (moderne Karte) mit einer frei wählbaren Maschenweite ($\Delta\lambda$, $\Delta\phi$) und Berechnung der *kartesischen Soll-Koordinaten* der geographischen Gitternetz-schnittpunkte mit Hilfe der verwendeten Altkartenabbildung (siehe 1. Schritt).
5. *Transformation* der Schnittpunkte des *geographischen Soll-Netzlinienbildes* in das Koordinatensystem der Altkarte mit Hilfe der im 2. Schritt ermittelten Transformationsparameter der Ähnlichkeitstransformation (siehe Abb. 8.11).

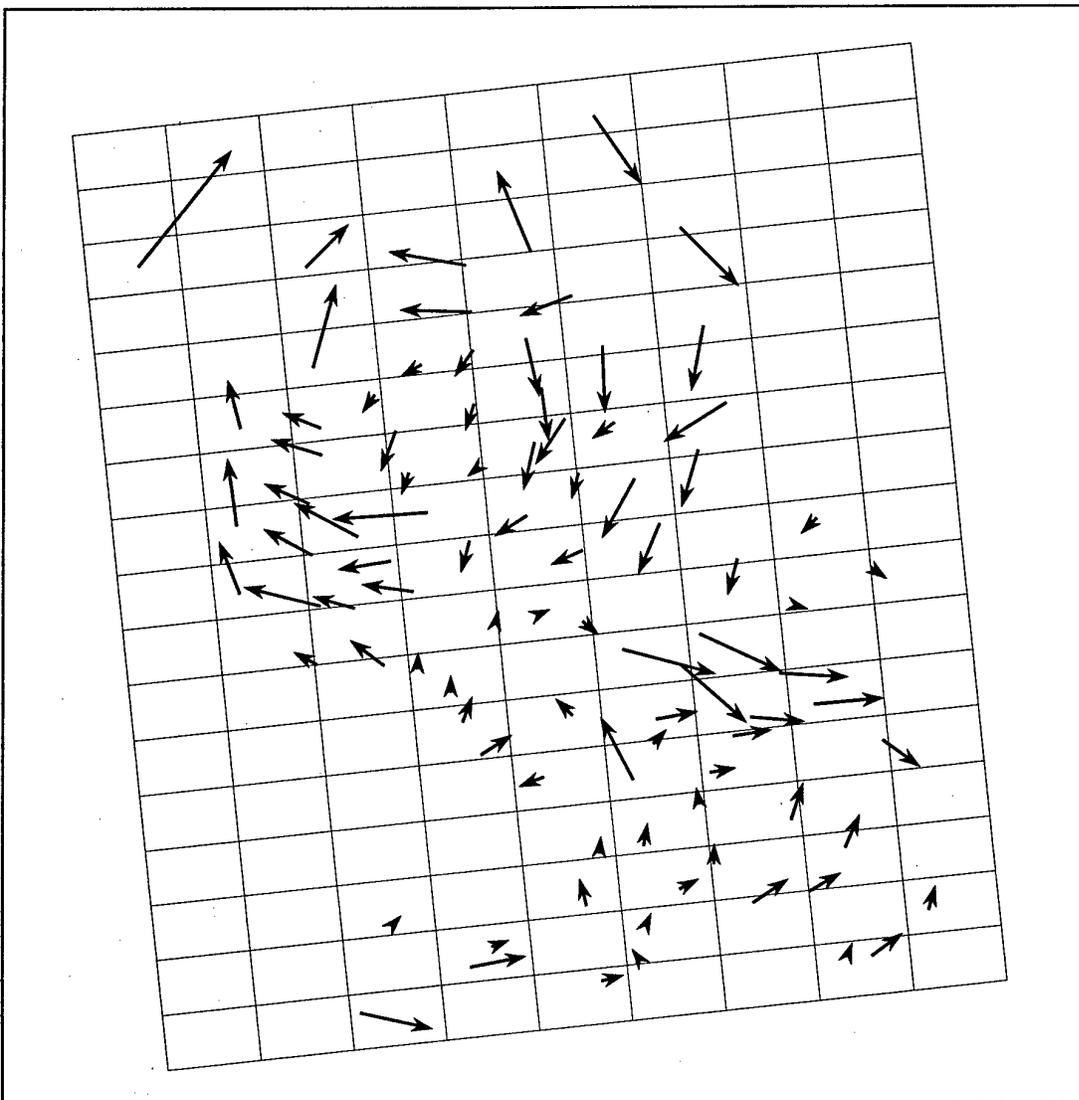


Abb. 8.11: Restklaffungsvektoren (hier: *Fehlervektoren* = *negative Verbesserungsvektoren*) und *geographisches Soll-Netzlinienbild*, dargestellt im Koordinatensystem der Altkarte (hier: ostorientiert) *nach* einer Ähnlichkeitstransformation.

6. Berechnung von *interpolierten Restklaffungsvektoren* auf allen Schnittpunkten des *Soll-Gitternetzes* im Koordinatensystem der Altkarte nach den Formeln (2-33) der multi-quadratischen Interpolation. Diese Restklaffungsvektoren stellen *Verschiebungsvektoren* der geographischen Netzschnittpunkte dar, deren Spitzen (Endpunkte) auf die *verzerrten* Positionen in der Altkarte zeigen (siehe Abb. 8.12). Die alleinige Darstellung dieses *Vektorfeldes* lassen bereits lokale Dehnungen und Stauchungen sowie Drehungen und Verschiebungen deutlich werden.

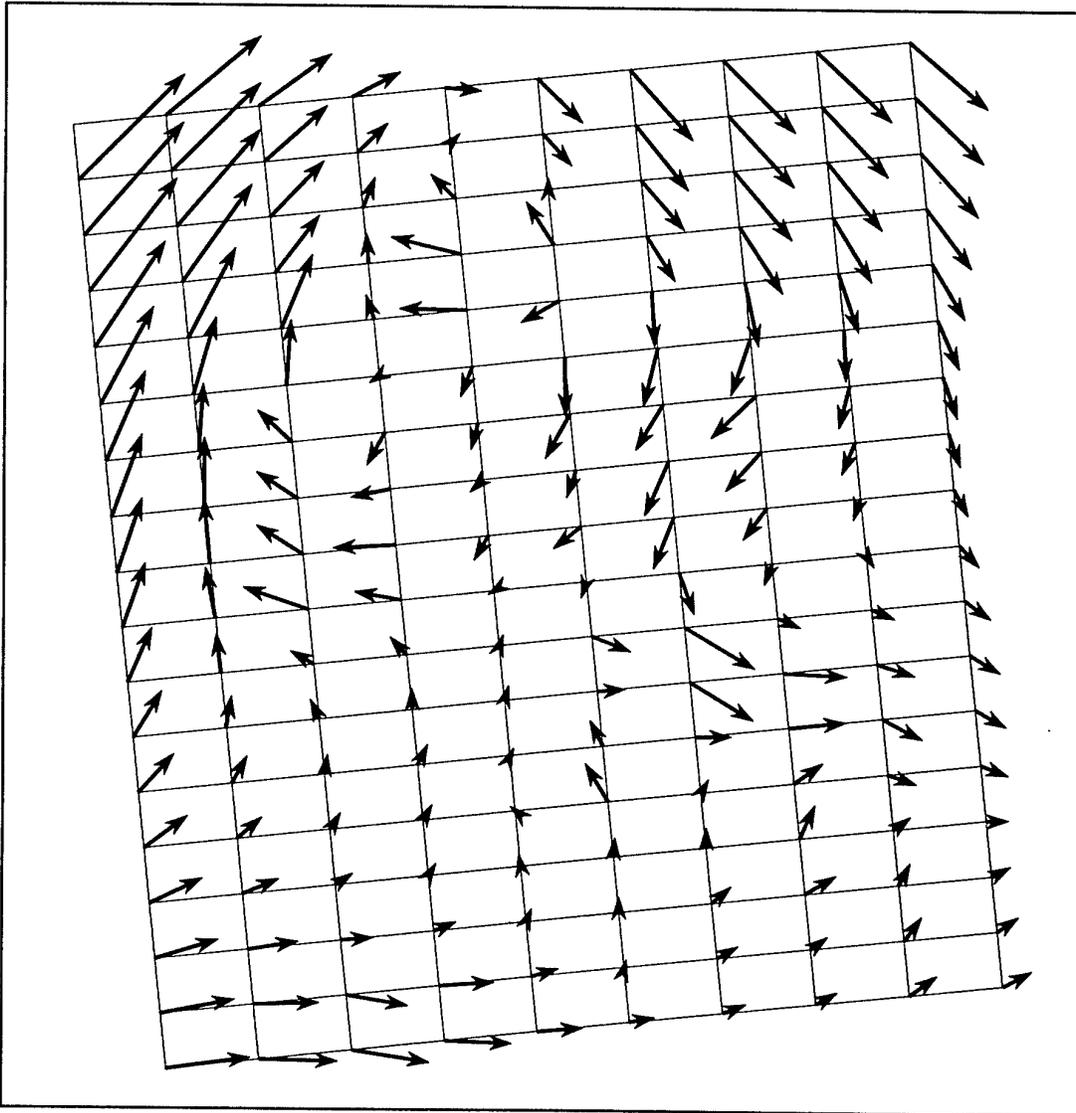


Abb. 8.12: Verschiebungsvektoren der Schnittpunkte des geographischen Soll-Netzlinienbildes, die mit Hilfe der *multiquadratischen Interpolation* auf der Grundlage der Restklaffungsvektoren des Punktfeldes der Altkarte (siehe Abb. 8.11) nach einer Ähnlichkeitstransformation berechnet wurden.

7. Die Verbindung der Spitzen (Endpunkte) der Verschiebungsvektoren entlang jeder Gitterlinie in x- bzw. y-Richtung ergibt schließlich das Verzerrungsgitter (siehe Abb. 8.13). Um einen glatten Verlauf der Verzerrungslinien zu erhalten können die Punkte pro Linie mittels Splinefunktionen verbunden werden.

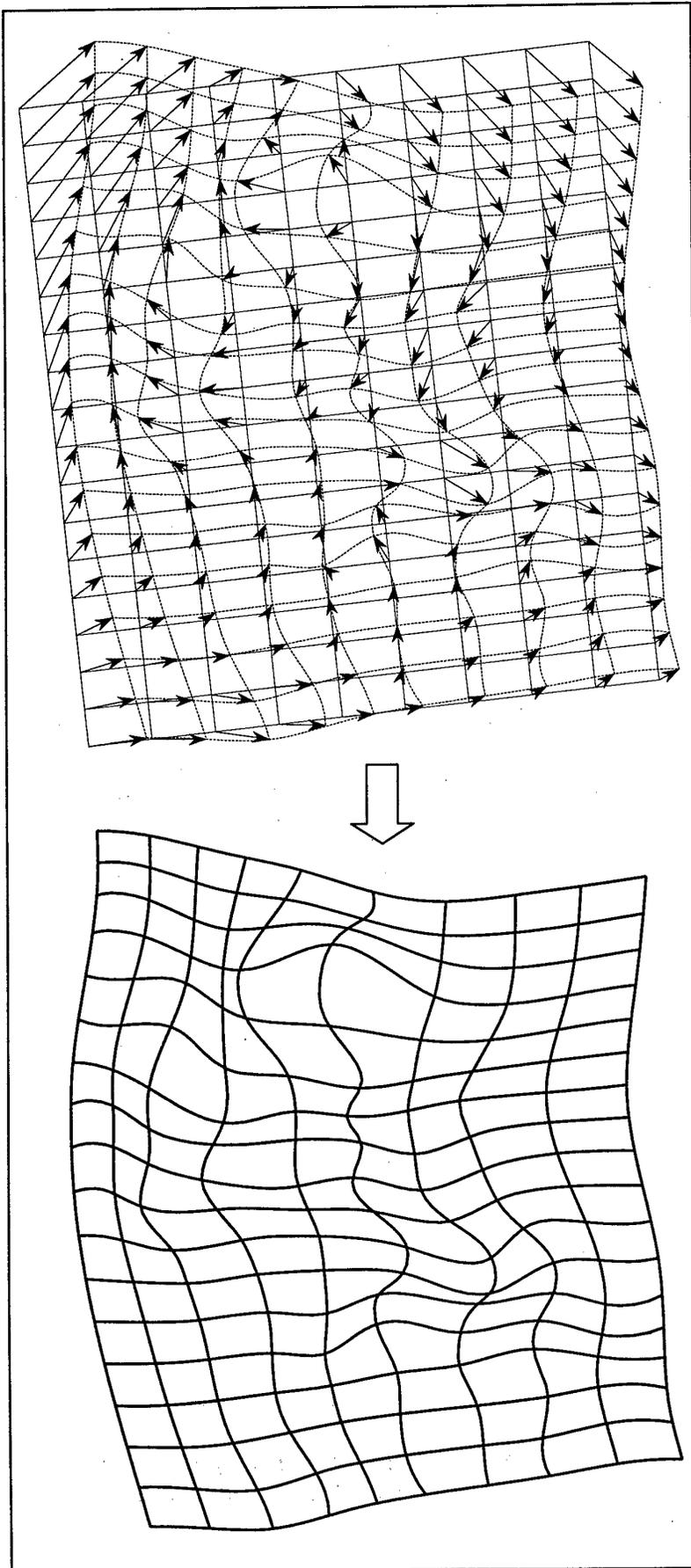


Abb. 8.13:

Ableitung des Verzerrungsgitters durch Verbindung der Endpunkte der Verschiebungsvektoren jeder Gitterlinie mit Hilfe von Splinefunktionen

Zwar kann auch die Methode der multiquadratischen Interpolation *nicht* verhindern, daß es u.U. hier und da wegen nicht zu vermeidender topologischer Unstimmigkeiten zu Faltungen des Netzmaschenbildes kommt. Insgesamt gesehen ist das Linienbild in der Regel aber immer ruhiger und ausgeglichener als bei der alternativen Triangulationsmethode. Zudem können in sich *geschlossene Verzerrungslinien* hier *nicht* mehr auftreten.

Neben der reinen Darstellung eines Verzerrungsgitters empfehlen sich noch bestimmte Kombinationen mit anderen Einzeldarstellungen, wodurch die Visualisierung der Verzerrungsverhältnisse der Altkarte in ihrer lokalen Differenzierung noch gesteigert werden kann (siehe dazu die folgenden Abbildungen 8.14 und 8.15).

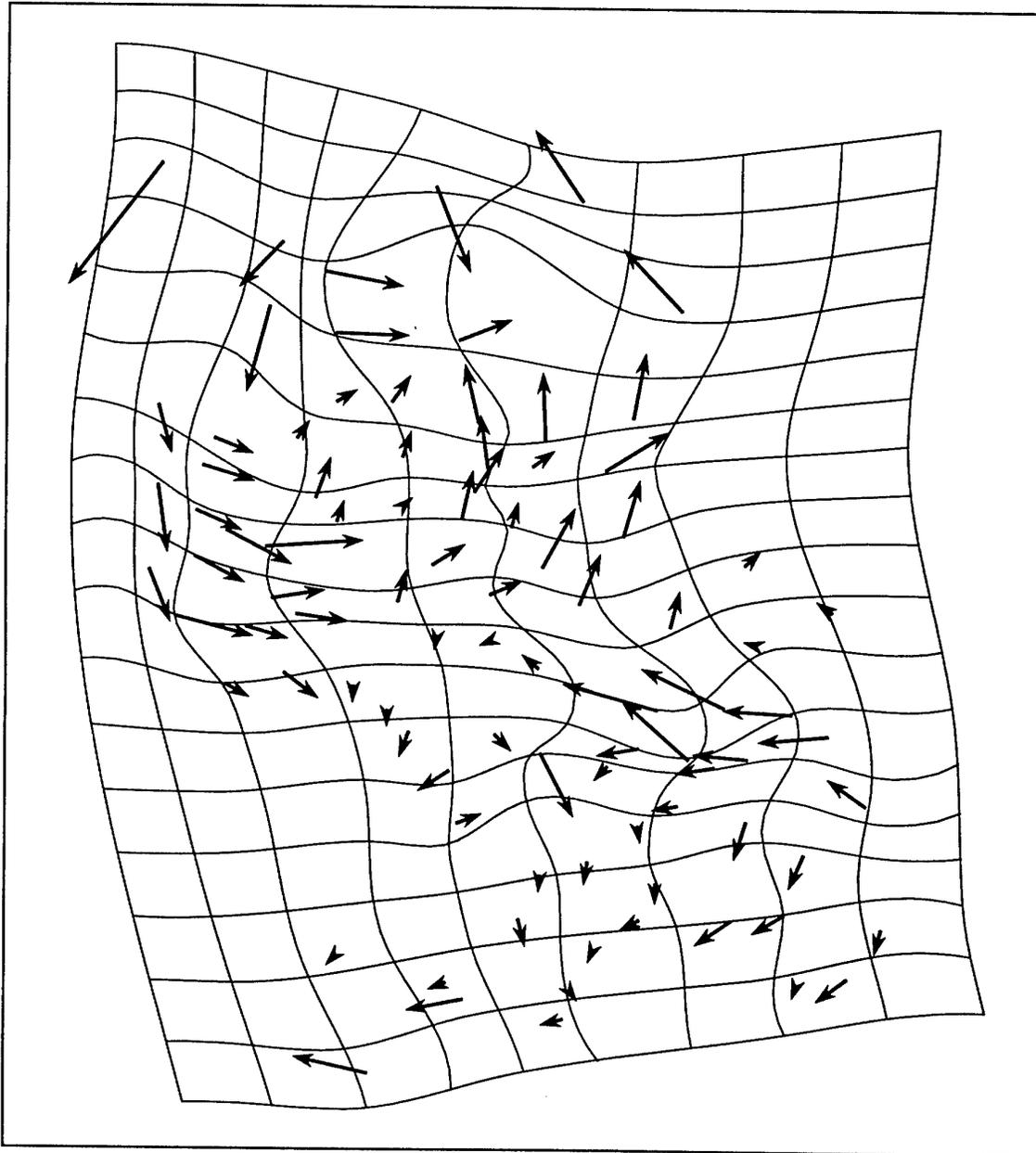


Abb. 8.14: Kombinierte Darstellung von Verbesserungsvektoren aufgrund einer Ähnlichkeitstransformation und Verzerrungsgitter nach der Multiquadratischen Interpolationsmethode.

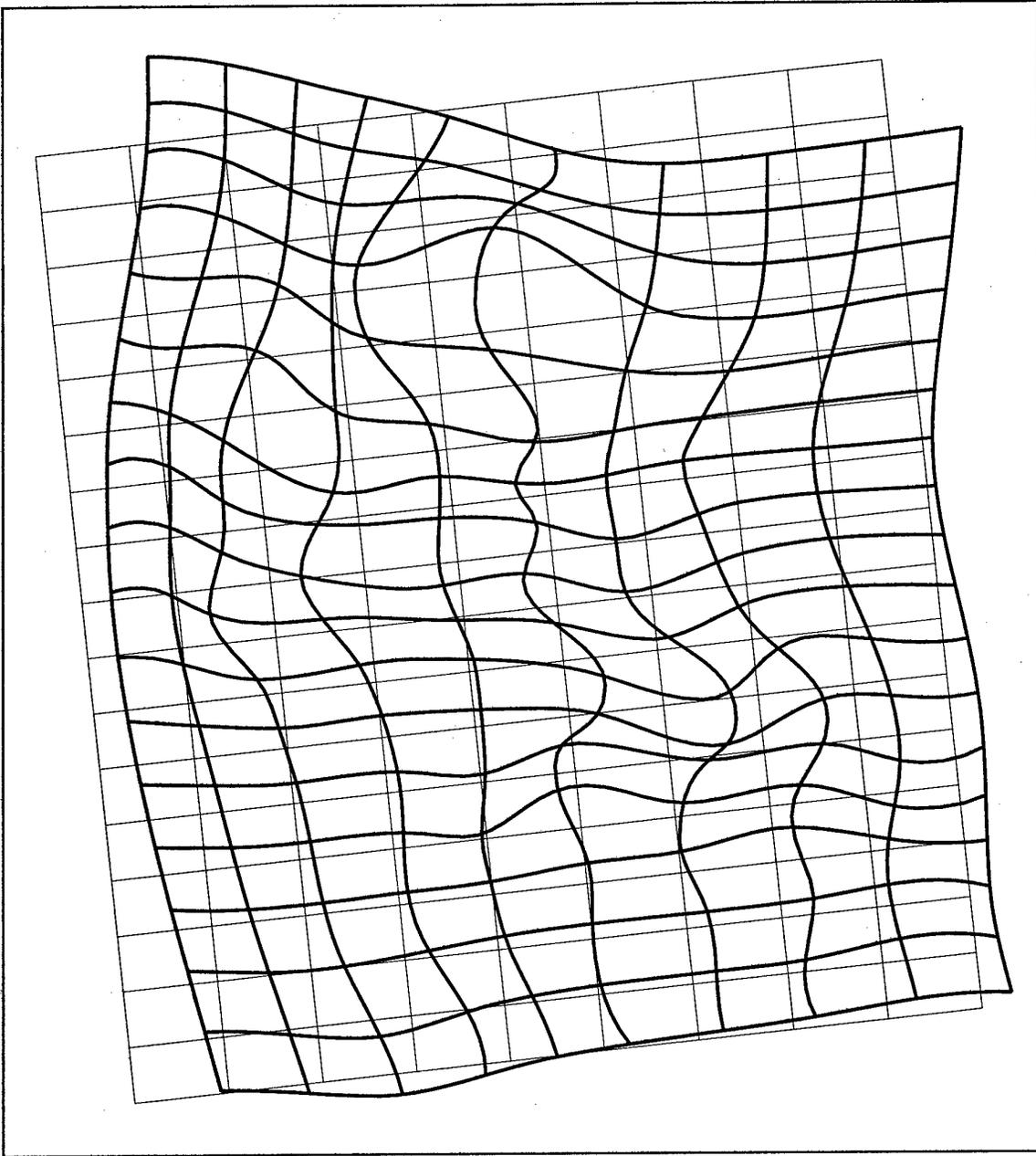


Abb. 8.15: Kombinierte Darstellung des (fehlerfreien) Soll-Netzliniensbildes (dünne Linien) mit dem Verzerrungsgitter (dicke Linien).

In der kombinierten Darstellung von **Verbesserungsvektoren** und **Verzerrungsgitter**, wie sie in der *Abbildung 8.14* wiedergegeben ist, zeigen die Verbesserungsvektoren nicht nur auf die Sollagen der homologen Paßpunkte nach einer modernen Karte, sondern machen in Verbindung mit dem Verzerrungsgitter auch die Anomalien im lokalen Umfeld der Punkte deutlich.

Die *Abbildung 8.15* zeigt eine Kombination des (fehlerfreien) **Soll-Netzliniensbildes** mit dem **Verzerrungsgitter**. Diese Art der Darstellung ist insbesondere geeignet, um vorwiegend lokale Dehnungen und Stauchungen sowie Verschiebungen deutlich sichtbar zu machen. Sie sollte allerdings ausschließlich nur als *Einzeldarstellung*, also *ohne* hinterlegter Altkarte verwendet werden.

8.4 Beurteilung der Verzerrungsgitter-Verfahren

Im vorliegenden Kapitel 8 wurden neue Möglichkeiten und Ansätze der Visualisierung von Genauigkeitsanalysen für Altkarten vorgestellt. Behandelt wurden dabei *Restklaffungsvektoren*, *Isolinien*, *Erkennung von topologische Unstimmigkeiten* sowie die Generierung von *Verzerrungsgittern*. Mit Ausnahme der Methode der Restklaffungsvektoren, gehen die Verfahren entweder auf die *Triangulationsmethode* oder die *Gitternetzmethode mit Hilfe des multiquadratischen Interpolationsverfahren (MQI)* zurück. Da insbesondere bei der Generierung von Verzerrungsgittern *alternative* Berechnungs- bzw. Darstellungsmethoden vorgestellt wurden, sollen im folgenden die Vor- und Nachteile zusammenfassend gegenübergestellt werden.

Generierung von Verzerrungsnetzen mit Hilfe der Triangulationsmethode

- Vorteile:**
- Aufdeckung von groben Eingabefehlern und topologischen Unstimmigkeiten bei Voruntersuchungen (Plausibilitätsprüfungen).
 - Relativ einfache und schnelle Berechnung des Verzerrungsgitters bei Anwendung des linearen Interpolationsverfahrens.
 - Unabhängig von einer vorab festzulegenden Altkartenabbildung. Das Verfahren kommt daher vor allem für solche Altkarten in Frage, denen *keine* eindeutigen Netzabbildungen zugeordnet werden können.
- Nachteile:**
- Unharmonisches Gesamtbild des Verzerrungsgitters, das insbesondere bei topologischen Unstimmigkeiten aufgrund der Berechnungsmethode bei einzelnen Verzerrungslinien zu Schlingenbildung und geschlossenen Linienzügen führen kann und dadurch in Teilbereichen der Altkarte kaum oder gar keine Ähnlichkeit mehr mit der normalen Form eines Gitternetzes besitzt (für Präsentationszwecke in diesem Fall daher nicht geeignet).
 - Aufwendige und spürbar zeitintensive Berechnung bei Anwendung des Interpolationsverfahrens mit Polynomen 5. Ordnung.
 - Getrennte, unabhängige Berechnung der Verzerrungslinien in den Hauptkoordinaten-Richtungen, wodurch häufig irreguläre Überschneidungen der Netzlinien auftreten.

Generierung von Verzerrungsgittern nach der Methode regulärer Gitternetze mit Hilfe der Multiquadratischen Interpolation (MQI)

- Vorteile:**
- Harmonisches Gesamtbild des Verzerrungsgitters und damit hervorragend für Präsentationszwecke einsetzbar.
 - Minimaler Einfluß von groben Fehlern auf das Netzlinienbild (geschlossene Verzerrungslinien können hier nicht mehr auftreten).
- Nachteile:**
- Großer Speicherbedarf und daher zeitintensive Berechnung bei vielen Punkten.
 - Die Altkartenabbildung muß bekannt sein (ist allerdings meistens gegeben).

Zusammenfassend kann festgehalten werden, daß beide Verfahren gleichermaßen für Genauigkeitsuntersuchungen von Altkarten geeignet sind, wobei die Triangulationsmethode hauptsächlich bei Voruntersuchungen (Plausibilitätsprüfungen) einzusetzen ist oder bei unbekannter Altkartenabbildung und die Gitternetzmethode (MQI) vornehmlich für Präsentationszwecke (optimal in Kombination mit Verbesserungsvektoren und hinterlegter Altkarte).

Kapitel 9

Zusammenfassung und Ausblick

Die vorstehende Arbeit beschäftigt sich mit den rechnerischen und visuellen Verfahren zur Genauigkeitsanalyse für Altkarten, wobei die Ergebnisse allein aus dem Karteninhalt (vorwiegend Ortspositionen) einer vorliegenden und zu untersuchenden Altkarte als eigenständiges Untersuchungsobjekt abgeleitet werden. Der allgemeine Verfahrensablauf (in vereinfachter Darstellung) bei Altkartenuntersuchungen ist in der Abbildung 9.1 wiedergegeben.

Nach einer Einleitung und Zielsetzung der Arbeit werden die für Altkartenuntersuchungen wichtigsten rechnerischen Methoden (z.B. Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate, Koordinatentransformationen) in zeitgemäßer Terminologie zusammengestellt. Anschließend wird auf die systematische Vorgehensweise bei der Erfassung sämtlicher für die Untersuchungen relevanten Daten (z.B. Auswahl der Punkte, Methoden der Koordinatenerfassung) eingegangen sowie Verfahren zur Plausibilitätsprüfung der ermittelten Rohdaten beschrieben.

Da die Kartennetzentwürfe der zu untersuchenden Altkarten einen wesentlichen Einfluß auf die Berechnungsergebnisse haben, wird auf die Verfahren zur Verifizierung der wichtigsten Altkartenabbildungen (z.B. die Plattkarte) detailliert eingegangen. Außerdem werden Abbildungsgleichungen für die häufig vorkommende Trapezabbildung entwickelt, wobei drei verschiedene Variationen vorgestellt werden, die bei Altkartenuntersuchungen auftreten können. Dabei zeigt sich, daß die Verifizierung von Trapezkarten äußerst problematisch und nur bei guter Qualität einer vorliegenden Altkarte effektiv ist.

Einen breiten Raum wird der Zusammenstellung der wichtigsten herkömmlichen Methoden zur Maßstabs- und Genauigkeitsbestimmung (z.B. das Vergleichsstrecken- und Vergleichspunkt-Verfahren) mit detaillierten Berechnungsformeln gewidmet, wobei auch die Problematik der Genauigkeitsbestimmung von Teilgebieten in Altkarten beschrieben wird.

Die bei Altkartenuntersuchungen typisch auftretenden Streuungen von Stichproben sowie ihre Häufigkeitsverteilungen (z.B. Maßstabsbestimmungen aus Streckenvergleichen) werden an praktischen Beispielen graphisch dokumentiert, wobei nachgewiesen wird, daß bei Stichproben für Altkartenuntersuchungen generell keine Normalverteilung erwartet werden kann. Die tatsächliche Verteilung ist im Einzelfall unbekannt. Eine allgemeingültige Modellverteilung konnte für das analysierte Datenmaterial nicht identifiziert werden. Das traditionelle Genauigkeitsmaß - die Standardabweichung - ist daher schwer zu interpretieren. Im Hinblick darauf, aber vor allem um den Einfluß inkonsistenter Beobachtungen (z.B. grobe Fehler) auf die Parameterschätzungen, wie beispielsweise Maßstab und Standardabweichung zu minimieren, werden robuste Schätzverfahren vorgeschlagen, die weitgehend verteilungsunabhängig sind. Die Vorteile dieser Methode im Vergleich zu den traditionellen Verfahren der Parameterschätzung (Methode der kleinsten Quadrate) werden aufgezeigt und die rechentechnische Realisierung ausführlich beschrieben.

Am Schluß werden neue Möglichkeiten und Ansätze zur Visualisierung der Ergebnisse von Genauigkeitsanalysen mit entsprechenden Beispielen vorgestellt. Neben den Berechnungs- und Darstellungsmethoden von Isodeformaten und Verzerrungsgittern, wird auch ein einfaches, aber effektiv arbeitendes Verfahren zur Erkennung von topologischen Unstimmigkeiten in Altkarten auf der Grundlage einer optimalen Dreiecksvermaschung (Delaunay-Triangulation) entwickelt.

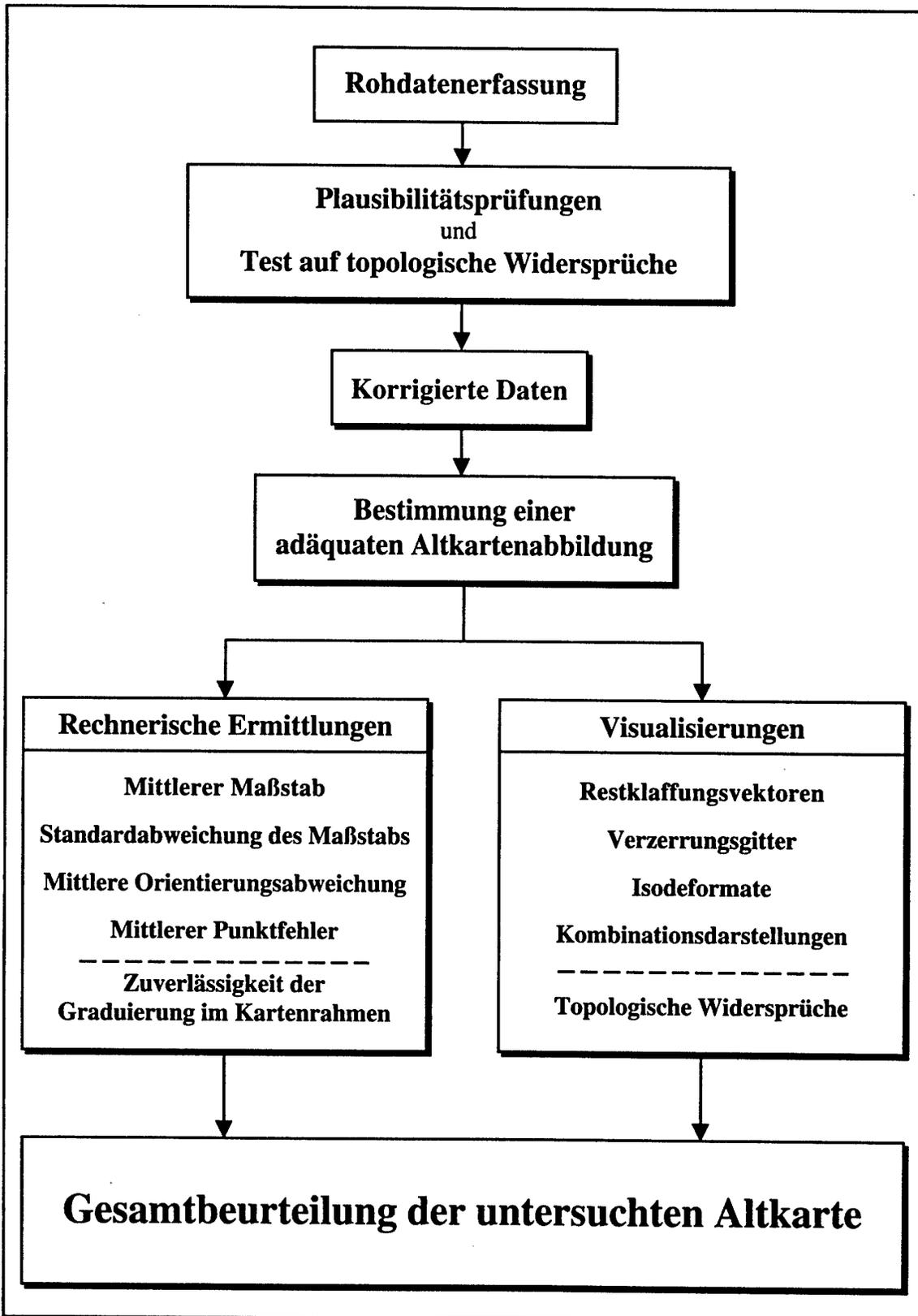


Abb. 9.1: Vereinfachtes Ablaufschema der rechnerischen und visuellen Verfahren zur Genauigkeitsanalyse für Altkarten.

Zur Komplettierung der Arbeit werden in einem Anhang neben den Formeln zur Transformation zwischen Gauß-Krüger-Koordinaten und ellipsoidischen geographischen Koordinaten auch exemplarisch die Rechen- und Visualisierungsergebnisse von drei Altkarten (die Tirol-, die Schlesien- und die Ostfrieslandkarte) wiedergegeben.

Die Beurteilung der vorgeschlagenen Verfahren zur Genauigkeitsanalyse für Altkarten kommt zu dem Schluß, daß bei den rein rechnerischen Methoden zur Parameterschätzung (z.B. mittlerer Maßstab) nur das *Vergleichspunktverfahren* in Verbindung mit einem *robusten Schätzverfahren* die bestmöglichen Ergebnisse erwarten lassen. Dagegen haben alle vorgestellten *visuellen Verfahren* ihre eigenständige Berechtigung und hängen nur vom jeweiligen Zweck ab. So empfiehlt sich z.B. ein *Verzerrungsnetz* zu *Präsentationszwecken* vorrangig mit Hilfe des multiquadratischen Interpolationsansatzes darzustellen. Die alternative Möglichkeit der Anwendung des Triangulationsverfahrens ist dagegen vor allem geeignet, ein Verzerrungsnetz *ohne Kenntnis der Altkartenabbildung* darzustellen und darüber hinaus *topologische Widersprüchlichkeiten* sowie *grobe Eingabefehler* im Rahmen der Plausibilitätsprüfungen aufzuzeigen. Von den vielfältigen Möglichkeiten der visuellen Veranschaulichung der Verzerrungsverhältnisse von Altkarten empfiehlt sich insbesondere die Kombinationsdarstellung von Restklaffungsvektoren und Verzerrungsnetz.

Im Sinne der Zielsetzung soll die vorliegende Arbeit Grundlage für weiterführende und verbesserte Lösungsverfahren zur Genauigkeitsanalyse für Altkarten sein. Da eine ganze Reihe von Schwierigkeiten angesprochen wurde, soll abschließend ein Überblick über die wichtigsten Problempunkte gegeben werden, für die Entwicklungs- und Forschungsbedarf besteht:

- *Beschleunigung der Datenerfassung*. Wünschenswert wären hier Programmentwicklungen mit benutzerfreundlicher graphischer Oberfläche, die auf der Grundlage gescannter Karten (Altkarte, moderne Karte) eine rein digitale Bearbeitung (Bildschirm-Digitalisierung) zur Erstellung der notwendigen Koordinatendateien erlauben. Zusätzlich könnten dabei *topologische Widersprüche* während der Eingabe unmittelbar graphisch angezeigt werden.
- Einbindung von Genauigkeitsanalysen für *linienhafte Objekte* (z.B. Wasserläufe).
- Entwicklung von rechentechnischen Verfahren zur Genauigkeitsanalyse für Altkarten, denen *keine adäquaten Kartennetzabbildungen* zugeordnet werden können.
- Grundlegende Untersuchungen zur *Problematik der Transformationsrichtung* (Transformation der Punktkoordinaten der Altkarte in das Punktfeld des als fehlerfrei unterstellten Soll-Koordinatensystems nach einer modernen Karte *oder* umgekehrt) bei Koordinatentransformationen nach dem Vergleichspunktverfahren (Ähnlichkeits- bzw. Affintransformation).
- Programmentwicklungen für *Genauigkeitsuntersuchungen von Teilgebieten* einer Altkarte zur Erkennung von Punktgruppen (Segmentierung) mit überwiegend gleichartigen Strukturen von Restklaffungsvektoren.
- Grundlegende Untersuchungen zu dem in Altkarten verwendeten *Nullmeridian*, um bei der Beurteilung der Zuverlässigkeit der Graduierung des Kartenrahmens eine gesicherte Aussage über die *mittlere Verschiebung in Breitenkreisrichtung* abzuleiten.
- Verbesserung des Verfahrens zur Erkennung von *topologisch widersprüchlichen Punkten*, da auch mit Restklaffungsvektoren die Fehlerursache nicht immer eindeutig geklärt werden kann, sowie - zu Vergleichszwecken - die Ableitung einer *Maßzahl zur Beurteilung der topologischen Unstimmigkeiten*.

- Empirische Untersuchungen an Altkarten zur *Bestimmung von Standardvorgaben für Tuningkonstanten* in Abhängigkeit vom Verschmutzungsgrad der Daten (z.B.: schwach, mittelmäßig, extrem).
- Entwicklung einer statistischen Beschreibung für eine *allgemeingültige Modellverteilung* von Stichproben bei Altkartenuntersuchungen.
- Entwicklung einer mathematischen Formel zur Ableitung einer für Vergleichszwecke allgemeingültigen *Maßzahl für die Genauigkeit einer Altkarte* (nicht im statistischen Sinne zu verstehen), die aus mehreren unterschiedlichen, im Zuge der Gesamtuntersuchung ermittelten Genauigkeitsmaßen und sonstigen Ergebnissen abgeleitet wird, wie z.B. aus der Standardabweichung und der Orientierungsabweichung sowie der Anzahl der topologischen Widersprüche oder groben Fehler.
- Grundlegende Untersuchungen zu *alten Meßverfahren* und deren Einfluß auf die Genauigkeitsbestimmung von Altkarten.
- Entwicklung einer universalen, auf graphischer Benutzerebene aufgesetzten Programmapplikation zur Genauigkeitsanalyse für Altkarten.

Anhang A

Transformation zwischen Gauß-Krüger-Koordinaten und ellipsoidischen geographischen Koordinaten

Bei Altkartenuntersuchungen können Soll- bzw. Referenzkoordinaten von Paßpunkten in Form von *Gauß-Krüger-Koordinaten* oder *ellipsoidischen geographischen Koordinaten* vorliegen (siehe dazu Kap. 3: *Datengewinnung und Plausibilitätsprüfung*). Für einige Aufgabenstellungen bei Altkartenuntersuchungen kann es erforderlich sein, die Gauß-Krüger-Koordinaten in ellipsoidische geographische Koordinaten oder umgekehrt zu transformieren.

Im folgenden werden daher die in der Landesvermessung üblich verwendeten Transformationsformeln wiedergegeben. Detaillierte Beschreibungen finden sich in den einschlägigen Lehrbüchern zur Landesvermessung (z.B.: GROSSMANN [1976]).

A.1 Allgemeine Definitionen, Konstanten und Grundfunktionen

Allgemeine Definitionen:

z	Kennziffer des Gauß-Krüger-Meridianstreifens
c	Konstante: $c = 500\,000$ [m]
x, y	Konforme Gaußsche Koordinaten [m] in <i>geodätischer</i> Orientierung
L_0	Hauptmeridian des Gauß-Krüger-Meridianstreifens [°]
L	ellipsoidische geographische Länge [°]
B	ellipsoidische geographische Breite [°]
R	Rechtswert im Gauß-Krüger-System [m]
H	Hochwert im Gauß-Krüger-System [m]

Ellipsoidische Konstanten (hier exemplarisch für das *Besselsche Erdellipsoid*):

Große Halbachse: $a = 6377397.155$ m

Kleine Halbachse: $b = 6356078.963$ m

Quadrat der 1. numerischen Exzentrizität: $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 0.0066743722$

Quadrat der 2. numerischen Exzentrizität: $e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2} = 0.0067192188$

Ellipsoidische Grundfunktionen:

$$\text{Meridiankrümmungshalbmesser: } M(B) = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2(B))^{1.5}} \quad (\text{A1-1a})$$

$$\text{Querkrümmungshalbmesser: } N(B) = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2(B)}} \quad (\text{A1-1b})$$

A.2 Transformation ellipsoidischer geographischer Koordinaten in konforme Gauß-Krüger-Koordinaten

A.2.1 Aufgabenstellung:

Gegeben: B, L und L_0

Gesucht: x, y bzw. H, R

A.2.2 Berechnung der Meridianbogenlänge G als Funktion der geographischen Breite B

Die ellipsoidischen Meridianbogenlänge G bis zur geographischen Breite B wird für die nachstehenden Transformationsformeln benötigt und wird mit Hilfe des Meridiankrümmungshalbmessers M nach folgender Formel berechnet:

$$G(B) = \int_0^B M(B) dB \quad (\text{A2-1})$$

Dieses Integral kann durch numerische Integrationsverfahren mit beliebiger Genauigkeit gelöst werden. Um das zu umgehen, kann aber auch die nachstehend in der Landesvermessung angewandte Formel benutzt werden

$$G(B) = E_0 \cdot B + \sum_{k=1}^3 E_k \cdot \sin(2 \cdot k \cdot B) \quad (\text{A2-2a})$$

wobei die geographische Breite B im Gradmaß [°] zu verstehen ist.

Die Koeffizienten E_i [m°] in (A2-2a) bedeuten im einzelnen (SCHÖDLBAUER [1982], Teil 1):

$$\begin{aligned} E_0 &= 111120.619608 \\ E_1 &= -15988.6383 \\ E_2 &= 16.7300 \\ E_3 &= -0.0218 \end{aligned} \quad (\text{A2-2b})$$

A.2.3 Transformationsformeln:

Mit den *Substitutionen*

$$\begin{aligned} N &= N(B) && \text{nach (A1-1b)} \\ G &= G(B) && \text{nach (A2-1) bzw. (A2-2)} \\ t &= \tan(B) \\ \eta^2 &= e'^2 \cdot \cos^2(B) \end{aligned}$$

sowie den *Koeffizienten*

$$\begin{aligned} a_1 &= N \cdot \cos(B) \\ a_2 &= \frac{N}{2} \cdot \cos^2(B) \cdot t \\ a_3 &= \frac{N}{6} \cdot \cos^3(B) \cdot (1 - t^2 + \eta^2) \\ a_4 &= \frac{N}{24} \cdot \cos^4(B) \cdot t \cdot (5 - t^2 + 9 \cdot \eta^2) \end{aligned}$$

lauten die *Transformationsformeln für die Bestimmung von x, y*

$$\begin{aligned} x &= G + a_2 \cdot \Delta L^2 + a_4 \cdot \Delta L^4 \\ y &= a_1 \cdot \Delta L + a_3 \cdot \Delta L^3 \end{aligned} \quad (\text{A2-3a})$$

wobei $\Delta L = \text{arc}(L - L_0)$ der Längenunterschied im *Bogenmaß* bedeutet.

Die *Gauß-Krüger-Koordinaten* werden dann wie folgt berechnet:

$$\begin{aligned} R &= y + c + z \cdot 10^6 \\ H &= x \end{aligned} \quad \text{mit: } z = \frac{L_0}{3} \quad (\text{A2-3b})$$

A.3 Transformation von Gauß-Krüger-Koordinaten in ellipsoidische geographische Koordinaten

A.3.1 Aufgabenstellung

Gegeben: R, H

Gesucht: L, B

A.3.2 Berechnung der Gaußschen konformen Koordinaten (x, y)

$$x = H$$

$$y = R - (z \cdot 10^6 + c) \quad \text{mit } z = \text{Kennziffer (1. Ziffer des Rechtswertes } R) \quad (\text{A3-1})$$

$$c = 500000 \text{ m}$$

A.3.3 Berechnung der geographischen Breite B_F des Lotfußpunktes (F)

Die geographische Breite B_F des Lotfußpunktes (F) entspricht der Meridianbogenlänge von $G_F = x = H$ und wird für die später folgenden Transformationsformeln benötigt. Zur Bestimmung der Lotfußbreite B_F gibt es verschiedene Möglichkeiten. Die Aufgabenstellung entspricht der Umkehrung von Formel (2-35) für die Berechnung der Meridianbogenlänge, die allerdings nur *iterativ* gelöst werden kann. So führt die Anwendung des *Newtonschen Iterationsverfahrens* auf folgende Formel:

$$B_{i+1} = B_i - \frac{G(B_i) - G_F}{M(B_i)} \cdot \rho \quad ; \quad \text{Startwert mit: } B_0 = \frac{G_F}{6370000} \cdot \rho \quad ; \quad \rho = \frac{180^\circ}{\pi} \quad (\text{A3-2})$$

Das Verfahren *konvergiert sehr schnell* und liefert nach 1-2 Iterationen ein genaues Ergebnis.

Statt dessen kann aber auch die in der Landesvermessung wegen ihrer einfachen Berechnung verwendete Formel benutzt werden:

$$B_F = \sigma + \sum_{k=1}^3 F_k \cdot \sin(2 \cdot k \cdot \sigma) \quad (\text{A3-3a})$$

Die *Konstante* σ [°] und die *Koeffizienten* F_k [°] bedeuten (SCHÖDLBAUER [1982, Teil 1]):

$$\sigma = \frac{G_F}{111120.619608} \quad \begin{array}{l} F_1 = 0.143885358 \\ F_2 = 0.000210790 \\ F_3 = 0.000000423 \end{array} \quad (\text{A3-3b})$$

A.3.4 Transformationsformeln

Mit den *Substitutionen*

$$N_F = N(B_F) \quad \text{nach (A1-1b)}$$

$$G_F = G(B_F) \quad \text{nach (A2-1) bzw. (A2-2)}$$

$$t_F = \tan(B_F)$$

$$\eta_F^2 = e'^2 \cdot \cos^2(B_F)$$

sowie den *Koeffizienten*

$$\begin{aligned}b_1 &= \frac{\rho}{N_F \cdot \cos(B_F)} \\b_2 &= \frac{\rho}{2 \cdot N_F^2} \cdot t_F \cdot (1 + \eta_F^2) \\b_3 &= \frac{\rho}{6 \cdot N_F^3 \cdot \cos(B_F)} \cdot (1 + 2 \cdot t_F^2 + \eta_F^2) \\b_4 &= \frac{\rho}{24 \cdot N_F^4} \cdot t_F \cdot [5 + 3 \cdot t_F^2 + 6 \cdot \eta_F^2 \cdot (1 - t_F^2)]\end{aligned}$$

lauten die *Transformationsformeln* für die Berechnung von *B* und *L*:

$$\begin{aligned}B &= B_F + b_2 \cdot y^2 + b_4 \cdot y^4 \\L &= L_0 + b_1 \cdot y + b_3 \cdot y^3 \quad \text{mit: } L_0 = 3 \cdot z\end{aligned} \tag{A3-4}$$

Anhang B

Anwendungsbeispiele

In diesem Abschnitt werden exemplarisch für drei Regionalkarten

- **Tirolkarte** (von MATTHIAS BURGKLECHNER aus dem Jahre 1611)
- **Schlesienkarte** (von MARTIN HELWIG aus dem Jahre 1561)
- **Ostfrieslandkarte** (von UBBO EMMIUS aus dem Jahre 1595)

Genauigkeitsanalysen durchgeführt. Diese Kartenbeispiele sind zwar nicht unbedingt repräsentativ, es lagen aber – da gut zugänglich – hervorragende Reproduktionen vor, die bereits für andere kartographiehistorische Untersuchungen am Lehrstuhl für Topographie und Kartographie der Universität der Bundeswehr München genutzt wurden.

Neben allgemeinen Angaben zu den untersuchten Karten werden unter Anwendung der in dieser Arbeit favorisierten Verfahren die Ergebnisse zur *Bestimmung adäquater Kartennetzabbildungen*, *robuste Parameterschätzungen*, *Untersuchungen zur Graduierung im Kartenrahmen (soweit möglich)* sowie *topologische Unstimmigkeiten* wiedergegeben. Nach den rechnerischen Resultaten werden zur *Visualisierung der Genauigkeitsanalysen* die Verzerrungsverhältnisse durch eine Kombinationsdarstellung von Restklaffungsvektoren und Verzerrungsnetz verdeutlicht.

Anhang B.1

Die Tirolkarte

von

MATTHIAS BURGKLECHNER

aus dem Jahre 1611



Abb. B.1.1: Ausschnitt (1:1) der Tirolkarte von MATTHIAS BURCKLECHNER (1611)

B.1 Die Tirolkarte

1. Allgemeine Angaben

Originaler Kartentitel:	Die fr. Grafschaft Tirol
Erscheinungsjahr und -ort:	1611, Innsbruck
Kartenmacher:	Matthias Burgklechner d. J. (1573-1642)
Graphische Technik:	Holzschnitt von Hans Rogel in 12 Blättern; erstmalig gedruckt im 19. Jahrhundert
Orientierung:	Norden
Originalformat mit Kartenrand (B x H):	1562 x 1655 mm
Blattschnitt (Originalkarte):	$\lambda_{\text{West}} = 31^\circ 00' 00''$, $\lambda_{\text{Ost}} = 33^\circ 03' 30''$ $\varphi_{\text{Süd}} = 46^\circ 06' 00''$, $\varphi_{\text{Nord}} = 47^\circ 18' 00''$
Kartenstandorte:	- Österreichische Nationalbibliothek, Wien - Tiroler Landesmuseum, Innsbruck
Vorlage für die Genauigkeitsanalyse:	Papierabzüge von 12 Filmnegativen 1:1 vom Nachdruck E. RICHTERS [1902]
Literaturquellen:	FINSTERWALDER [1971], RICHTER [1902], PIZZININI [1975], FEUERSTEIN [1912]

2. Bestimmung einer adäquaten Kartennetzabbildung

Vermutung: *Quadratische Plattkarte*

Verifizierungsmethode: Ausgleichende Affintransformation (6-Parameter)

⇒ **Maßstabszahlen** in x- und y-Richtung:

$$m_x = 176\,056 \quad m_y = 156\,893$$

⇒ **Längentreuer Parallelkreis** (bei Annahme einer rechteckigen Plattkarte):

$$\varphi_0 = 26.98^\circ$$

⇒ **Keine exakte quadratische Plattkarte**, da der ermittelte Wert des längentreuen Parallelkreises deutlich vom Erwartungswert ($\varphi_0 = 0^\circ$) abweicht. Der Unterschied zwischen den beiden Maßstabszahlen von ca. 10% ist allerdings relativ geringfügig, so daß – unterstellt man eine Schrumpfung der Holzstöcke in x-Richtung vom Zeitpunkt des Originalstichs bis heute (inklusive Papierverzug der Vorlage) – durchaus angenommen werden kann, daß die Originalkartierung auf der Grundlage einer quadratischen Plattkarte entstand.

⇒ **Festlegung der Altkartenabbildung** für die nachstehenden Genauigkeitsanalysen:

Affine Plattkarte
bzw.
rechteckige Plattkarte (mit $\varphi_0 = 27^\circ$)

3. Robuste Parameterschätzungen

Koordinatentransformation: Ausgleichende Ähnlichkeitstransformation (*alt-nach-neu*)

Robustes Schätzverfahren: V-Schätzer mit $k = 1.25$ und $\varepsilon = 0.9$
(Berechnung der Streuungsmaße gemäß Kap.7.4)

Anzahl der zur Untersuchung herangezogenen Punkte: 305

⇒ **Mittlerer Maßstab (in y-Richtung):** 1 : 148 500 (± 700)

Mittlerer Maßstab (in x-Richtung für die Blattmitte $46^\circ 42'$): 1 : 114 300 (± 500)

Zum Vergleich: Die Berechnung auf der Grundlage einer (in diesem Fall nicht optimalen) exakten quadratischen Plattkarte ($\varphi_0 = 0^\circ$), würde einen mittleren Maßstab von 1 : 157 800 (± 700) ergeben.

⇒ **Mittlere Orientierungsabweichung:** -2.9° ($\pm 0.3^\circ$)

Bei Anwendung einer Affintransformation zeigt sich, daß fast keine mittlere Abweichung von der Nordrichtung vorhanden ist (-0.1°), während die Breitengrade dagegen eine mittlere Abweichung von der West-Ost-Richtung von ca. -9° aufweisen.

⇒ **Mittlere Länge der Restklaffungsvektoren (Median) in der Altkarte:** 61 mm
(Lageparameter, kann als *mittlerer Punktfehler* gedeutet werden)

⇒ **Mittlere absolute Abweichung vom Median (MAD) in der Altkarte:** 30 mm
(Skalenparameter, kann zu Vergleichszwecken als *Streuungsmaß* benutzt werden)

4. Untersuchung zur Graduierung im Kartenrahmen

Mittlere Verschiebung in Meridianrichtung: $+27.0'$ ($\pm 0.4'$)

⇒ Die geographischen Breiten sind um ca. $\frac{1}{2}$ Grad **zu klein** angegeben (entspricht einer Lageabweichung von ca. 31 cm in der Originalkarte \approx 49 km in der Natur).

*Mögliche Ursache: Unsachgemäße Bezifferung. Dafür spricht insbesondere die **kuriose Graduierung** dieser Altkarte, die innerhalb der **runden und nach Norden aufsteigenden 1° -Abstände** für die Parallelkreise im westlichen und östlichen Kartenrahmen die Bezifferung der Minutenangaben (in $6'$ Abständen) aber in **südlicher Richtung** angibt.*

Schätzung des Nullmeridians: $20^\circ 40'$ ($\pm 0.4'$) westl. v. Greenwich

⇒ **Abweichung von Ferro ($17^\circ 40'$):** 3° westl. v. Ferro

5. Topologische Unstimmigkeiten

Anzahl der Dreiecksmaschen nach einer Delaunay-Triangulierung in der Altkarte (IST) und in der modernen Karte (SOLL): 593 / 592

Anzahl aller topologisch widersprüchlicher Dreiecksmaschen: 112
(durch vollständigen Vergleich zw. IST- und SOLL-Triangulierung)

⇒ **Anzahl (von insgesamt 305 Punkten) der topologisch widersprüchlichen Dreieckspunkte:** 179 (= 58.7%)

6. Visualisierungen der Verzerrungsverhältnisse

Die Abbildung B.1.2 zeigt ein deutlich stark deformiertes geographisches Gitternetz, das eine Folge der generell unzulänglichen Kartierung der Ortspositionen dieser Altkarte ist. In Kombination mit den hier sehr häufig auftretenden großen Restklaffungsvektoren, werden die Verzerrungsverhältnisse der Tirolkarte anschaulich demonstriert.

Auch wenn im Mittel (nach einer ausgleichenden Affintransformation) die Abweichungen der Meridianlinien von der Nordrichtung zwar nahezu Null ist, so zeigt die Abbildung im Detail doch extreme Schwankungen innerhalb des Kartenfeldes. Ebenso auffällig sind die Verschwenkungen der Parallelkreise zu erkennen, die am stärksten im nördlichen Teil auftreten.

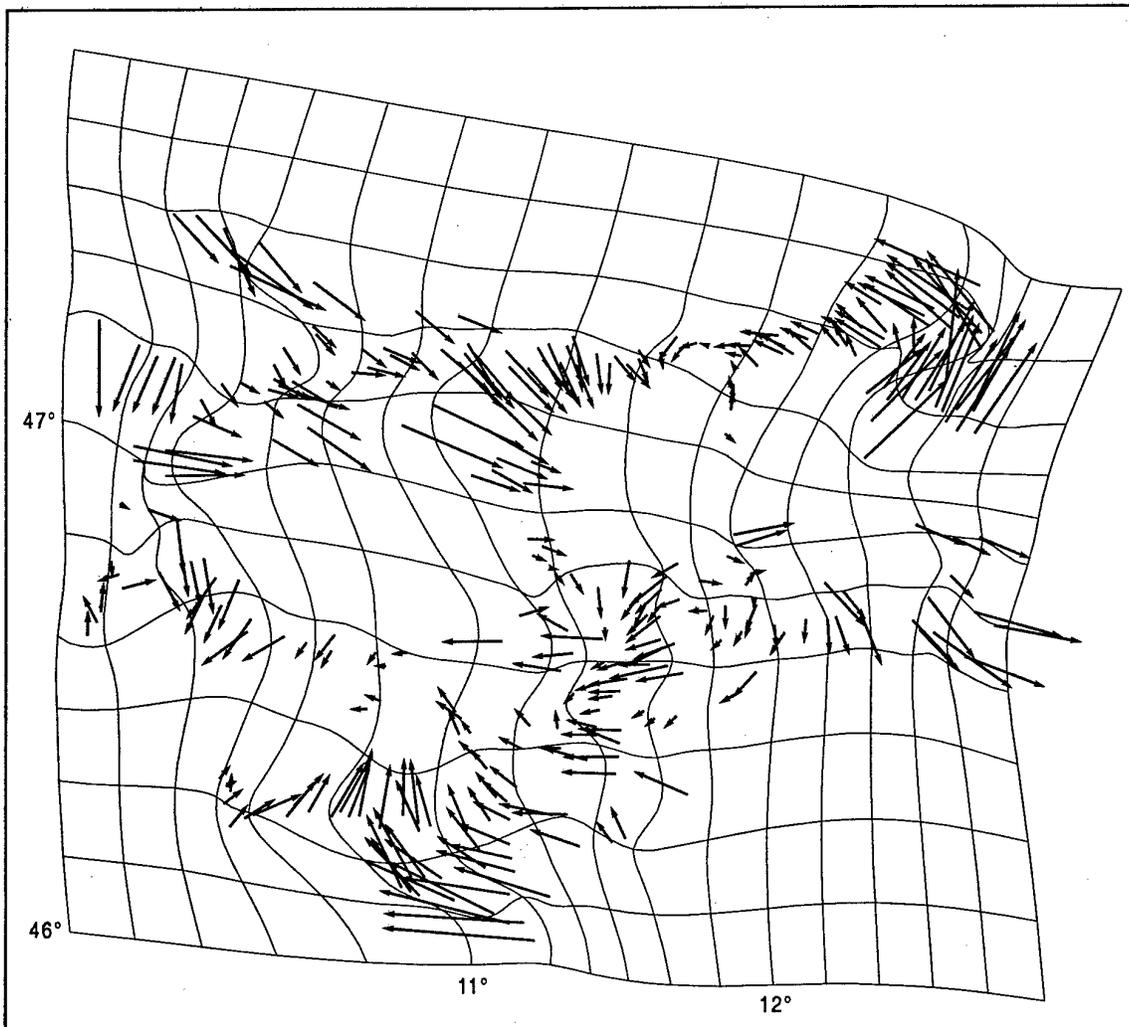


Abb. B.1.2: Restklaffungsvektoren (Vektormaßstab 1:1) und Verzerrungsnetz (die geographischen Längen beziehen sich auf Greenwich) der Tirolkarte. Auf eine Hinterlegung der Originalkarte wird verzichtet, da bei der hier notwendigen starken Verkleinerung (auf 10%) keine Details mehr zu erkennen wären.

Anhang B.2

Die Schlesienkarte

von

MARTIN HELWIG

aus dem Jahre 1561



Abb. B.2.1: Ausschnitt (1:1) der Schlesienkarte von MARTIN HELWIG aus dem Jahre 1561

B.2 Die Schlesienkarte

1. Allgemeine Angaben

Originaler Kartentitel:	- ohne Titel -
Erscheinungsjahr und -ort:	1561, Karlsruhe
Kartenmacher:	Martin Helwig (1516-1574)
Graphische Technik:	Holzschnitt von H. Kron in vier Holztafeln für das Kartenfeld und acht Seitenstücken für den Rahmen; altkoloriert.
Orientierung:	Süden
Originalformat mit Kartenrand (B x H):	816 x 669 mm
Blattschnitt (Originalkarte):	$\lambda_{\text{West}} = 37^\circ 14'$, $\lambda_{\text{Ost}} = 42^\circ 52'$ (südlich) $\lambda_{\text{West}} = 37^\circ 06'$, $\lambda_{\text{Ost}} = 42^\circ 56'$ (nördlich) $\varphi_{\text{Süd}} = 49^\circ 36'$, $\varphi_{\text{Nord}} = 52^\circ 26'$
Kartenstandort(e):	- Badische Landesbibliothek, Karlsruhe - Staatsbibliothek Berlin, u.a.
Vorlage für die Genauigkeitsanalyse:	Faksimile (auf 57% verkleinert) des Lehrstuhls für Kartographie und Topographie der UniBwMünchen; Beilage in: BRUNNER u. MUSALL [1996]
Literaturquellen:	BEINEKE u. BRUNNER [1996], SPATA [1996] HEYER [1890]

2. Bestimmung einer adäquaten Kartennetzabbildung

Vermutung: *Rechteckige Plattkarte*

Verifizierungsmethode: Ausgleichende Affintransformation (6-Parameter)

⇒ **Maßstabzahlen in x- und y-Richtung:**

$$m_x = 880\,100 \quad m_y = 517\,874$$

⇒ **Längentreuer Parallelkreis (bei Annahme einer rechteckigen Plattkarte):**

$$\varphi_o = 53.95^\circ$$

Der ermittelte Wert des längentreuen Parallelkreises liegt deutlich außerhalb des Kartenfeldes um ca. $1\frac{1}{2}$ Grad von der nördlichen Blattbegrenzung entfernt, also nicht wie bei einer normalen rechteckigen Plattkarte üblich, durch die Mitte des darzustellenden Gebietes.

⇒ **Festlegung der Altkartenabbildung für die nachstehenden Genauigkeitsanalysen:**

Affine Plattkarte
bzw.
Rechteckige Plattkarte (mit $\varphi_o = 54^\circ$)

3. Robuste Parameterschätzungen

Koordinatentransformation: Ausgleichende Ähnlichkeitstransformation (*alt-nach-neu*)

Robustes Schätzverfahren: V-Schätzer mit $k = 1.5$ und $\epsilon = 0.5$
(Berechnung der Streuungsmaße gemäß Kap. 7.4)

Anzahl der zur Untersuchung herangezogenen Punkte: 180

⇒ **Mittlerer Maßstab (in y-Richtung):** 1 : 511 500 (\pm 1 300)

Mittlerer Maßstab (in x-Richtung für die Blattmitte $\varphi = 51^\circ$): 1 : 547 600 (\pm 1 400)

Zum Vergleich: Die Berechnung mit dem (in diesem Fall nicht optimalen) Parallelkreis der mittleren Breite des Kartenausschnittes ($\varphi_0 = 51^\circ$), würde einen mittleren Maßstab für die Blattmitte in x- und y-Richtung von 1 : 530 700 (\pm 1 500) ergeben.

⇒ **Mittlere Orientierungsabweichung:** + 6.1° (\pm 0.1°)

Eine ausgleichende Affintransformation ergibt für sowohl für die Drehung der x-Achse als auch der y-Achse fast den gleichen Betrag (die Abweichung vom rechten Winkel der Hauptachsen beträgt nur -1°), so daß auf eine sehr solide Kartierung geschlossen werden kann.

⇒ **Mittlere Länge der Restklaffungsvektoren (Median) in der Altkarte:** 14 mm
(Lageparameter, kann als *mittlerer Punktfehler* gedeutet werden)

⇒ **Mittlere absolute Abweichung vom Median (MAD) in der Altkarte:** 6 mm
(Skalenparameter, kann zu Vergleichszwecken als *Streuungsmaß* benutzt werden)

4. Untersuchung zur Graduierung im Kartenrahmen

Mittlere Verschiebung in Meridianrichtung: - 4.2' (\pm 0.4')

⇒ *Die Breitenangaben sind um den für Altkarten erstaunlich geringen Betrag von vier Minuten (entspricht einer Lageabweichung von 7 mm in der Originalkarte oder einer Naturstrecke von 3.6 km) zu groß angegeben.*

Schätzung des Nullmeridians: 22° 56' (\pm 1') westl. v. Greenwich

⇒ **Abweichung von Ferro (17° 40'):** 5° 16' westl. v. Ferro

Mögliche Ursache: HELWIG bezog sich auf Längenangaben MERCATORS, bei dem in seiner Karte von Europa (Duisburg, 1559) die gleiche Abweichung auftritt (nach HEYER [1890]).

5. Topologische Unstimmigkeiten

Anzahl der Dreiecksmaschen nach einer Delaunay-Triangulierung in der Altkarte (IST) und in der modernen Karte (SOLL): 344 / 342

Anzahl aller topologisch widersprüchlicher Dreiecksmaschen: 25 (= 7.3%)
(durch vollständigen Vergleich zw. IST- und SOLL-Triangulierung)

⇒ **Anzahl (von insgesamt 180 Punkten) topologisch widersprüchlicher Dreieckspunkte:** 52 (= 28.9%)

6. Visualisierung der Verzerrungsverhältnisse

Wie aus der Abbildung B.2.2 zu erkennen ist, treten große bis extreme Deformationen des geographischen Gitternetzes der südorientierten Schlesienkarte im südwestlich (oben links), im nordwestlichen (unten rechts) und im nördlichen (unten Mitte) Teil der Karte auf. Die Restklaffungsvektoren ragen dabei teilweise weit außerhalb des Kartenfeldes heraus. Vermutlich wollte HELWIG einige (für ihn wichtige) Ortschaften noch in die Karte übernehmen, war aber durch das Druckformat gebunden, so daß er auf die exakte Kartierung (sofern ihm die genauen Ortspositionen überhaupt bekannt waren) verzichtete.

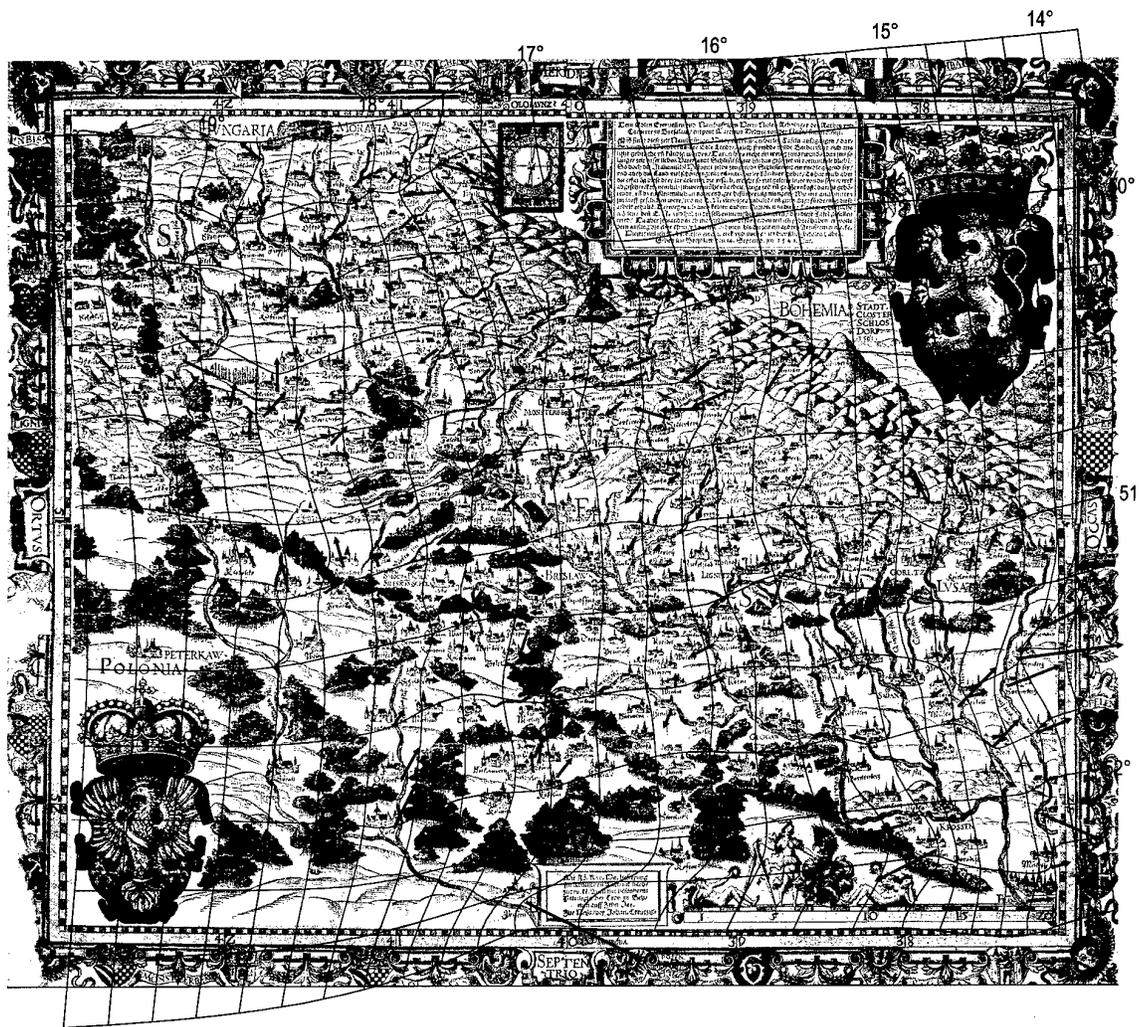


Abb. B.2.2: Restklaffungsvektoren (Vektormaßstab 1:1) und **Verzerrungsnetz** (die geographischen Längenangaben beziehen sich auf Greenwich) der südorientierten Schlesienkarte von MARTIN HELWIG.

Anhang B.3

Die Ostfrieslandkarte

von

UBBO EMMIUS

aus dem Jahre 1595



Abb. B.3.1: Ausschnitt (1:1) der Ostfrieslandkarte von UBBO EMMIUS (1595)

B.3 Die Ostfrieslandkarte

1. Allgemeine Angaben

Originaler Kartentitel:	Typus Frisæ Orient(alis)
Erscheinungsjahr und -ort:	1595, Amsterdam
Kartenmacher:	Ubbo Emmius (1547-1625)
Graphische Technik:	Kupferstich; altkoloriert
Orientierung:	Norden
Originalformat mit Kartenrand (B x H):	560 x 434 mm
Blattschnitt:	Keine Graduierung im Kartenrahmen. Durch Vergleich mit einer modernen Karte liegen die Blattbegrenzungen ungefähr bei: $\lambda_{\text{West}} = 6^\circ 38'$, $\lambda_{\text{Ost}} = 8^\circ 18'$ (westl. v. G.) $\varphi_{\text{Süd}} = 53^\circ 00'$, $\varphi_{\text{Nord}} = 53^\circ 46'$
Kartenstandort:	Badische Landesbibliothek Karlsruhe
Vorlage für die Genauigkeitsanalyse:	Faksimile des Lehrstuhls für Kartographie und Topographie der Universität der Bundeswehr München, 1995 (noch unveröffentlicht)
Literaturquellen:	SCHUMACHER [1995]

2. Bestimmung einer adäquaten Kartennetzabbildung

Vermutung: *Rechteckige Plattkarte*

Verifizierungsmethode: Ausgleichende Affintransformation (6-Parameter)

⇒ **Maßstabzahlen** in x- und y-Richtung:

$$m_x = 351\,900 \quad m_y = 212\,053$$

⇒ **Längentreuer Parallelkreis** (bei Annahme einer rechteckigen Plattkarte):

$$\varphi_0 = 52.94^\circ$$

Der ermittelte Wert des längentreuen Parallelkreises liegt damit ungefähr auf der geographischen Breite der südlichen Blattbegrenzung der Altkarte von 53° , so daß angenommen werden kann, daß die Ostfrieslandkarte auf der Grundlage einer rechteckigen Plattkarte konstruiert worden ist, wobei allerdings die (optimale) Wahl des längentreuen Parallelkreises in der Blattmitte ($\approx 53.5^\circ$) dem Kartenmacher (falls ihm der Verzerrungseffekt überhaupt bekannt war) nicht so wichtig erschien.

⇒ **Festlegung der Altkartenabbildung** für die nachstehenden Untersuchungen:

Affine Plattkarte
bzw.
Rechteckige Plattkarte (mit $\varphi_0 = 53^\circ$)

3. Robuste Parameterschätzungen

Koordinatentransformation: Ausgleichende Ähnlichkeitstransformation (*alt-nach-neu*)

Robustes Schätzverfahren: V-Schätzer mit $k = 1.5$ und $\varepsilon = 0.4$
(Berechnung der Streuungsmaße gemäß Kap. 7.4)

Da im westlichen und östlichen Teil der Ostfrieslandkarte nach SCHUMACHER [1995] unterschiedliche Maßstäbe vorliegen, wird neben der Genauigkeitsanalyse für die Gesamtkarte auch eine getrennte Berechnung für die Teilgebiete vorgenommen. Die Gebietsabgrenzung geht aus der Abbildung B.3.2 hervor.

3.1 Gesamtes Gebiet (306 Punkte)

- ⇒ **Mittlerer Maßstab (in y-Richtung):** **1 : 212 200 (± 200)**
- Mittlerer Maßstab (in x-Richtung für die Blattmitte $\varphi=53^\circ 23'$):** **1 : 210 300 (± 200)**
- ⇒ **Mittlere Orientierungsabweichung:** **+ 1.7° ($\pm 0.1^\circ$)**
Eine ausgleichende Affintransformation ergibt sowohl für die Drehung der x-Achse als auch der y-Achse fast den gleichen Betrag von +1.4° ($\pm 0.1^\circ$). Die Hauptachsen stehen somit im Mittel nahezu exakt senkrecht aufeinander.
- ⇒ **Mittlere Länge der Restklaffungsvektoren (Median):** **2.7 mm**
(Lageparameter, kann als mittlerer Punktfehler gedeutet werden)
- ⇒ **Mittlere absolute Abweichung vom Median (MAD):** **1.7 mm**
(Skalenparameter, kann zu Vergleichszwecken als Streuungsmaß benutzt werden)

3.2 Westlicher Teil (237 Punkte)

- ⇒ **Mittlerer Maßstab (in y-Richtung):** **1 : 213 500 (± 200)**
- ⇒ **Mittlere Orientierungsabweichung:** **+ 1.8° ($\pm 0.1^\circ$)**
- ⇒ **Mittlere Länge der Restklaffungsvektoren (Median):** **2.1 mm**
(Lageparameter, kann als mittlerer Punktfehler gedeutet werden)
- ⇒ **Mittlere absolute Abweichung vom Median (MAD):** **1.0 mm**
(Skalenparameter, kann zu Vergleichszwecken als Streuungsmaß benutzt werden)

3.3 Östlicher Teil (69 Punkte)

- ⇒ **Mittlerer Maßstab (in y-Richtung):** **1 : 184 000 (± 500)**
- ⇒ **Mittlere Orientierungsabweichung:** **- 1.3° ($\pm 0.2^\circ$)**
- ⇒ **Mittlere Länge der Restklaffungsvektoren (Median) in der Altkarte:** **2.3 mm**
(Lageparameter, kann als mittlerer Punktfehler gedeutet werden)
- ⇒ **Mittlere absolute Abweichung vom Median (MAD) in der Altkarte:** **1.2 mm**
(Skalenparameter, kann zu Vergleichszwecken als Streuungsmaß benutzt werden)

4. Topologische Unstimmigkeiten für das Gesamtgebiet

Anzahl der Dreiecksmaschen nach einer Delaunay-Triangulierung in der Altkarte (IST) und in der modernen Karte (SOLL):	594 / 595
Anzahl aller topologisch widersprüchlicher Dreiecksmaschen: (durch vollständigen Vergleich zw. IST- und SOLL-Triangulierung)	35 (= 6%)
⇒ Anzahl (von insgesamt 306 Punkten) der topologisch widersprüchlichen Dreieckspunkte:	62 (= 20%)

5. Visualisierung der Verzerrungsverhältnisse (Abb. B.3.2)

Die radial (nach innen) verlaufenden Restklaffungsvektoren im (nord)östlichen Teil der Karte weisen eindeutig auf eine *regionale Maßstabsänderung* hin. Neben der Genauigkeitsanalyse für die Gesamtkarte ist daher eine getrennte Berechnung für den westlichen und östlichen Teil zwingend notwendig. Die Ursache der starken Deformation des geographischen Netzes in der Mitte des südlichen Randes der Karte liegt eindeutig an der grob fehlerhaften Kartierung der Ortschaft *Esterwegen* (Länge des extrem großen Restklaffungsvektors = 67 mm \approx 14 km im Naturmaß), die EMMIUS vermutlich noch innerhalb des Kartenfeldes darstellen wollte (die exakte Lage befindet sich – wie deutlich zu erkennen ist – außerhalb des Kartenblattes).

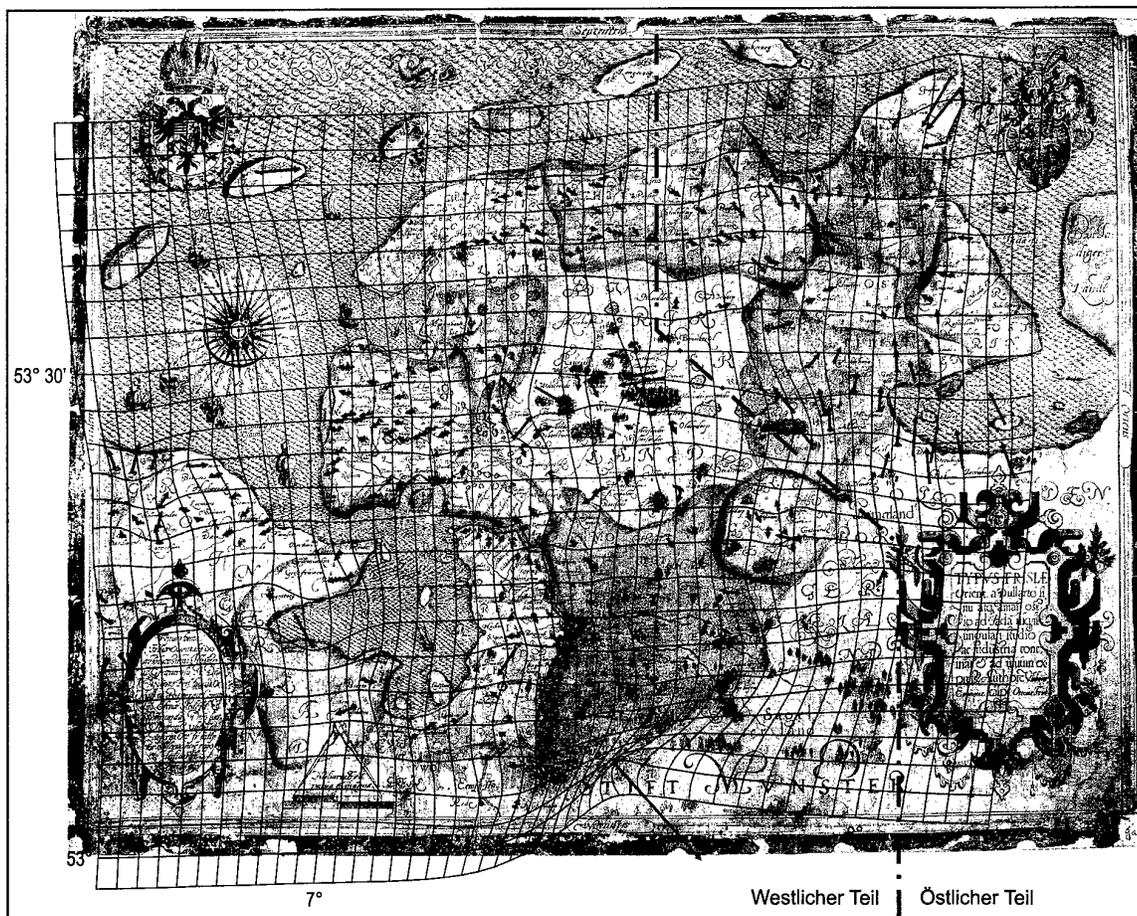


Abb. B.3.2: Restklaffungsvektoren (Vektormaßstab 1:1) und Verzerrungsnetz (die geographischen Längen beziehen sich auf Greenwich) für das Gesamtgebiet der Ostfrieslandkarte.

Literaturverzeichnis

- ALBERTI, H.-J., VON: *Mass und Gewicht*. Geschichtliche und tabellarische Darstellungen von den Anfängen bis zur Gegenwart. Akademie-Verlag, Berlin, 1957
- ANGERER, B.: *Die Frankenkarte nach S. A. Rotenhan aus dem Ortelius-Atlas und ihre Genauigkeit*. Diplomarbeit am Lehrstuhl für Kartographie und Reproduktionstechnik der Technischen Universität München, 1996, unveröffentlicht
- ANDREWS, D. F.: *A robust Method for Multiple Linear Regression*. In: *Technometrics*, 16, S. 523-531, 1974
- BABICZ, J.: Stichwort: Ptolemäus. In: *Lexikon zur Geschichte der Kartographie*. Franz Deuticke, Wien, 1986
- BEINEKE, D. und BRUNNER, K.: *Genauigkeitsuntersuchung zur Schlesienkarte von Martin Helwig aus dem Jahre 1561*. In: *Karlsruher Geowissenschaftliche Schriften, Reihe C: Alte Karten, Band 9*, Herausgegeben von BRUNNER und MUSALL, Karlsruhe, 1996
- BENNING, W.: *Nachbarschaftstreue Restklaffenverteilung für Koordinatentransformationen*. In: *Zeitschrift für Vermessungswesen*, Heft 1, 1995, S. 16 - 25
- BONACKER, W.: *Donnus Nicolaus Germanus, sein Kartennetz, seine Ptolemäus-Rezensionen und -Ausgaben*. In: *Schweizer Gutenberg Museum - Zeitschrift für Buchdruck, Bibliophilie- und Pressegeschichte, Band 1*, Bern, 1932
- BORUTTA, H.: *Robuste Schätzverfahren für geodätische Anwendungen*. Schriftenreihe Studiengang Vermessungswesen der Universität der Bundeswehr München, Heft 33, 1988
- BOX, G.E.P.: *Non Normality and Tests on Variances*. *Biometrika*, 40, 1953
- BRUNNER, K. u. MUSALL, H. [Hrsg.]: *Martin Helwigs Karte von Schlesien aus dem Jahre 1561*. *Karlsruher Geowissenschaftliche Schriften, Reihe C: Alte Karten, Band 9*, 1996
- BRUNNER, K.: *Ein Kartenwerk der Nordlande vom Jahre 1539*. *Deutsches Schifffahrtsarchiv, Band 12*, Bremerhafen, 1989
- BRUNNER, K.: *Die "Carta marina" des Olaus Magnus vom Jahre 1539*. In: *5. Kartographiehistorisches Colloquium Oldenburg 1990*, Dietrich Reimer Verlag, Berlin 1991
- BRUNNER, K.: *Zwei Regionalkarten Süddeutschlands von David Seltzlin*. In: Neuman, J. (Hrsg.): *Karten hüten und bewahren*. Festgabe für L. Zögner. *Kartensammlung und Kartendokumentation, Band 11*, Justus Perthes Verlag, Gotha, 1995
- CASPARY, W.; CHEN, W.; KÖNIG, R. : *Kongruenzuntersuchungen in Deformationsnetzen durch Minimierung der Summe der Restklaffungsbeträge*. In: Welsch, W. (Hrsg.): *Deformationsanalysen '83*, Schriftenreihe des Studienganges Vermessungswesen der Universität der Bundeswehr München, 1983
- CASPARY, W. und BORUTTA, H.: *Robust estimation as applied to deformation analysis*. *Proceedings of the 4th International Symposium on Geodetic Measurements of Deformations*, Kattowice, 1985
- CASPARY, W. und BORUTTA, H.: *Robust estimation in deformation models*. *Survey Review*, Vol. 29, No. 223, 1987

- CASPARY, W.; HAEN, W.; PLATZ, V.: *The distribution of length and direction of two-dimensional random vectors*. International Association of Geodesy symposia, No. 101, New York, 1990
- DAXINGER, W.: *Der Einfluß fehlerhafter Altpunkte auf die Bestimmung von Neupunkten*. In: Österreichische Zeitschrift für Vermessung und Geoinformationen, 83. Jahrgang, Heft 3, 1995, S. 136 - 144
- DELAUNAY, B.: *Sur la Sphère Vide*. Bulletin de l'Académie des Sciences de l'URSS, 1834, S. 793-800
- DÜPPE, R.D UND GOTTSCHALK, H.J.: *Automatische Interpolation von Isolinien bei willkürlich verteilten Stützpunkten*. In: Allgemeine Vermessungsnachrichten, Heft 10, 1970
- EHLERS, M.: *Integrative Verarbeitung von digitalen Bilddaten der Satellitenphotogrammetrie und -fernerkundung im Rahmen von Geographischen Informationssystemen*. Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Vermessungswesen der Universität Hannover, Nr. 149, 1987
- FEUERSTEIN, A.: *Die Entwicklung des Kartenbildes von Tirol bis um die Mitte des 16. Jahrhunderts. XVIII*. Deutscher Geographentag, Wien, 1912
- FINSTERWALDER, R.: *Die Genauigkeit zweier Kartierungen Tirols aus dem 17. Jahrhundert*. In: Studien zur Namenkunde und Sprachgeographie. Festschrift für Karl Finsterwalder zum 70. Geburtstag. Innsbrucker Beiträge zur Kulturwissenschaft, Innsbruck, 1971
- FINSTERWALDER, R.: *Maßstab und Genauigkeit alter Karten - gezeigt an einigen Kartierungen Bayerns*. In: Cartographia Bavariae - Bayern im Bild der Karte - Bayerische Staatsbibliothek, Ausstellungskatalog 44; Anton H. Konrad Verlag, 1988
- FÖRSTNER, W. und WERNER, H.: *Programmgesteuerte Deformationsanalyse*. In: Zeitschrift für Vermessungswesen, 111. Jahrgang, Heft 6, Juni 1986
- FORSTNER, G. und OEHRLI, M.: *Graphische Darstellungen der Untersuchungsergebnisse alter Karten und die Entwicklung der Verzerrungsgitter*. In: Cartographica Helvetica, Heft 17, Januar 1998
- FORSTNER, G.: *Zwei Konstruktionsmethoden von Verzerrungsgittern zur Untersuchung alter Karten*. In: Cartographica Helvetica, Heft 18, Juli 1998
- GÖPFERT, W.: *Interpolationsergebnisse mit der Multiquadratischen Methode*. In: Zeitschrift für Vermessungswesen, Heft 10, S. 457 - 460, 1977
- GOTTHARDT, E.: *Einführung in die Ausgleichsrechnung*. Wichmann Verlag, 2. Auflage, Karlsruhe, 1978
- GROSSMANN, W.: *Grundzüge der Ausgleichsrechnung*. Springer-Verlag, 3. erweiterte Auflage, Berlin, Heidelberg, New York, 1969
- GROSSMANN, W.: *Geodätische Rechnungen und Abbildungen in der Landesvermessung*. Verlag Konrad Wittwer, 3. Auflage, Stuttgart, 1976
- HAKE, G. und GRÜNREICH D.: *Kartographie*. Walter de Gruyter, 7. Auflage, Berlin, New York 1994
- HARDY, R. L.: *Multiquadratic Equations of Topography and Other Irregular Surfaces*. Journal of Geophysical Research., Vol. 76, No. 8, 1971

- HARDY, R. L.: *Geodetic application of multiquadratic analysis*. In: Allgemeine Vermessungsnachrichten, Heft 10, Seite 398-406, 1972
- HEYER, A.: *Die kartographischen Darstellungen Schlesiens bis zum Jahre 1720*. In: Zeitschrift des Vereins für Geschichte und Altertum Schlesiens, Band 23, Breslau 1891
- HÖPCKE, W.: *Fehlerlehre und Ausgleichsrechnung*. Walter de Gruyter, Berlin, New York 1980
- HUBER, P. J.: *Robust Estimation of a Location Parameter*. In: Annals of Mathematical Statistics, 35, S. 73-101, 1964
- IMHOF, E.: *Beiträge zur Geschichte der topographischen Kartographie*. In: Internationales Jahrbuch der Kartographie, Band 4, S. 129-152, 1964
- IMHOF, E.: *Herstellung, Genauigkeit und Form der alten Schweizer Karten*. In: Weisz, L. (Hrsg.): Die Schweiz auf alten Karten, Buchverlag der Neuen Zürcher Zeitung, 3. Auflage, 1971, S. 221 - 241
- JÄGER, A. H.: *Statistik mit Mathematica*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 1997
- KOCH, K. R.: *Digitales Geländemodell und automatische Höhenlinienzeichnung*. In: Zeitschrift für Vermessungswesen, Heft 8, 1973, S. 346 - 352
- KRAUS, K.: *Photogrammetrie, Band 1*. Dümmler Verlag, 5. Auflage, Bonn, 1994
- KRAUS, K.: *Photogrammetrie, Band 2*. Dümmler Verlag, Bonn, 1984
- KRAUS, K.: *Verschiedene Transformationen und Indikatoren zur Lokalisierung grober Datenfehler*. In: Allgemeine Vermessungsnachrichten, 82. Jahrgang, Heft 1, 1975, S. 23 - 34
- KREYSZIG, E.: *Statistische Methoden und ihre Anwendungen*. 5. Auflage, Vandenhoeck & Ruprecht in Göttingen, 1975
- LEHMKÜHLER, H.: *Die geodätische Deformationsanalyse als Mustererkennungsaufgabe*. Veröffentlichung des Geodätischen Institutes der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen, Band 49, Diss., Aachen, 1993
- MEKENKAMP, P. G. M.: *Die Entwicklung einer neuen Methode für die Bestimmung der Genauigkeit alter Karten*. In: Scharfe, W. und Harms, H. (Hrsg.): 5. Kartographiehistorisches Colloquium Oldenburg 1990, Dietrich Reimer Verlag, Berlin 1991
- MESENBURG, P.: *Kartographie im Mittelalter - Eine analytische Betrachtung zum Informationsgehalt der Portulankarte des Betrus Roselli aus dem Jahre 1449*. In: Karlsruher Geowissenschaftliche Schriften, Band 1, 1989
- MESENBURG, P.: *Germaniae Universalis - Die Genauigkeit der Darstellung Europas durch Gerhard Mercator im Jahre 1585*. In: Gerhard Mercator, Europa und die Welt. Duisburg, 1994
- MEURER, P. H.: *„Hintergründe und Analysen zu Tobias Mayers „Kritischer Karte von Deutschland“*. In: Cartographica Helvetica, Heft 12, Juli 1995
- MITTERMEIER, E.: *Skript zur Vorlesung Landesvermessung I. Berlin, 1975/76*, unveröffentlicht.
- NEUNTEUFL, W.: *Genauigkeit bei alten Landkarten*. In: Veröffentlichungen des Verbandes österreichischen Geschichtsvereine, Bd. 23, Salzburg, 1984

- PAGANINI, L.: Claudii Ptolemaei - *COSMOGRAPHIA - Tavole della geografia di Tolomeo*. Editzione della tavole del codic lat. V F. 32 (sec. XV) della Biblioteca Nazionale di Napoli, 1990
- PÁPAY, G.: *Aufnahmemethodik und Kartierungsgenauigkeit der ersten Karte Mecklenburgs von Tilemann Stella (1525 - 1589) aus dem Jahre 1552 und sein Plan zur Kartierung der deutschen Länder*. In: Petermanns Geographische Mitteilungen 132, VEB Hermann Haack Verlag, Gotha, 1988, S. 209 - 216
- PREUSSER, A.: *Computing Contours by successiv solution of quintic polynomial equations*. Fortran-Programm seit März 1983 im Rechenzentrum der TU-Berlin im Einsatz. "ACM Transactions on Mathematical Software", Vol.10, No. 4, Dec., 1984, P. 473. Programm-Quellcode zugänglich über Internet: <http://www.netlib.org/toms/626> [Juni 2000], <http://www.fhi-berlin.mpg.de/grz/pub/preusser.html> [Juni 2000]
- PREUSSER, A.: *Bivariate Interpolation über Dreieckselemente durch Polynome 5. Ordnung mit C_1 -Kontinuität*. In: Zeitschrift für Vermessungswesen, Heft 6, 1984, S. 292 - 301
- PIZZININI, M. / Tiroler Landesmuseum Ferdinandeum, Innsbruck: *Tirol im Kartenbild bis 1800*. Ausstellungskatalog zum 40. Deutschen Geographentag. Innsbruck 1975
- PROHOROV, YU. V., ROZANOV, YU. A.: *Probability Theory*. Springer-Verlag New York, Heidelberg, Berlin, 1969
- RICHTER, E.: *Mathias Burgklehners Tirolische Landtafeln, 1608, 1611, 1620 (mit Nachdrucken)*. Wien, 1902
- SACHS, L.: *Angewandte Statistik*. Springer Verlag, 7. Auflage, Berlin Heidelberg, 1992
- SCHARFE, W.: *Das kartographische Bild von Berlin-Brandenburg auf Deutschland- und Mitteleuropa-Karten im 15. und 16. Jahrhundert*. In: Jahrbuch des Landesarchivs Berlin, Geb. Mann Verlag, Berlin, 1996, S. 7 - 46
- SCHÖDLBAUER, A.: *Rechenformeln und Rechenbeispiele zur Landesvermessung*. Wichmann-Skripten, Heft 2, Teil 1, Teil 2, Teil 3, Herbert Wichmann Verlag Karlsruhe, 1982
- SCHUHMACHER, H.: *Ubbo Emmius: Trigonometrie, Topograph und Kartograph - unter besonderer Berücksichtigung neuer Forschungsergebnisse*. In: Emdener Jahrbuch, Band 73/74, Ostfriesische Landschaft, Aurich 1995
- SPATA, M.: *Die Schlesienkarte von Martin Helwig aus dem Jahre 1561*. In: Martin Helwigs Karte von Schlesien aus dem Jahre 1561. Karlsruher Geowissenschaftliche Schriften, Reihe C: Alte Karten, Band 9, Herausgegeben von BRUNNER und MUSALL, Karlsruhe, 1996
- SPÄTH, H.: *Spline-Algorithmen zur Konstruktion glatter Kurven und Flächen*. R. Oldenbourg Verlag, 4. Auflage, München, Wien, 1986
- VITAL, A.: *Die Kartenentwurfslehre*. Franz Deuticke, Leipzig und Wien, 1903
- VOSS, L.-T.: *Erstellung eines EDV-Programmes zur Konstruktion von Verzerrungsnetzen zur Genauigkeitsuntersuchung auf Altkarten*. Diplomarbeit am Lehrstuhl für Kartographie der Universität der Bundeswehr München, unveröffentlicht, 1991
- WAGNER, H.: *Das Rätsel der Kompaßkarten im Lichte der Gesamtentwicklung der Seekarten*. In: Verhandlungen des elften deutschen Geographentages zu Bremen am 17., 18. und 19. April 1895. Repr. in: Das rechte Fundament der Seefahrt. Deutsche Beilage zur Geschichte der Navigation. Hamburg, 1982

- WAGNER, K.: *Kartographische Netzentwürfe*. Bibliographisches Institut, 2. Auflage, Mannheim, 1962
- WATSON, D.F.: *ACORD: Automatic Countouring Of Raw Data*. Computers & Geosciences, Pergamon Press Ltd, Vol. 8, No. 1, p. 97-101, 1982. Quellcode der Delaunay-Triangulation (Fortran) über Internet zugänglich [Juni 2000]:
<ftp://garbo.uwasa.fi/pc/source/contour.f/>
- WEISS, I.: *Automatische Erstellung von Verzerrungsgittern alter Karten*. Diplomarbeit, Technische Universität München, 1985
- WERNER, H.: *Die 5-Parameter-Transformation - Zusammenhang mit anderen Verfahren und die Elimination grober Fehler*. In: Allgemeine Vermessungsnachrichten, Heft 7, 1987, S. 261 - 273
- WELSCH, W.: *Zur Beschreibung homogenen Strains oder Einige Betrachtungen zur affinen Transformation*. In: Zeitschrift für Vermessungswesen, 107. Jahrgang, Heft 5, 1982
- WILD, E.: *Die Prädiktion mit Gewichtsfunktionen und deren Anwendung zur Beschreibung von Flächen bei topographischen Geländeaufnahmen*. Deutsche geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Reihe C: Dissertationen, Heft Nr. 277, München, 1983
- WOLF, H.: *Ausgleichsrechnung - Formeln zur praktischen Anwendung*. Ferd. Dümmler Verlag, Dümmlerbuch 7835, Bonn, 1975
- WOLF, R.: *Geschichte der Vermessung in der Schweiz als historische Einleitung zu den Arbeiten der schweiz. geodätischen Commission*. Zürich, 1879
- WOLFRUM, O.: *Die Verzerrungseigenschaften der affinen Transformation*. In: Allgemeine Vermessungsnachrichten, Heft 10, 1978, S. 367 - 374
- TORGE, W.: *Geodäsie*. Sammlung Göschen, Walter de Gruyter, Berlin New York, 1975

Lebenslauf

Name: Hans-Dieter Beineke

Geburtsdatum: 29.08.1947

Geburtsort: Münster/Westfalen

Familienstand: verheiratet

Schulausbildung:

1954 - 1963 Volksschule in Münster/Westfalen
1963 - 1966 Berufsschule für Landkartentechniker in Dortmund
1966 - 1969 Berufsaufbauschule in Münster/Westfalen
1971 - 1974 Technische Fachhochschule Berlin: Ing. für Landkartentechnik
1974 - 1978 Technische Universität Berlin: Dipl.-Ing. für Vermessungswesen

Grundwehrdienst:

1969 - 1971 Wehrpflichtiger bei der TOP-Batterie in Münster/Westfalen.
Mitwirkung bei der Herstellung militärischer Kartenwerke am ehemaligen IFAG (heute IGK), Frankfurt

Berufsweg:

1963 - 1966 Lehre als Planungszeichner bei der Landesplanungsgemeinschaft NRW mit Abschluß als Landkartentechniker
1966 - 1967 Planungszeichner bei der Landesplanungsgemeinschaft NRW
1967 - 1969 Landkartentechniker beim Landesvermessungsamt NRW
1978 - 1979 Tutor am Institut für Photogrammetrie und Kartographie der Technischen Universität Berlin
1978 - 1979 Herstellung von geologischen Karten bei Fa. Gebhardt, Berlin
1979 - 1979 Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Geodäsie und Photogrammetrie der Technischen Universität Berlin
1979 - 1981 Vermessungsreferendar beim Senator für Bau- und Wohnungswesen Berlin, mit Abschluß der Großen Staatsprüfung für den höheren technischen Verwaltungsdienst
seit 1982 Wissenschaftlicher Mitarbeiter bei der Universität der Bundeswehr München, Neubiberg, Institut 10: Photogrammetrie und Kartographie, Lehrstuhl für Kartographie und Topographie

Dank

Die Idee zur vorliegenden Arbeit entstand im Rahmen meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Kartographie und Topographie der Universität der Bundeswehr München, nachdem ich mich schon einige Jahre mit der rechnerischen Realisierung von Genauigkeitsuntersuchungen für Altkarten beschäftigt hatte.

Mein besonderer Dank gilt Univ. Prof. Dr.-Ing. K. Brunner für die Förderung zur Durchführung dieser Arbeit sowie die stetige Diskussionsbereitschaft und die zahlreichen Hinweise und Verbesserungsvorschläge aus kartographiehistorischer Sicht.

Insbesondere möchte ich mich aber auch herzlich bei Univ. Prof. Dr.-Ing. W. Caspary als zweiter Berichterstatter bedanken, von dem die Idee zur robusten Parameterschätzung für Genauigkeitsuntersuchungen bei Altkarten stammt. Ohne seine jederzeit vorhandene hilfreiche Unterstützung bei den ausgleichungstechnischen Problemstellungen wäre diese Arbeit nicht möglich gewesen.

Des weiteren bedanke ich mich bei Univ. Prof. Dr.rer.nat. K. Wichmann für die bereitwillige Übernahmen des Vorsitzes für das Promotionsverfahren sowie seine entgegenkommende und motivierende Aufmunterung vor der mündlichen Prüfung.

Nicht zu letzt bedanke ich mich bei meiner Frau für das Verständnis und die ausdauernde Geduld, die im privaten Bereich notwendig war, um diese Arbeit fertigzustellen.

Schriftenreihe des Studiengangs Geodäsie und Geoinformation der Universität der Bundeswehr München

Bisher erschienene Hefte:

Heft 1/1978 (vergriffen)

A. Schödlbauer (Bearb.): Curriculum für den wissenschaftlichen Studiengang Vermessungswesen der Hochschule der Bundeswehr München. 53 S.

Heft 2/1978

A. Chrzanowski and E. Dorrer (Eds.): Proceedings „Standards and Specifications for Integrated Surveying and Mapping Systems“. Workshop held in Munich, Federal Republic of Germany, 1-2 June, 1977. Assisted by J. McLaughlin. VII, 181 S.

Heft 3/1978

W. Caspary and A. Geiger: Untersuchungen zur Leistungsfähigkeit elektronischer Neigungsmesser. 62 S.

Heft 4/1979

E. Baumann, W. Caspary, H. Dupraz, W. Nie-meier, H. Pelzer, E. Kuntz, G. Schmitt und W. Welsch: Seminar über Deformationsanalysen, gehalten an der Hochschule der Bundeswehr München. 106 S.

Heft 5/1981

K. Torlegård: Accuracy Improvement in Close Range Photogrammetry. 68 S.

Heft 6/1982

W. Caspary und W. Welsch (Hrsg.): Beiträge zur großräumigen Neutrassierung. 271 S.

Heft 7/1982

K. Borre and W. M. Welsch (Eds.): International Federation of Surveyors - FIG. Proceedings „Survey Control Networks“. Meeting of Study Group 5B, 7th -9th July, 1982, Aalborg University Centre, Denmark. 431 S.

Heft 8/1982

A. Geiger: Entwicklung und Erprobung eines Präzisionsneigungstisches zur Kalibrierung geodätischer Instrumente. Dissertation. 125 S.

Heft 9/1983

W. Welsch (Hrsg.): Deformationsanalysen '83. Geometrische Analyse und Interpretation von Deformationen Geodätischer Netze. Beiträge zum Geodätischen Seminar 22. April 1983. 339 S.

Heft 10/1984

W. Caspary, A. Schödlbauer und W. Welsch (Hrsg.): 10 Jahre Hochschule der Bundeswehr München. Beiträge aus dem Institut für Geodäsie. 244 S.

Heft 11/1984 (vergriffen)

W. Caspary und H. Heister (Hrsg.): Elektrooptische Präzisionsstreckenmessung. Beiträge zum Geodätischen Seminar 23. September 1983. 270 S.

Heft 12/1984

P. Schwintzer: Analyse geodätisch gemessener Punktlageänderungen mit gemischten Modellen. Dissertation. 159 S.

Heft 13/1984

G. Oberholzer: Landespflege in der Flurbereinigung. 81 S.

Heft 14/1984

G. Neukum: Fernerkundung der Planeten und kartographische Ergebnisse. Mit Beiträgen von G. Neugebauer. Herausgegeben von G. Neugebauer. 102 S.

Heft 15/1984

A. Schödlbauer und W. Welsch (Hrsg.): Satelliten-Doppler-Messungen. Beiträge zum Geodätischen Seminar 24./25. September 1984. 396 S.

Heft 16/1985 (vergriffen)

M. K. Szacherska, W. M. Welsch: Geodetic Education in Europe. 234 S.

Heft 17/1986

B. Eissfeller, G. W. Hein: A Contribution to 3d-Operational Geodesy. Part 4: The Observation Equations of Satellite Geodesy in the Model of Integrated Geodesy. 190 S.

Heft 18/1985

G. Oberholzer: Landespflege in der Flurbereinigung, Teil II. 116 S.

Heft 19/1986 (vergriffen)

H. Landau, B. Eissfeller and G. W. Hein: GPS Research 1985 at the Institute of Astronomical and Physical Geodesy. 210 S.

Heft 20/1985

Heft 20-1

W. Welsch and L. A. Lapine (Eds.): International Federation of Surveyors - FIG. Proceedings „Inertial, Doppler and GPS Measurements for National and Engineering Surveys“. Joint Meeting of Study Groups 5B and 5C, July 1-3, 1985. Volume 1. 310 S.

Heft 20-2

W. Welsch and L. A. Lapine (Eds.): International Federation of Surveyors - FIG. Proceedings „Inertial, Doppler and GPS Measurements for National and Engineering Surveys“. Joint Meeting of Study Groups 5B and 5C, July 1-3, 1985. Volume 2. S. 311 - 634

Heft 21/1986

G. Oberholzer: Landespflege in der Flurbereinigung, Teil III. 100 S.

Heft 22/1987

W. Caspary, G. Hein, A. Schödlbauer (Hrsg.): Beiträge zur Inertialgeodäsie. Geodätisches Seminar 25./26. September 1986. 386 S.

Heft 23/1987

E. Dorrer und J. Peipe (Hrsg.): Motografie. Symposium 11./12. März 1986. 285 S.

Heft 24/1987

G. Neugebauer (Hrsg.): Brenta-Monographie - Grundlagenforschung auf dem Gebiet der Hochgebirgskartographie. Mit Beiträgen von *D. Beineke, H. C. Berann, W. de Concini, G. Hell, D. Herm, H. Immel, U. Kleim, G. Neugebauer und K. Ringle.* 187 S.

Heft 25/1987

A. Perelmutter: Beiträge zur Ausgleichung geodätischer Netze. 75 S.

Heft 26/1987

W. Ellmer: Untersuchung temperaturinduzierter Höhenänderungen eines Großturbinentisches. Dissertation. 109 S.

Heft 27/1988

H. Heister: Zur automatischen Kalibrierung geodätischer Längenmeßinstrumente. Habilitationsschrift. 213 S.

Heft 28/1987

E. H. Paßberger: Systemstudie zur Sicherung ökologischer Vorrangflächen mittels Bodenordnung in Bayern / System study for the protection of ecological priority areas by means of Land rearrangement in Bavaria. Dissertation. 186 S.

Heft 29/1987

H. Glasmacher: Die Gaußsche Ellipsoid-Abbildung mit komplexer Arithmetik und numerischen Näherungsverfahren. Dissertation. 131 S.

Heft 30/1987

Y. Zhang: Beiträge zum Entwurf von optimalen Beobachtungsplänen für tektonische Überwachungsnetze. Dissertation. 151 S.

Heft 31/1988

W. Lechner: Untersuchung einer kreiselorientierten Landfahrzeug-Navigationsanlage im Hinblick auf geodätische Anwendungen und Möglichkeiten der Höhenübertragung. Dissertation. 165 S.

Heft 32/1988

R. König: Zur Fehlertheorie und Ausgleichung inertialer Positionsbestimmungen. Dissertation. 143 S.

Heft 33/1988

H. Borutta: Robuste Schätzverfahren für geodätische Anwendungen. Dissertation. 161 S.

Heft 34/1988

H. Landau, K. Hehl, B. Eissfeller, G. W. Hein and I. W. Reilly: Operational Geodesy Software Packages. 325 S.

Heft 35/1988

G. Oberholzer, E. Paßberger: Landespflege in der Flurbereinigung, Teil IV. 153 S.

Heft 36/1988

H. Landau: Zur Nutzung des Global Positioning Systems in Geodäsie und Geodynamik: Modellbildung, Softwareentwicklung und Analyse. Dissertation. 287 S.

Heft 37/1989

B. Eissfeller: Analyse einer geodätischen raumstabilisierten Inertialplattform und Integration mit GPS. Dissertation. 327 S.

Heft 38/1990

(vergriffen)

Heft 38-1

A. Schödlbauer (Hrsg.): Moderne Verfahren der Landesvermessung. Beiträge zum 22. DVW-Seminar 12.-14. April 1989. Teil I: Global Positioning System. 352 S.

Heft 38-2

A. Schödlbauer (Hrsg.): Moderne Verfahren der Landesvermessung. Beiträge zum 22. DVW-Seminar 12.-14. April 1989. Teil II: Nivellement. Teil III: Vermessungskreisel. S. 353 - 551

Heft 39/1989

N. Kersting, W. Welsch (Hrsg.): Rezente Krustenbewegungen. Seminar 8./9. Juni 1989. 307 S.

Heft 40/1989

G. Oberholzer: Ländliche Kulturgeschichte und Landentwicklung. 214 S.

Heft 41/1990

G. W. Hein, K. Hehl, B. Eissfeller, M. Ertel, W. Jacoby, D. Czerek: On Gravity Prediction Using Density and Seismic Data. 148 S.

Heft 42/1992

N. Kersting: Zur Analyse rezenter Krustenbewegungen bei Vorliegen seismotektonischer Dislokationen. Dissertation. V, 246 S.

Heft 43/1992

K. Hehl: Bestimmung von Beschleunigungen auf einem bewegten Träger durch GPS und digitale Filterung. Dissertation. XII, 206 S.

Heft 44/1992

W. Oswald: Zur kombinierten Ausgleichung heterogener Beobachtungen in hybriden Netzen. Dissertation. 128 S.

Heft 45/1993

Institut für Geodäsie (Hrsg.): Das Global Positioning System im praktischen Einsatz der Landes- und Ingenieurvermessung. Beiträge zum Geodätischen Seminar 12.-14. Mai 1993. 314 S.

Heft 46/1994

K. Brunner und J. Peipe (Hrsg.): Festschrift für Prof. Dr.-Ing. Egon Dorrer zum 60. Geburtstag. 254 S.

Heft 47/1994

Heft 47-1

K.-H. Thiemann: Die Renaturierung strukturarmer Intensivagrargebiete in der Flurbereinigung aus ökologischer und rechtlicher Sicht. Dissertation. Teil I: Renaturierungsleitbild, Naturschutzverfahren. XXXVI, 384 S.

Heft 47-2

K.-H. Thiemann: Die Renaturierung strukturarmer Intensivagrargebiete in der Flurbereinigung aus ökologischer und rechtlicher Sicht. Dissertation. Teil II: Planungsrechtliche Aspekte. XXXVI, S. 385 - 572

Heft 48/1994

C. Schwiertz: Experimente zur GPS-gestützten Aerotriangulation unter besonderer Berücksichtigung systematischer Einflüsse. Dissertation. VIII, 192 S.

Heft 49/1995

R. Scheuring: Zur Qualität der Basisdaten von Landinformationssystemen. Dissertation. 126 S.

Heft 50/1997

W. M. Welsch, M. Lang, M. M. Miller (Eds.): Geodetic Activities, Juneau Icefield, Alaska, 1981 - 1996. 268 S.

Heft 51/1996

H. Blomenhofer: Untersuchungen zu hochpräzisen kinematischen DGPS-Echtzeitverfahren mit besonderer Berücksichtigung atmosphärischer Fehlereinflüsse. Dissertation. X, 168 S.

Heft 52/1997

J. G. Wang: Filtermethoden zur fehlertoleranten kinematischen Positionsbestimmung. Dissertation. XV, 138 S.

Heft 53/1996

G. Chen: Robuste Verfahren zur Analyse linearer stochastischer Prozesse im Zeitbereich. Dissertation. III, 128 S.

Heft 54/1997

J. Dold: Ein hybrides photogrammetrisches Industriemeßsystem höchster Genauigkeit und seine Überprüfung. Dissertation. 140 S.

Heft 55/1997

B. Eissfeller: Ein dynamisches Fehlermodell für GPS Autokorrelationsempfänger. Habilitationsschrift. XII, 182 S.

Heft 56/1997

T. Sutor: Robuste Verfahren zur Analyse linearer stochastischer Prozesse im Spektralbereich. Dissertation. 123 S.

Heft 57/1997

G. Oberholzer: Ländliche Kulturgeschichte und Landentwicklung, Teil II. 186 S.

Heft 58/1997

D. Zhong: Datumsprobleme und stochastische Aspekte beim GPS-Nivellement für lokale Ingenieurnetze. Dissertation. 160 S.

Heft 59/1997

T. Jiang: Digitale Bildzuordnung mittels Wavelet-Transformation. Dissertation. II, 136 S.

Heft 60/

Institut für Geodäsie (Hrsg.): Festschrift zur 25-Jahr-Feier. *in Vorbereitung*

Heft 61/1998

T. Cui: Generierung hochwertiger Digitaler Geländemodelle aus analogen Karten mittels Mathematischer Morphologie. Dissertation. III, 188 S.

Heft 62/1999

K. Brunner, W. M. Welsch (Hrsg.): Hochgebirgs- und Gletscherforschung. Zum 100. Geburtstag von Richard Finsterwalder. 114 S.

Heft 63/1999

C. Fosu: Astrogeodetic Levelling by the Combination of GPS and CCD Zenith Camera. Dissertation. 155 S.

Heft 64/1999

W. Werner: Entwicklung eines hochpräzisen DGPS-DGLONASS Navigationssystems unter besonderer Berücksichtigung von Pseudolites. Dissertation. 226 S.

Heft 65/1999

K. Krack: Dreizehn Aufgaben aus der Landesvermessung im Geographischen Koordinatensystem. 84 S.

Heft 66/2000

G. Joos: Zur Qualität von objektstrukturierten Geodaten. Dissertation. 150 S.

Heft 67/2000

H. Sternberg: Zur Bestimmung der Trajektorie von Landfahrzeugen mit einem hybriden Meßsystem. Dissertation. 158 S.

Heft 68/2000

G. Oberholzer: Die Weiterentwicklung der Kulturlandschaft. Landespflge in der Flurbereinigung, Teil V. 150 S.

Heft 69/2000

R. Hollmann: Untersuchung von GPS-Beobachtungen für kleinräumige geodätische Netze. Dissertation. 350 S.

Heft 70/2001

U. Roßbach: Positioning and Navigation Using the Russian Satellite System GLONASS. Dissertation. 167 S.

Heft 71/2001

D. Beineke: Verfahren zur Genauigkeitsanalyse für Altkarten. Dissertation. 155 S.

Heft 72/2001

V. Oehler: Entwicklung eines „end-to-end“ Simulators zur Satellitennavigation unter besonderer Berücksichtigung von Pseudolite gestützten GNSS-Landesystemen. Dissertation. 212 S.

Heft 73/2001

T. Schüler: On Ground-Based GPS Tropospheric Delay Estimation. Dissertation. 370 S.