2



Reprint from Function Theoretic Methods for Partial Differential Equations, Darmstadt 1976, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 561, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

On the Boundary [illegible]
for a Nonlinear Elliptic System

# Über das Randwert-Normproblem für ein nichtlineares elliptisches System *)

von


Heinrich Begehr
I. Math. Institut
Freie Universität Berlin

Robert P. Gilbert +)
Department of Math.
University of Delaware


An die Ergebnisse von Bers [3] und Vekua [16] über lineare elliptische Differentialgleichungssysteme erster Ordnung, in Hilbertscher Normalform gegeben durch

$$u_x - v_y = au + bv + c\,,$$

$$u_y + v_x = \alpha u + \beta v + \gamma$$

bzw. in komplexer Schreibweise

$$w_{\bar{z}} = Aw + B\bar{w} + C,$$

haben sich viele Untersuchungen und Verallgemeinerungen (vgl. [4], [5] [6], [10], [13]) angeschlossen. Die funktionentheoretischen Eigenschaften der Lösungen solcher Systeme sind bis hin zur Nevanlinnaschen Wertverteilungstheorie [2], [3], [11], [12], [16] entwickelt und entspringen dem auf Bers und Vekua zurückgehenden Ähnlichkeitsprinzip.

---

*) Herrn Professor Rolf Nevanlinna zum 80. Geburtstag gewidmet.


+) Diese Arbeit entstand, während sich der zweitgenannte Verfasser durch die Alexander von Humboldt-Stiftung mit dem "Senior U.S. Scientist Award" ausgezeichnet im Sommersemester 1975 an der Freien Universität Berlin aufhielt.

Randwertprobleme für obige Systeme werden ausführlich in [10], [16] und in [9], [17], [18] behandelt. Hier sollen wie in [10] und [17] die Greenschen Funktionen erster und zweiter (Neumannsche Funktion) Art benutzt werden, um das Randwert-Normproblem für eine nichtlineare Gleichung der Form

$$w_{\bar{z}} = f(z,w) \tag{1}$$

zu lösen. Existenz und Eindeutigkeit der Lösung dieses Problems wird mit Hilfe einer allgemeineren Bedingung gesichert, als es die Lipschitzbedingung ist. Mit anderen Methoden (Einbettungsmethode) und andersartigen Voraussetzungen (zweimalige stetige Differenzierbarkeit von f nach w und $\bar{w}$) ist das Problem in [9] behandelt worden. Neben den verallgemeinerten analytischen Funktionen sind die approximativ analytischen Funktionen (vgl. [3], [14], [1]) Lösungen von Differentialgleichungen des Typ (1).

1. Vorbereitende Betrachtungen. Ist $\phi$ eine konforme Abbildung des einfach zusammenhängenden Gebietes D der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ mit mehr als einem Randpunkt auf den Einheitskreis, so sind

$$G^{I}(\zeta,z) := -\frac{1}{2\pi}\log\left|\frac{\phi(\zeta)-\phi(z)}{1-\overline{\phi(\zeta)}\phi(z)}\right| \qquad (\zeta,z\in D)$$

$$G^{II}(\zeta,z) := -\frac{1}{2\pi}\log\left|(\phi(\zeta)-\phi(z))\,(1-\overline{\phi(\zeta)}\phi(z))\right| \qquad (\zeta,z\in D)$$

die Greenschen Funktionen erster und zweiter Art für D. Hat D einen glatten Rand $\partial D$, so existiert eine Konstante c, die durch

$$c = 4\sup_{\zeta,z\in D}\left|\frac{\phi'(z)\ (\zeta-z)}{\phi(\zeta)-\phi(z)}\right| \geq 4$$

festgelegt werden kann, so daß

$$|G^{k}_{\zeta}(\zeta,z)| \leq \frac{1}{2\pi}\left|\frac{\phi'(\zeta)}{\phi(\zeta)-\phi(z)}\right| \leq \frac{c}{4|\zeta-z|} \qquad (\zeta,z\in D; k = I,II). \tag{2}$$

Charakteristische Eigenschaften auf $\partial D$ sind

$$G^{I}(\zeta,z) = 0, \quad d_n G^{II}(\zeta,z) = -\frac{1}{2\pi}|d\phi(\zeta)| \quad (\zeta\in\partial D, z\in D),$$

$$\int_{\partial D} G^{II}(\zeta,z) \ |d\phi(\zeta)| = 0 \ (z\in D).$$

Mit Hilfe einer auf (glattem Rand) $\partial D$ gegebenen reellen stetigen bzw. Hölder-stetigen Funktion $\varphi$ wird durch

$$\tilde{\varphi}(z) := -\int_{\partial D} \varphi(\zeta)[d_n G^{I}(\zeta,z) - i\, dG^{II}(\zeta,z)] \quad (z\in D),$$

wo

$$d := \frac{\partial}{\partial\zeta} d\zeta + \frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}} d\bar{\zeta}, \quad d_n := -i\left[\frac{\partial}{\partial\zeta} d\zeta - \frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}} d\bar{\zeta}\right],$$

in D eine holomorphe Funktion $\tilde{\varphi}$ definiert, die den Randbedingungen

$$\mathrm{Re}\,\tilde{\varphi}|_{\partial D} = \varphi, \quad \int_{\partial D} \mathrm{Im}\, \tilde{\varphi}(\zeta)|d\phi(\zeta)| = 0$$

genügt, und unter Hinzunahme ihrer Randwerte in $\hat{D} = D\cup\partial D$ stetig bzw. Hölder-stetig ist (vgl. [10], 9.4 oder [17]). Für in D stetige Funktionen w mit verallgemeinerten ersten Ableitungen in $L_p(\hat{D})$ $(2<p)$ gilt in D folgende Integraldarstellung ([10], 10.4):

$$(3) \quad w(z) = -\Theta(z) + i\int_{D}\{w_{\bar{\zeta}}(\zeta)[G^{I}_{\zeta}(\zeta,z)+G^{II}_{\zeta}(\zeta,z)] + \overline{w_{\bar{\zeta}}(\zeta)}[G^{I}_{\bar{\zeta}}(\zeta,z)-G^{II}_{\bar{\zeta}}(\zeta,z)]\}d\zeta d\bar{\zeta},$$

$$(4) \quad \Theta(z) := \int_{\partial D}\{\mathrm{Re}\, w(\zeta)[d_n G^{I}(\zeta,z) - i\,dG^{II}(\zeta,z)] + i\, \mathrm{Im}\, w(\zeta) d_n G^{II}(\zeta,z)\}.$$

Setzt man anstelle von (4)

$$(5) \quad \Theta(z) = \int_{\partial D} \mathrm{Re}\, w(\zeta)[d_n G^{I}(\zeta,z) - i\,dG^{II}(\zeta,z)] - iC$$

mit einer willkürlichen reellen Konstanten C, so ist die "Randnorm" von Im w,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D} \mathrm{Im}\, w(\zeta) \ |d\phi(\zeta)|$$

gleich dieser Konstanten (vgl. [10], 4.8). Man erkennt dies durch Integration von (3) in Verbindung mit (5).

<u>Hilfssatz:</u> D sei ein beschränktes Gebiet von $\mathbb{C}$ und $g(z,x)$ eine in $\hat{D} \times [0, +\infty)$ nichtnegative, in x stetige Funktion mit den Eigenschaften

i. $g(z,o) = 0, \quad g(z,x) \le g(z,y) \quad (z \in D,\ 0 \le x \le y)$,

ii. $g(z,x(z)) \in L_p(\hat{D})\,(2<p)$ für jede in $\hat{D}$ stetige, nichtnegative Funktion x,

iii. Es existiert ein $K>0$, so daß

$$\int_D g(\zeta,K) \frac{d\xi\, d\eta}{|\zeta - z|} \le K, \tag{6}$$

iv. Für den auf der Menge der auf $\hat{D}$ stetigen, nichtnegativen, durch K nach oben beschränkten Funktionen betrachteten Integraloperator $\underset{\sim}{I}$,

$$(\underset{\sim}{I}x)\ (z) := \int_D g(\zeta,x(\zeta)) \frac{d\xi\, d\eta}{|\zeta - z|} \quad (z \in D,\ x \in C(\hat{D}),\ \zeta = \xi + i\eta),$$

ist 1 nicht Eigenwert.

Dann hat die Integralungleichung

$$\delta(z) \le (\underset{\sim}{I}\delta)(z) \qquad (z \in D) \tag{7}$$

in der Menge der auf $\hat{D}$ stetigen Funktionen mit Wertevorrat in $[0,K]$ nur die Nullfunktion als Lösung.

<u>Beweis:</u> Es sei $\Delta_o$ eine stetige Lösung von (7) mit $0 \le \Delta_o(z) \le K$.

Die durch

$$\Delta_n := \underset{\sim}{I}\, \Delta_{n-1} \quad (n \in \mathbb{N})$$

gegebene Funktionenfolge von stetigen, nichtnegativen, durch K nach oben beschränkten Funktionen ist monoton wachsend und beschränkt, so daß

$$\Delta = \lim_{n\to\infty} \Delta_n$$

existiert. Wegen der monotonen Konvergenz und der Stetigkeit von g in der zweiten Veränderlichen gilt

$$\Delta = \underset{\sim}{I}\Delta.$$

Damit ist $\Delta$ eine stetige Funktion aus der Definitionsmenge von $\underset{\sim}{I}$ und damit die Nullfunktion.

Wegen $0 \le \Delta_o \le \Delta$ gilt also $\Delta_o(z) \equiv 0$ in $\hat{D}$.

Ein Beispiel für eine Funktion g mit den Eigenschaften dieses Hilfssatzes ist

$$g(z,x) = g(z)x \tag{8}$$

mit

$$0 \le g(z)\ \ (z \in \hat{D}),\ \ g \in L_p(\hat{D})\ \ (2<p),\ \ \int_D g(\zeta)\,\frac{d\xi\, d\eta}{|\zeta - z|} < 1\ \ (z \in \hat{D}).$$

Hier braucht Bedingung iv. nicht gefordert zu werden. Vielmehr ergibt sie sich ebenso wie die Behauptung des Hilfssatzes in diesem Fall sogleich mit einem indirekten Beweisschluß aus der Ungleichungskette

$$\delta(z) \le \int_D g(\zeta)\delta(\zeta)\frac{d\xi\, d\eta}{|\zeta - z|} \le \underset{z\in\hat{D}}{\mathrm{Max}}\ \delta(z) \int_D g(\zeta)\ \frac{d\xi\, d\eta}{|\zeta - z|} < \underset{z\in\hat{D}}{\mathrm{Max}}\ \delta(z).$$

Lemma: Ist D ein beschränktes Gebiet von $\mathbb{C}$ mit Durchmesser d(D) und $w \in L_p(\hat{D})$ (2<p), so gilt

$$\int_D |f(\zeta)|\ \frac{d\xi\, d\eta}{|\zeta - z|} \le M\ L_p(f,\hat{D})\ \ (z \in \mathbb{C})$$

mit

$$L_p(f,\hat{D}) := \left(\int_D |f(\zeta)|^p\ d\xi\ d\eta\right)^{\frac{1}{p}}$$

und

$$M = M(p,D) := \left(\frac{2\pi}{\alpha q}\right)^{\frac{1}{q}} d^{\alpha}(D)\ \ \left(\alpha = \frac{p-2}{p}, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right).$$

Der Beweis ergibt sich durch Anwendung der Hölderschen Ungleichung.

2. Die erste Randwertaufgabe. Es sei D ein einfach zusammenhängendes, beschränktes Gebiet von $\mathbb{C}$ mit stetig gekrümmtem Rand $\partial D$, $\varphi$ eine auf $\partial D$ stetige, reelle Funktion und f eine in $\hat{D} \times \mathbb{C}$ gegebene komplexe

Funktion mit folgenden Eigenschaften:

v. $f(z,w(z)) \in L_p(\hat{D})\,(2<p)$ für alle in $\hat{D}$ stetigen, komplexen Funktionen w.

vi. Es existiert eine in $\hat{D} \times [0, +\infty)$ definierte, in der zweiten Variablen stetige und in $x = o$ gleichgradig bezüglich $z \in \hat{D}$ stetige Funktion $g(z,x)$ mit den Eigenschaften i. - iv. des Hilfssatzes, so daß mit c aus (2)

$$|f(z,w) - f(z,\omega)| \le \frac{1}{c}\, g(z,|w-\omega|) \quad (z \in \hat{D}; w,\omega \in \mathbb{C}).$$

Unter diesen Voraussetzungen wird das Randwertproblem

$$(9) \qquad w_{\bar{z}} = f(z,w), \quad \mathrm{Re}\,w|_{\partial D} = \varphi$$

untersucht. Es wird sich zeigen, daß dieses Problem eindeutig lösbar ist, wenn die Randnorm von Im w

$$(10) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{\partial D} \mathrm{Im}\, w(\zeta)\,|d\phi(\zeta)| = C$$

vorgegeben wird und die Konstante $K'$ aus (6) genügend groß ist. Um dies zu sehen, ist zu beachten, daß sich eine Lösung von (9), (10) nach (3), (4) durch

$$(11) \qquad w(z) = -\,\Theta(z) + (\underset{\sim}{P}w)(z) \quad (z \in D)$$

mit

$$\Theta(z) := \int_{\partial D} \varphi(\zeta)[d_n G^{I}(\zeta,z) - i dG^{II}(\zeta,z)] - iC \quad (z \in D)$$

und für $w \in C(\hat{D})$ und $z \in D$

$$(\underset{\sim}{P}w)(z) := 2\int_D \{f(\zeta,w(\zeta))[G^{I}_{\zeta}(\zeta,z)+G^{II}_{\zeta}(\zeta,z)]+\overline{f(\zeta,w(\zeta))}[G^{I}_{\bar{\zeta}}(\zeta,z)-G^{II}_{\bar{\zeta}}(\zeta,z)]\}\,d\xi\, d\eta$$

darstellen läßt. Der Integraloperator $\underset{\sim}{P}$ ist wegen

$$|(\underset{\sim}{P}w - \underset{\sim}{P}\omega)(z)| \le \int_D g(\zeta,|w(\zeta) - \omega(\zeta)|)\frac{d\xi\, d\eta}{|\zeta - z|}$$

mit Rücksicht auf die gleichgradige Stetigkeit von $g(z,x)$ in $x=o$ auf dem Banachraum

$$B := \{w:\ w \in C(\hat{D}),\ \|w\| := \max_{z \in \hat{D}} |w(z)|\}$$

der in $\hat{D}$ stetigen Funktionen mit Maximumnorm stetig. $\underset{\sim}{P}w$ ist in D beschränkt und Hölder-stetig mit dem von $w$ unabhängigen Hölder-Exponenten $\alpha = \frac{p-2}{p}$ (vgl. [16] (I,§6.1)),da $f(z,w(z)) \in L_p(\hat{D})$ $(2<P)$.

Satz 1: Erfüllt die Konstante $K$ die ((6) einschließende) Bedingung

(12) $$||\Theta|| + M[L_p(f_o,\hat{D}) + L_p(g_{2K},\hat{D})] \leq K$$

mit

$$f_o(z) := cf(z,o), g_{2k}(z) := g(z,2K)\ (z \in \hat{D}),$$

so exisitert in

$$A := \{w:\ w \in C(\hat{D}), ||w|| \leq K,\ Rew|_{\partial D} = \varphi,\ \frac{1}{2\pi}\int_{\partial D} Im\ w(\zeta)|d\phi(\zeta)| = C\} \subset B$$

nur eine Lösung $w$ der Integralgleichung (11); für sie gelten

$$Rew|_{\partial D} = \varphi,\ \frac{1}{2\pi}\int_{\partial D} Im\ w(\zeta)|d\phi(\zeta)| = C.$$

Beweis: Da $\Theta$ zu $A$ gehört, ist $A$ nicht leer. Wegen (12) bildet $\Theta + \underset{\sim}{P}$ die kompakte, konvexe Menge $A$ von $B$ in sich ab, so daß nach dem Schauderschen Fixpunktsatz in $A$ eine Lösung der nichtlinearen Integralgleichung (11) existiert. Diese Lösung ist sogar Hölder-stetig, wenn die Randvorgaben $\varphi$ Hölder-stetig sind. Daß die Randbedingungen erfüllt sind, läßt sich wie in [10] zeigen.

Um die Eindeutigkeit der Lösung in $A$ nachzuweisen, nehme man die Existenz zweier Lösungen $w$ und $\omega$ an. Dann gilt für $z \in D$

$$|w(z)-\omega(z)| = |(\underset{\sim}{P}w-\underset{\sim}{P}\omega)(z)| \leq \int_D g(\zeta,|w(\zeta)-\omega(\zeta)|)\frac{d\xi\ d\eta}{|\zeta-z|} \leq ML_p(g_{2K},\hat{D}) \leq K.$$

Da demnach $|w(z)-\omega(z)|$ der Integralungleichung (7) genügt und die Funktion $g(z,x)$ die Voraussetzungen des Hilfssatzes erfüllt, gilt $w = \omega$.

Da $\underset{\sim}{P}w$ unter der Voraussetzung $f(z,w(z)) \in L_p(\hat{D})$ verallgemeinerte Ableitungen erster Ordnung hat (siehe etwa [16]), und die verallgemeinerte Ableitung nach $\bar{z}$ durch

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\underset{\sim}{P}w)(z) = f(z,w(z))\ (z \in D)$$

gegeben wird, stimmt die Lösung von (11) mit der verallgemeinerten

Lösung des Randwert-Normproblems (9), (10) überein. Ist $f(z,w(z))$ für die Lösung von (11) beschränkt und Hölder-stetig, so existiert die Ableitung von w im klassischen Sinn und man erhält eine Lösung im klassischen Sinn. Zum Beweis der Existenz einer Lösung wird für $g(z,x)$ nur die bezüglich $z \in D$ gleichgradige Stetigkeit in $x = 0$ benötigt. Die Voraussetzungen für $g(z,x)$ aus dem Hilfssatz sind nur für den Eindeutigkeitsbeweis benötigt worden.

Satz 2: Das Randwert-Normproblem (9), (10) hat eine in der Menge A eindeutig bestimmte verallgemeinerte Lösung, wenn f den Bedingungen v. und vi. genügt. Ist $\varphi$ Hölder-stetig auf $\partial D$ und $f(z,w(z))$ beschränkt und Hölder-stetig für Hölder-stetige Funktionen w, so ist die Lösung im klassischen Sinn zu verstehen.

3. Anmerkungen und Folgerungen. Es genügt, an Stelle von (12) nur

$$|\Theta(z)| + \int_D (|f_o(\zeta)| + g(\zeta,K)) \frac{d\xi\, d\eta}{|\zeta - z|} \le K \quad (z \in \hat{D}) \tag{13}$$

und

$$\int_D g(\zeta,2K) \frac{d\xi\, d\eta}{|\zeta - z|} \le K \quad (z \in \hat{D}) \tag{14}$$

zu verlangen.

Bedingung (12) ist für den bereits erwähnten Spezialfall der Lipschitz-Bedingung (8) erfüllbar. Man hat nur K gemäß

$$2||\Theta|| \le K, \quad 2ML_p(f_o,\hat{D}) \le K(1-4ML_p(g,\hat{D})) \tag{15}$$

unter der Voraussetzung

$$4M\, L_p(g,\hat{D}) < 1,$$

die für hinreichend kleine Gebiete D erfüllbar ist, zu wählen. Da K hier beliebig groß festgelegt werden kann, ist die Lösung des Randwert-Normproblems (9), (10) unter (8) und (15) eindeutig in B bestimmt.

Satz 3: Das Randwert-Normproblem (9), (10) hat im Raum $C(\hat{D})$ eine eindeutig bestimmte verallgemeinerte Lösung, wenn

$$f(z,w(z))\in L_p(\hat{D})\,(2<p,\ w\in C(\hat{D}),\ z\in\hat{D}),$$

$$|f(z,w)-f(z,\omega)|\le\frac{1}{c}g(z)|w-\omega|\,(z\in\hat{D};w,\omega\in\mathbb{C}),$$

$$g\in L_p(\hat{D}),\ 2\int_D g(\zeta)\frac{d\xi\,d\eta}{|\zeta-z|}\le 1.$$

Die Bedingungen (6), (12), (13), (14) sind für hinreichend kleines Gebiet D für vorgegebenes K( gegebenenfalls $K > 2||\Theta||$) erfüllbar.

<u>Satz 4:</u> Das Randwert-Normproblem

$$w_{\bar{z}} = f(z,w),\ \operatorname{Re} w|_{\partial D} = \varphi,\ \frac{1}{2\pi}\int_{\partial D}\operatorname{Im} w(\zeta)|d\phi(\zeta)| = C$$

für ein einfach zusammenhängendes beschränktes Gebiet D mit stetig gekrümmtem Rand $\partial D$, auf $\partial D$ stetiger reeller Funktion $\varphi$ und reeller Konstanten C ist in $C(\hat{D})$ eindeutig lösbar im verallgemeinerten Sinn, wenn f in $\hat{D}\times\mathbb{C}$ folgenden Bedingungen genügt:

1. $f(z,w(z))$ gehört für alle in $\hat{D}$ stetigen Funktionen zu $L_p(\hat{D})$ $(2<p)$,
2. $|f(z,w)-f(z,\omega)|\le\frac{1}{c}\,g(z,|w-\omega|)\,(z\in\hat{D};\ w,\omega\in\mathbb{C})$

mit einer in $\hat{D}\times[0,+\infty)$ nichtnegativen, in x monoton wachsenden und stetigen, in x = o gleichgradig bezüglich $z\in\hat{D}$ stetigen und dort für x = o identisch in z verschwindenden Funktion g(z,x), für die für jede in $\hat{D}$ stetige, nichtnegative Funktion x(z)

1. $g(z,x(z))\in L_p(\hat{D})$ $(2<p)$,
2. $x(z)\neq\int_D g(\zeta,x(\zeta))\frac{d\xi\,d\eta}{|\zeta-z|}$ wenigstens für ein $z\in\hat{D}$, falls $x(z)\neq 0$,

erfüllt sind.

Zu den betrachtenden Funktionen gehören unter den zusätzlichen Voraussetzungen

$$f(z,o)\equiv 0,\ g(z,x)=g(z)x\ (g\in L_p(\hat{D}))$$

die approximativ analytischen Funktionen.

## Literatur

[1] Begehr, H. Zur Wertverteilung approximativ analytischer Funktionen. Arch. Math. (Basel) 23(1972), 41 - 49.

[2] Begehr, H. Die logarithmische Methode in der Wertverteilungstheorie pseudoanalytischer Funktionen. Ann.Acad.Sci.Fenn. AI 549 (1973).

[3] Bers, L. Theory of pseudo-analytic functions. Vorlesungsausarb. New York University 1953.

[4] Bojarski, B.B. Die Theorie des verallgemeinerten analytischen Vektors. Ann.Pol.Math. 17(1966), 281-320 (Russisch).

[5] Gilbert, R.P. Constructive methods for elliptic partial differential equations. Lecture Notes in Mathematics. 365, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1974. 397 S.

[6] Gilbert, R.P. - Hile, G. Generalized hyperanalytic function theory. Trans. Amer.Math.Soc. 195(1974), 1-29.

[7] Gilbert, R.P. - Hsiao, G.C. On Dirichlet's problem for quasilinear elliptic equations. In: Constructive and computational methods for differential and integral equations.
Herausgegeben von D.L. Colton und R.P. Gilbert. Lecture Notes in Mathematics 430, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1974, 184-236.

[8] Gilbert, R.P.-Weinacht, R.J. Interative schemes for elliptic systems. Ibid. 253-260.

[9] Wendland, W.L. An integral equation method for generalized analytic functions. Ibid. 414-542.

[10] Haack, W. - Wendland, W. Vorlesungen über partielle und Pfaffsche Differentialgleichungen. Birkhäuser, Basel-Stuttgart, 1969, 555 S.

[11] Habetha, K. Über die Werteverteilung pseudoanalytischer Funktionen. Ann.Acad.Sci.Fenn.AI 406 (1967).

[12] Habetha, K. On zeros of elliptic systems of first order in the plane. Erscheint demnächst.

[13] Tutschke, W. Konstruktion von globalen Lösungen mit vorgeschriebenen Singularitäten bei partiellen komplexen Differentialgleichungssystemen. S. - ber. Sächsische Akad. Wiss. Leipzig, Math. Nat. Kl. 109, 7.

[14] Tutschke, W. Ein Differenzierbarkeitssatz für approximativ analytische Funktionen. Math. Z. 142 (1975), 27-31.

[15] Tutschke, W. Theorie und Anwendungen morpher Funktionen. Beiträg zur Analysis 4(1972), 167-175.

[16] Vekua, I.N. Verallgemeinerte analytische Funktionen. Akademie Verlag, Berlin, 1963, 538 S.

[17] Wendland, W. Über Ähnlichkeitsprinzip und Randwertaufgaben für verallgemeinerte analytische Funktionen. Appl. Anal. 2 (1972), 101-110.

[18] Wendland, W. On boundary value problems of generalized analytic functions. Conf. theory ordinary partial diff. equ., Dundee/ Scottland 1972, Lecture Notes in Mathematics. Springer, Berlin-Heidelberg-New York 280 (1972), 190-201.

UNCLASSIFIED

SECURITY CLASSIFICATION OF THIS PAGE (When Data Entered)

# REPORT DOCUMENTATION PAGE

READ INSTRUCTIONS BEFORE COMPLETING FORM

**1. REPORT NUMBER**
AFOSR - TR- 77 - 0188

**2. GOVT ACCESSION NO.**

**3. RECIPIENT'S CATALOG NUMBER**
Ueber das Randwert-Normproblem fuer ein Nichtlineares Elliptisches System.

**4. TITLE (and Subtitle)**
ON THE BOUNDARY VALUE BOUNDARY NORM PROBLEM FOR A NONLINEAR ELLIPTIC SYSTEM (German)

**5. TYPE OF REPORT & PERIOD COVERED**
Interim rept.

**6. PERFORMING ORG. REPORT NUMBER**

**7. AUTHOR(s)**
Heinrich Begehr and Robert P. Gilbert

**8. CONTRACT OR GRANT NUMBER(s)**
AF - AFOSR 76-2879 - 76

**9. PERFORMING ORGANIZATION NAME AND ADDRESS**
University of Delaware
Department of Mathematics
Newark, DE 19711

14p.

**10. PROGRAM ELEMENT, PROJECT, TASK AREA & WORK UNIT NUMBERS**
61102F 2304/A4

**11. CONTROLLING OFFICE NAME AND ADDRESS**
Air Force Office of Scientific Research/NM
Bolling AFB, Washington, DC 20332

**12. REPORT DATE**
1976

**13. NUMBER OF PAGES**
11

**14. MONITORING AGENCY NAME & ADDRESS (if different from Controlling Office)**

**15. SECURITY CLASS. (of this report)**
UNCLASSIFIED

**15a. DECLASSIFICATION/DOWNGRADING SCHEDULE**

**16. DISTRIBUTION STATEMENT (of this Report)**
Approved for public release; distribution unlimited.

**17. DISTRIBUTION STATEMENT (of the abstract entered in Block 20, if different from Report)**

**18. SUPPLEMENTARY NOTES**
FUNCTION THEORETIC METHODS FOR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS, DARMSTADT -- LECTURE NOTES IN MATHEMATICS, ~~Vol.~~ 561, SPRINGER-BERLAG, BERLIN, ~~1977~~
pp 112-122

v561 pp112-122 1977

**19. KEY WORDS (Continue on reverse side if necessary and identify by block number)**
elliptic systems
nonlinear equations
boundary value problems
iteration

**20. ABSTRACT (Continue on reverse side if necessary and identify by block number)**


In this paper nonlinear elliptic systems in the plane are investigated. An iteration procedure is developed for the first boundary value problem which is shown to converge under weakened restrictions. The method may be thought of as a generalization of the work of Haack and Wendland "Vorlesungen über partielle und Pfaffsche Differentialgleichungen" (Birkhäuser, Basel-Stuttgart, 1969) concerning boundary value problems for linear


DD FORM 1 JAN 73 1473 EDITION OF 1 NOV 65 IS OBSOLETE

UNCLASSIFIED 404 782

SECURITY CLASSIFICATION OF THIS PAGE (When Data Entered)

20 Abstract

elliptic systems in the plane. The equations studied are of interest for nonlinear elastic theories of plates.